MATEMATICA

Appunti

Triennio Liceo Scientifico

aa.aa. 1983-1986

MATEMATICA

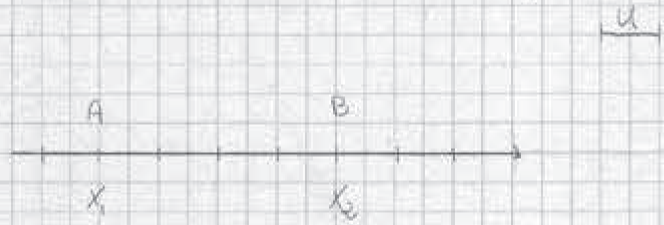
3ª Liceo Scientifico

Teoria

S_I: la retta, uno spazio ad una dimensione

Questo significa che per individuare un punto su questo spazio basta un dato solo (ascissa).
Ad una retta si dà sempre un verso.

Misura di un segmento orientato:
si dice misura di un segmento la quantità di volte che una unità di misura presa in precedenza entra perfettamente nel segmento dato.



$A(x_1)$ $B(x_2)$

$\overline{AB} = |x_1 - x_2|$

La distanza fra due punti di una retta è equivalente alla differenza fra l'ascissa maggiore e l'ascissa minore presi in valore assoluto.

es:.

$A(5)$ $B(8)$

$\overline{AB} = |8-5| = |3| = 3$

ma anche:

$\overline{AB} = |5-8| = |-3| = 3$

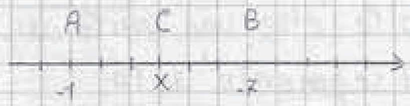
Misura ascissa mediana di un segmento orientato:

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

L'ascissa mediana di un segmento è equivalente alla semisomma delle ascisse degli estremi del segmento.

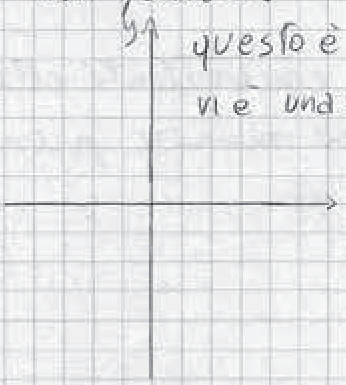
es.:

A(-1) B(-7)



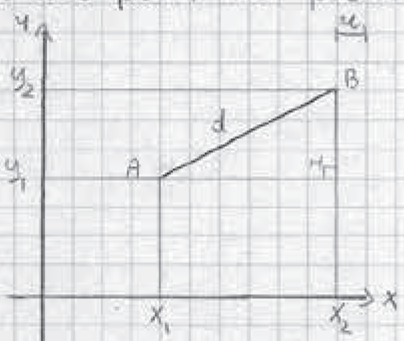
$x = \dfrac{-1-7}{2} = -4$

S_2: il piano, uno spazio a due dimensioni in cui occorrono due numeri o una coppia ordinata per individuare un punto.



questo è un sistema di assi cartesiani monometrico in quanto vi è una sola metrica (⊢).

Misura di due punti nel piano:



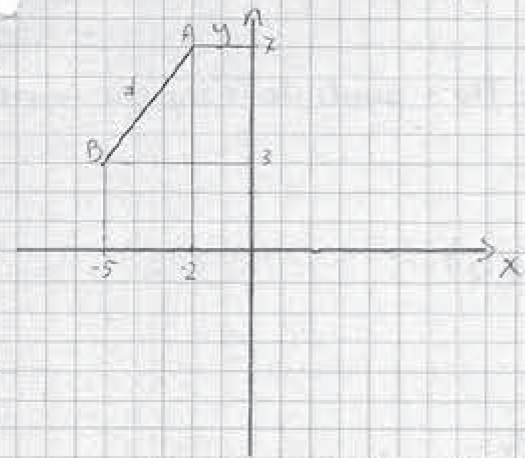
$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$

$d = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2}$

$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

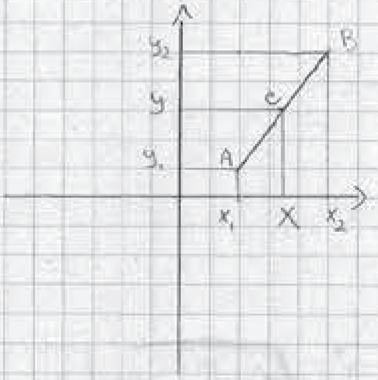
es:

A(-2;7) B(-5;3)



$d = \sqrt{(-5+2)^2+(7-3)^2} = \sqrt{-3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

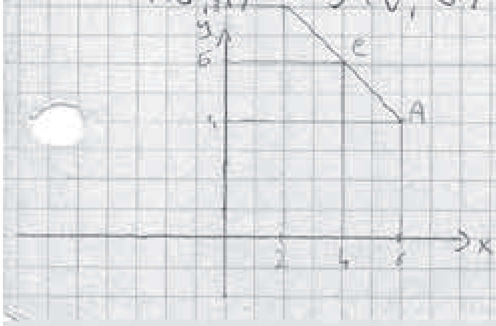
Coordinate del punto di mezzo di un segmento:



$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

es:

A(6;4) B(2;8)



$$\begin{cases} x = \dfrac{6+2}{2} \\ y = \dfrac{4+8}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

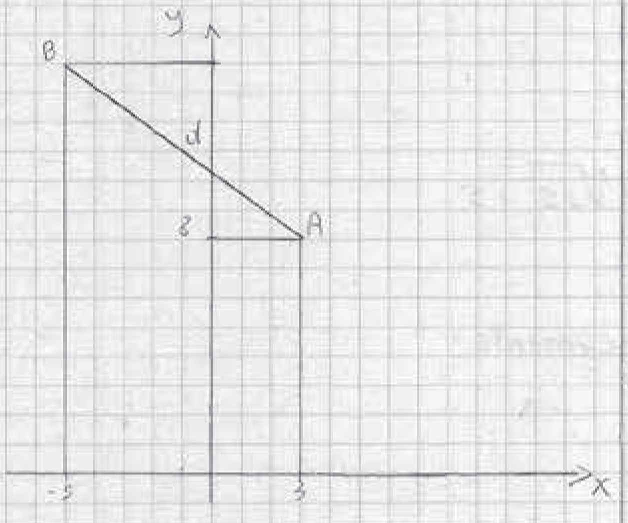
C(4;6)

il piano euclideo è uno spazio metrico.
stabilire una metrica è stabilire una regola in modo biunivoco che associ ad una coppia di punti un numero positivo.

Es n° 15 pag 608 a. b. c. d. e. (calcolare la distanza tra i punti delle seguenti coppie):

ⓐ:

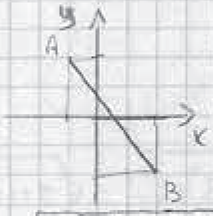
$A(3,8)$ $B(-5,14)$



$$d=\sqrt{(3+5)^2+(14-8)^2}=\sqrt{64+36}=10$$

ⓑ:

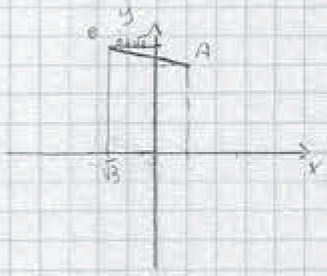
$A(-1,2)$ $B(2,-2)$



$$d=\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

ⓒ:

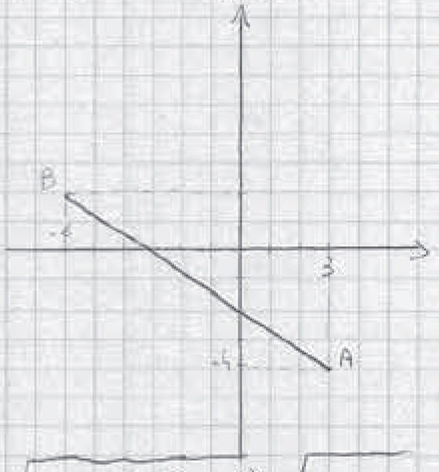
$A(1,3)$ $B(-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$



$$d=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(\cancel{3}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+2\sqrt{3}+\ldots}=\sqrt{8}=$$
$$=2\sqrt{2}.$$

ⓓ:

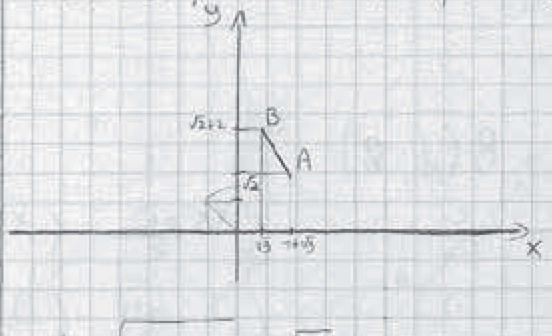
$A(3,-4)$ $B(-6,2)$



$$d=\sqrt{(3+6)^2+(2+4)^2}=\sqrt{81+36}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$$

ⓔ:

$A(1+\sqrt{3},2)$ $B(\sqrt{3},2+\sqrt{2})$



$$d=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$$

13

Determinazione dell'equazione della retta passante per 2 punti dati:

Come sappiamo, una equazione è una curva e in particolare una equazione di primo grado è una retta. Sappiamo anche che avendo l'equazione di primo grado si può trovare la retta. Ma se si sanno due punti a cui appartiene la retta come si fa a sapere l'equazione da cui deriva?
Innanzitutto sappiamo che la madre di tutte le equazioni di primo grado è $y=mx+n$, la quale però esclude tutte le rette parallele all'asse delle y. Per trovare la retta, o meglio la sua equazione occorre un sistema.
Ricorriamo ad un esempio:

abbiamo i punti $A(1;-1)$ $B(2;1)$, determinare l'equazione della retta a cui questi punti appartengono.
Allora io impongo prima il passaggio per il primo punto che comporta una equazione lineare (1° grado) nei coefficienti e poi impongo il passaggio per il secondo punto che comporta una equazione lineare nei coefficienti.

$$\begin{cases} m+n=-1 \\ 2m+n=+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=2 \\ n=-3 \end{cases}$$

ho sostituito ad m il valore 1 poichè rappresenta l'ascissa del punto A nella prima equazione ed il valore 2 poichè rappresenta l'ascissa del punto B. Poi ho sommato ad entrambi le equazioni n e le ho uguagliate a -1 e +1 perche rispettivamente sono le ordinate dei punti A e B

accanto all'equazione $m+n=-1$ occorre scrivere:
condizione perchè la retta passi per A
e nella seconda equazione:
condizione perchè la retta passi per B

a questo punto viene:

$y=mx+n \rightarrow y=2x-3$.

La madre delle equazioni di primo grado parallele all'asse delle y è:

$ax+c=0 \rightarrow x=-\frac{c}{a}$

Determinazione dell'equazione della retta passante per un punto P e parallela alla retta data:

si ha una equazione ed un punto, bisogna trovare una equazione la cui retta sia parallela alla data e passi per un punto P:

$7x+5y+1=0 \qquad P(-2,3)$

poiché la retta data non è parallela all'asse y, non lo sarà nemmeno quella cercata pertanto la sua equazione sarà del tipo:

coefficiente angolare ordinata all'origine

$y=mx+n$

impongo il passaggio per P:

$3=-2m+n$

$n=2m+3$ condizione perché la retta passi per P.

saputo n lo sostituisco nella equazione generale e faccio un sistema con l'equazione data:

$\begin{cases} y=mx+2m+3 \\ 7x+5y+1=0 \end{cases}$ retta generica del piano che ha subito l'informazione di passare per P. cioè equazione del fascio di rette di centro P esclusa quella parallela all'asse y.

sistema di sostituzione:

$7x+5mx+10m+15+1=0$

$7x+5mx=-10m-16$

$(7+5m)x=-10m-16$

$x=\dfrac{-10m-16}{7+5m}$ impongo al sistema di essere impossibile ~~cioè~~ privo dell'eventuale punto intersezione fra le rette.

affinché le due rette siano parallele occorre che il sistema sia impossibile. Per questo motivo eguaglio a zero il denominatore della x:

$7+5m=0$

$m=-\frac{7}{5}$

$y=-\frac{7}{5}x-\frac{14}{5}+3$

$y=-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}$

ho sostituito la m nella retta generica del piano che ha subito l'informazione di passare per P.

4. Condizione necessaria e sufficiente affinché 2 rette risultino parallele è che siano uguali i coefficienti angolari. (il coefficiente angolare è il coefficiente della x in forma esplicita).

$7x + 5y + 1 = 0 \qquad P(-2,3)$

$y = -\frac{7}{5}x - \frac{1}{5}$

poiché la retta data non è parallela all'asse y non lo sarà nemmeno quella passante per il punto P pertanto la sua equazione sarà del tipo:

$$y = mx + n$$

$3 = -2m + n$

$\begin{cases} n = 3 + 2m \\ -\frac{7}{5} = m \end{cases}$ condizione perché la retta passi per P; condizione di parallelismo

$\begin{cases} n = 3 - \frac{14}{5} \\ m = -\frac{7}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} n = \frac{1}{5} \\ m = -\frac{7}{5} \end{cases}$

$y = -\frac{7}{5}x + \frac{1}{5}$

Determinazione dell'equazione della retta perpendicolare alla data e passante per un punto dato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè 2 rette risultino fra loro perpendicolari è che il prodotto dei coefficienti angolari sia -1. (ovvero il reciproco dell'opposto)

es:

$2x+y+6=0 \qquad P(4,-3)$

ciò significa che data l'equazione $2x+y+6=0$ indicante una retta non parallela all'asse y noi dobbiamo trovare l'equazione della retta passante per P e perpendicolare alla data. Questa equazione sarà del tipo $y=mx+n$ poichè non è parallela all'asse x. Bisogna mettere in forma esplicita l'equazione data.

$y=-2x-6$

coefficiente angolare — ordinata all'origine

$y=mx+n$

$\begin{cases} -4m+n=-3 \\ -2m=-1 \end{cases}$ ho imposto il passaggio per P; condizione perchè la retta sia perpendicolare alla data

$\begin{cases} m=+\frac{1}{2} \\ n=-1 \end{cases}$

$y=+\frac{1}{2}x-1$

$x-2y-2=0$ equazione della retta passante per P e perpendicolare alla retta data.

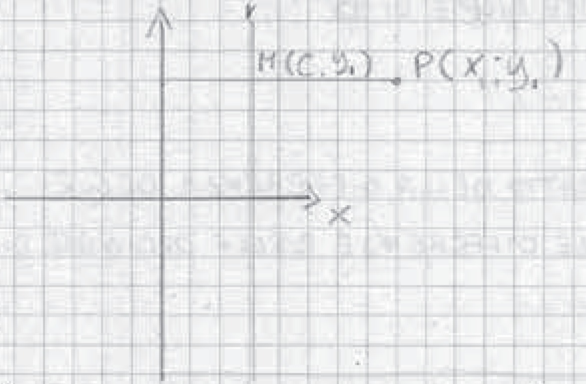
Per trovare l'intersezione basta fare un sistema tra l'equazione data e l'equazione trovata.

$\begin{cases} 2x+y+6=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases} \begin{cases} y=-2x-6 \\ y=\frac{1}{2}x-1 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}x-1=-2x-6 \\ y=-2x-6 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}x+2x=-5 \\ y=-2x-6 \end{cases} \begin{cases} 5x=-10 \\ y=-2x-6 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ ascissa del punto intersezione fra le due rette. ordinata del punto intersezione fra le due rette.

distanza di un punto da una retta è quel segmento che ha per estremi il punto stesso e il piede della perpendicolare condotta da esso sulla retta.

Se la retta è parallela all'asse y la distanza di un punto da questa retta è equivalente alla differenza dell'ascissa del punto con l'ascissa che la retta individua sull'asse delle x:



l'equazione della retta r è:

$x = c$

allora la distanza è:

$d = |x_1 - c|$

Se invece si vuol trovare la distanza di una retta parallela all'asse x si fa la differenza tra le ordinate.

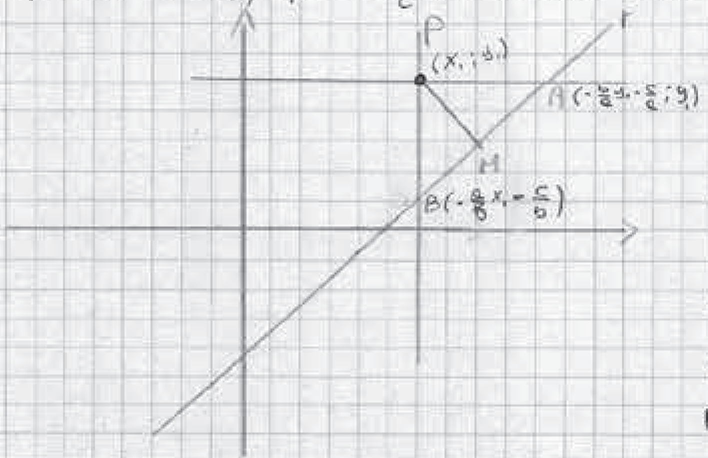
Formula della distanza di un punto da una retta e dimostrazione:

Formula: $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

In cui $\underline{a}$ è il coefficiente della x nella equazione $ax + by + c = 0$, $\underline{x_1}$ è l'ascissa del punto P, $\underline{b}$ è il coefficiente della y nella equazione $ax + by + c = 0$, $\underline{y_1}$ è l'ordinata del punto p e $\underline{c}$ è il termine noto dell'equazione $ax + by + c = 0$

Dimostrazione:

abbiamo una retta di equazione $ax + by + c = 0$ già ridotta in forma implicita e il punto $P(x_1; y_1)$. Vogliamo dimostrare che sussiste la suddetta formula:



DATO IL PUNTO P ESTERNO ALLA RETTA r, TRACCIAMO 2 PARALLELE AGLI ASSI X e Y PER CUI NASCE UN TRIANGOLO RETTANGOLO. POI PREMETTIAMO d UGUALE A $\overline{PM}$.
IL PUNTO B HA LA STESSA ASCISSA DEL PUNTO P, PERTANTO, SOSTITUENDO X_1 NELLA RETTA DATA ABBIAMO CHE L'ORDINATA DI B È: $-\dfrac{a}{b}x_1 - \dfrac{c}{b}$.
CON LO STESSO RAGIONAMENTO VENIAMO A SAPERE CHE IL PUNTO A HA LA STESSA ORDINATA

DI P E L'ASCISSA $-\frac{b}{a}y_1-\frac{c}{a}$. $\overline{PM}$ È EQUIVALENTE A $\frac{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}{\overline{AB}}$.

$\overline{PA}$ È UGUALE ALLA DIFFERENZA FRA LE ASCISSE DI P E A CON IL MODULO:

$$\left|x_1+\frac{b}{a}y_1+\frac{c}{a}\right|=\frac{|ax_1+by_1+c|}{|a|}.$$

$\overline{PB}$ È UGUALE ALLA DIFFERENZA FRA LE ORDINATE DI P E DI B:

$$\left|y_1+\frac{a}{b}x_1+\frac{c}{b}\right|=\frac{|ax_1+by_1+c|}{|b|}.$$

$\overline{AB}$ È UGUALE ALLA RADICE QUADRATA DEL QUADRATO DELLA DIFFERENZA DELLE ASCISSE DI A E DI B PIÙ IL QUADRATO DELLE DIFFERENZE DELLE ORDINATE DI A E DI B:

$$\sqrt{\left(x_1+\frac{b}{a}y_1+\frac{c}{a}\right)^2+\left(y_1+\frac{a}{b}x_1+\frac{c}{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2}+\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{b^2}}=$$

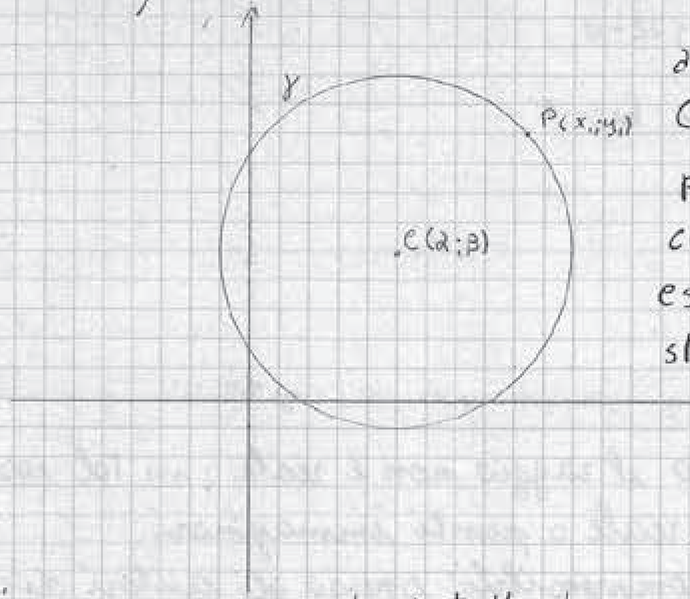
$$|ax_1+by_1+c|\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=|ax_1+by_1+c|\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}=$$

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{|ab|}\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\overline{PM}=\frac{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}{AB}=\frac{\cancel{|ax_1+by_1+c|}}{\cancel{|a|}}\cdot\frac{|ax_1+by_1+c|}{\cancel{|b|}}\cdot\frac{\cancel{|ab|}}{\cancel{|ax_1+by_1+c|}\sqrt{a^2+b^2}}=$$

$$\boxed{\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

Circonferenza



abbiamo una circonferenza γ di centro C con coordinate α e β. Condizione perché un punto P appartenga alla circonferenza è che il segmento i cui estremi sono rappresentati dal punto stesso e dal centro della circonferenza sia uguale al raggio, cioè:
condizione perché P appartenga a γ $(P\in\gamma)$ è che $\overline{PC}=r$

l'equazione generale di tutte le circonferenze del piano è:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

in cui α è l'ascissa del centro, β è l'ordinata del centro e r è il raggio.
sviluppando l'equazione generale viene:

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2-r^2=0$$
$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+(\alpha^2+\beta^2-r^2)=0$$

cioè questa è una equazione del tipo:

$$(1)\ x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \text{equivalente a} \quad ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0\ (2)$$

confrontando la uno con l'equazione generale di secondo grado nelle variabili x e y si vede che le caratteristiche della 1 sono:

1) è una equazione di secondo grado
2) manca del termine misto o rettangolare (in x e y)
3) i coefficienti delle x^2 e y^2 sono uguali.

poiché ho chiamato $-2\alpha=a$, questo implica $\alpha=-\frac{1}{2}a$, cioè per trovare l'ascissa del centro di una circonferenza, saputa l'equazione, basta moltiplicare per $-\frac{1}{2}$ il coefficiente della x.
allora, poiché ho chiamato $-2\beta=b$, questo implica $\beta=-\frac{1}{2}b$, cioè per trovare l'ordinata del centro di una circonferenza, saputa l'equazione, basta moltiplicare per $-\frac{1}{2}$ il coefficiente della y.
poiché ho chiamato $\alpha^2+\beta^2-r^2=c$, da qui viene che $r^2=\alpha^2+\beta^2-c$, ma io so qual è il valore di α e β, pertanto viene $r^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2-c$, da cui
$r=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}$ e ancora $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$.

Insomma una equazione del tipo

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

ha per grafico una circonferenza che ha:

centro $C\begin{cases} x=-\frac{1}{2}a \\ y=-\frac{1}{2}b \end{cases}$

raggio $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

Osserviamo se è $a^2+b^2-4c<0$ il raggio non è reale. in tal caso si dice che la circonferenza è reale a punti immaginari.
Ma per evitare di dire cose incomprensibili spesso gli autori dicono "no" oppure "impossibile" o roba del genere.

Ogniqualvolta noi troviamo in una equazione i coefficienti delle x^2 e y^2 non unitari, prima di applicare la formula dobbiamo dividere per quel coefficiente cosicché le x^2 e y^2 hanno i coefficienti unitari.

equazione della circonferenza con centro nell'origine e raggio $r=n$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=n^2$$

$$x^2+y^2=n^2$$

es:

$$2x^2+2y^2-\overset{a}{6}x+\overset{b}{5}y-\overset{c}{1}=0$$

il grafico della equazione è una circonferenza perché:

1) l'equazione è di 2° grado.
2) manca il termine misto.
3) i coefficienti della x^2 e y^2 sono uguali.

$$x^2+y^2-\overset{a}{3}x+\overset{b}{\frac{5}{2}}y-\overset{c}{\frac{1}{2}}=0$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{9+\frac{25}{4}+2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{69}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{69}$$

$$C\begin{cases} x=-\frac{1}{2}a=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2}b=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

es:

Problema

Interpretare in un riferimento cartesiano ortogonale l'equazione

$$x^2+y^2\overset{a}{-4}x\overset{b}{-6}y\overset{c}{-12}=0$$

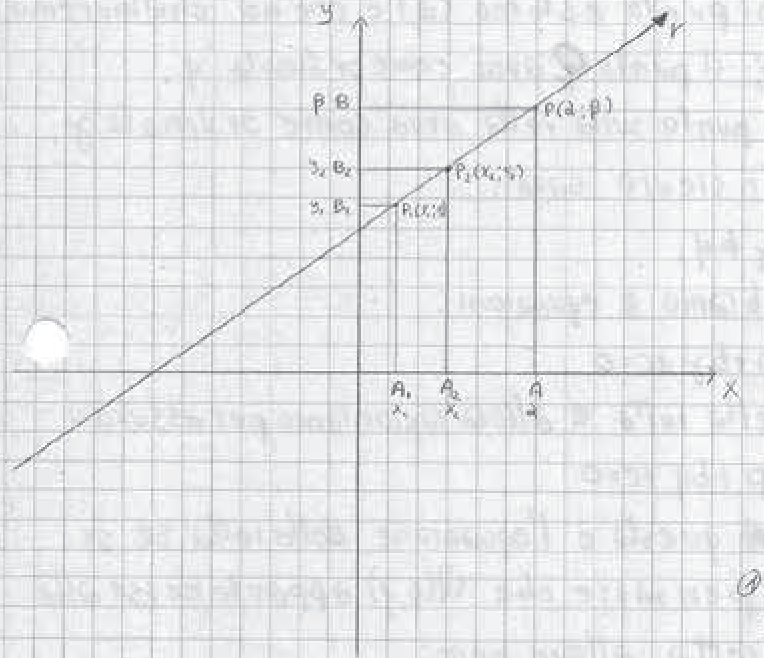
il grafico dell'equazione è una circonferenza perchè:

1) l'equazione è di 2° grado.
2) manca il coefficiente misto.
3) i coefficienti delle x^2 e y^2 sono uguali.

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+48}=\frac{1}{2}\sqrt{100}=\frac{1}{2}\cdot 10=5$$

$$C\begin{cases}x=-\frac{1}{2}a=2\\ y=-\frac{1}{2}b=3\end{cases}$$

Dimostrazione di come una retta sia il grafico di una equazione di 1° grado:



su un riferimento cartesiano è data una retta. vogliamo dimostrare che la suddetta retta sia il grafico di una equazione di 1° grado; sulla retta prendiamo 3 punti a caso $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$ e $P(\alpha;\beta)$. chiamiamo rispettivamente A_1, A_2 & A le ascisse dei punti P_1, P_2 & P e chiamiamo rispettivamente B_1, B_2 & B le ordinate dei punti P_1, P_2 & P. Per il teorema di Talete abbiamo le seguenti proporzioni:

$$\overset{①}{\frac{A_1A}{A_1A_2}}=\overset{②}{\frac{P_1P}{P_1P_2}} \quad \& \quad \overset{③}{\frac{B_1B}{B_1B_2}}=\overset{②}{\frac{P_1P}{P_1P_2}}$$

per la proprietà transitiva, poiché la 1 è uguale alla 2 così come la 3 è uguale alla 2, allora la 1 è uguale alla 3, quindi viene:

$$A_1A : A_1A_2 = B_1B : B_1B_2$$

da cui

$$(\alpha-x_1):(x_2-x_1)=(\beta-y_1):(y_2-y_1)$$

$$(\alpha-x_1)(y_2-y_1)=(x_2-x_1)(\beta-y_1)$$

$(y_2-y_1)\alpha - x_1(y_2-y_1) = (x_2-x_1)\beta - y_1(x_2-x_1)$

$(y_2-y_1)\alpha + (x_1-x_2)\beta + y_1(x_2-x_1) - x_1(y_2-y_1) = 0$

Ponendo:

$y_2-y_1=a$

$x_1-x_2=b$

$y_1(x_2-x_1)-x_1(y_2-y_1)=c$

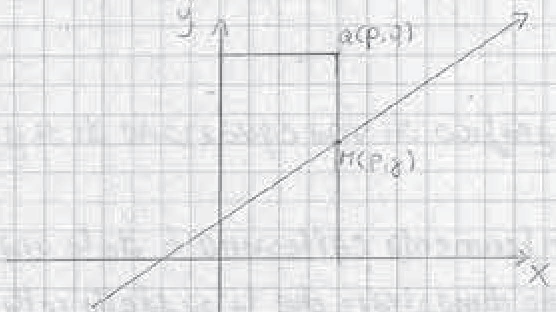
viene:

$a\alpha+b\beta+c=0$

da cui:

$ax+by+c=0$

ora bisogna dimostrare che qualunque punto preso all'esterno di una retta, non soddisfa l'equazione.



abbiamo una retta e un punto esterno ad essa. condotta dal punto la perpendicolare sull'asse x, questa perpendicolare individua sulla retta un punto che avrà la stessa ascissa del punto esterno (Q) e che noi chiameremo p; il punto Q avrà come ordinata q, il punto sulla retta avrà come ordinata γ, di sicuro sarà:

$\gamma \neq q$.

abbiamo 2 equazioni:

$ap+b\gamma+c=0$

della retta e allora ragioniamo per assurdo:

$ap+bq+c=0$

questa è l'equazione della retta se si pensasse che $Q(p,q)$ appartenesse alla retta, allora viene:

$\cancel{ap}+b\gamma+\cancel{c}=\cancel{ap}+bq+\cancel{c}$

$b\gamma=bq$

$\gamma=q$

l'uguaglianza è impossibile in quanto γ deve essere diverso da q, quindi l'equazione non è soddisfatta da un punto preso esterno alla retta.

Postulato della continuità secondo Dedekin:

∈= appartiene
∀= per ogni
∃= esiste

le 2 classi A & B si dicono separate se per ogni x appartenente alla classe A e per ogni y appartenente alla classe B si ha che x>y.

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in A\\ \forall y \in B\end{array}\right\}: x>y$$

postulato:

Date 2 classi separate di segmenti, esiste almeno un segmento K tale che K è maggiore di x e minore di y per ogni x appartenente ad A e per ogni y appartenente a B.

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in A\\ \forall y \in B\end{array}\right\} x>y$$

$\exists k:$

$x<k<y$

Combinazioni lineari:

avendo un sistema normale, cioè un sistema con tante equazioni quante sono le incognite, si arriva da esso ad un altro sistema equivalente normale con il numero delle incognite abbassato e quindi semplificato mediante una o più combinazioni lineari con alcuni parametri:

es:

$$\begin{cases}4x+2y+z=-3 \\ x+y+z=0 \\ 3x+3y+z=-4\end{cases}\quad\begin{array}{|l}2\\3\\5\end{array}$$

$56x+22y+10z=-26$

$28x+11y+5z=$

$$\begin{cases} 4x+2y+z=-3 \\ x+y+z=0 \\ 9x+3y+z=-4 \end{cases} \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -8x-2y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -4x-y=2 \end{cases}$$

$-x=-1 \Rightarrow x=1$

$y=-6$

$z=5$

$$\begin{cases} 2x-z=-3 \\ -6x+2z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-z=-3 \\ -3x+z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \\ z=5 \end{cases}$$

Dimostrazione:

① $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \left|\begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix}\right.$ per supposizione si ha $\begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \end{cases}$

$a\cdot f(x,y)+b\cdot g(x,y)=0$

$c\cdot f(x,y)+d\cdot g(x,y)=0$

$a\cdot f(x_1y_1)+b\cdot g(x_1y_1)=a\cdot 0+b\cdot 0=0$

$c\cdot f(x_1y_1)+d\cdot g(x_1y_1)=c\cdot 0+d\cdot 0=0$

$a\cdot f(x,y)+b\cdot g(x,y)=0 \,|\, d \quad c$

$c\cdot f(x,y)+d\cdot g(x,y)=0 \,|\, -b \quad -a$

$(ad-bc)\,f(x,y)=0$

supponiamo $ad-bc\neq 0$

allora $(bc-ad)\,f(xy)=0$

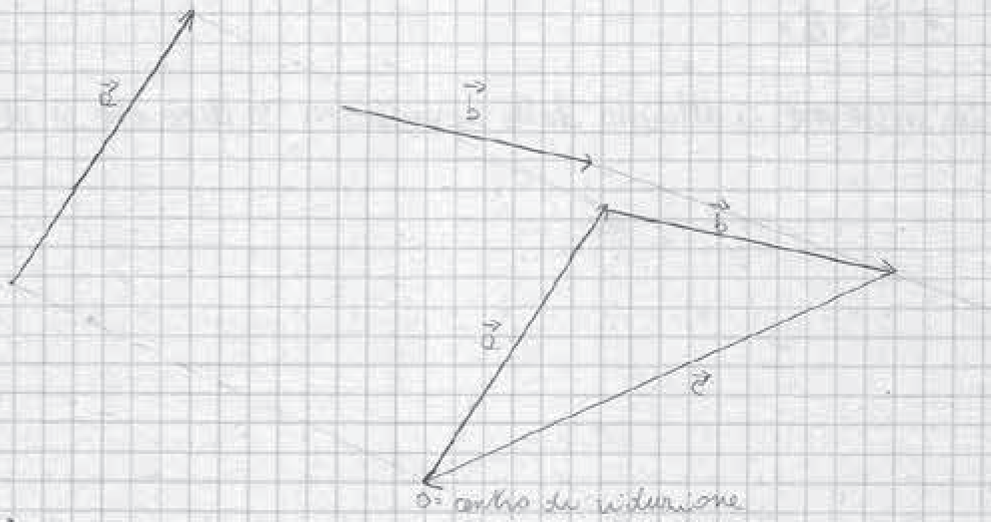
$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Vettori:

2 segmenti come questi, che hanno la stessa lunghezza, lo stesso verso e sono paralleli si dicono equipollenti.

Un vettore è l'insieme di un segmento orientato e di tutti i suoi equipollenti.
Si dice anche che un vettore è una classe di equivalenza.

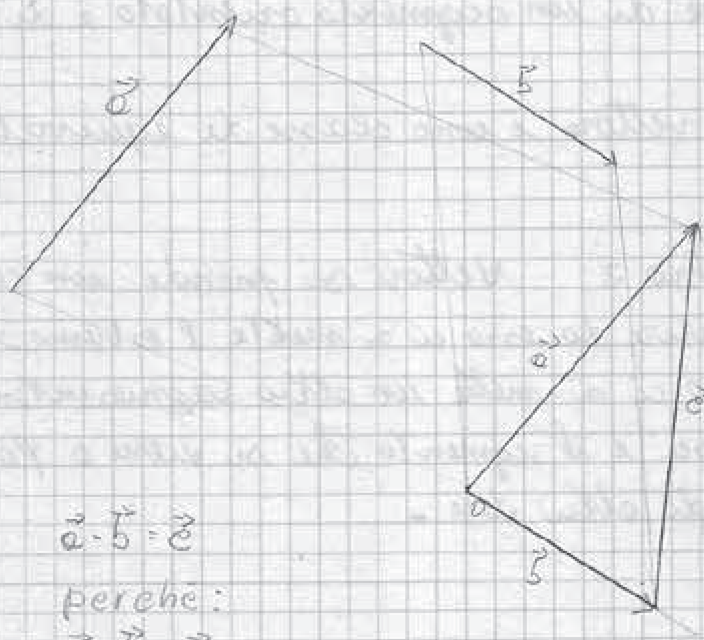
Somma:
per fare la somma fra 2 vettori si prende un centro di riduzione e a partire da esso ci si mette l'estremo del vettore, all'altro estremo ci si mette un altro rappresentante del vettore iniziale, si unisce e il segmento che si viene a formare è il vettore somma tra gli altri due.
es:



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

differenza:

per fare la differenza fra due vettori si prende ancora un centro di riduzione e da esso si riportano i 2 estremi dei vettori, congiungendo e mettendo il verso del minuendo il vettore che si viene a trovare è la differenza fra i 2 dati poiché sommando questo al sottraendo si ridà il minuendo.



$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

perché:

$\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$

quando dentro un insieme si attuano delle operazioni, si dice che si sta strutturando quell'insieme.

Come trovare l'equazioni delle rette (2) tangenti ad una circonferenza di equazione data e passanti per un punto dato.

abbiamo la circonferenza di equazione

$x^2+y^2=25$. quindi sappiamo che ha il centro nell'origine e raggio 5.

Dobbiamo trovare l'equazioni delle tangenti a questa retta e passanti per $P(8,0)$.

si impone il passaggio per P, sapendo che le tangenti non sono parallele all'asse delle y.

$y=mx+n$ equazione di tutte le rette del piano escluse quelle parallele all'asse y.

$8m+n=0$

$n=-8m$ condizione perchè la retta passi per P.

a questo punto si dà l'informazione di passare per P all'equazione "generale".

$y=mx+n \Rightarrow y=mx-8m$ equazioni del fascio di rette passanti per P escluso quello parallelo all'asse y.

si fa ora il sistema fra l'equazione della circonferenza con l'equazione trovata:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=mx-8m \end{cases}$$

metodo di sostituzione

$x^2+(mx-8m)^2=25$ equazione che con le sue soluzioni dà le ascisse dei punti d'incontro fra la circonferenza e la retta generica.

$x^2+m^2x^2-16m^2x+64m^2-25=0$

$(1+m^2)x^2-16m^2x+64m^2-25=0$

$\frac{\Delta}{4}=64m^4-(1+m^2)(64m^2-25)=0$

ho imposto al discriminante di essere uguale a zero

$64m^4-64m^2+25-64m^4+25m^2=0$

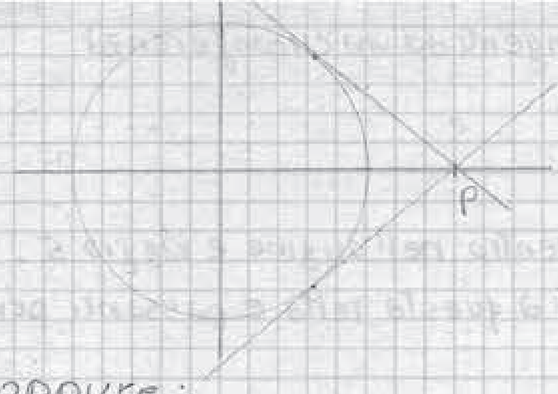
$-39m^2+25=0$

$39m^2=25$

$m=\pm\sqrt{\frac{25}{39}}=\pm\frac{5\sqrt{39}}{39}$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{-5\sqrt{39}}{39} \\ n_1 &= \frac{40\sqrt{39}}{39} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=-\frac{5}{39}\sqrt{39}\,x+\frac{40}{39}\sqrt{39}$$ equazione della tangente

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= \frac{5\sqrt{39}}{39} \\ n_2 &= -\frac{40}{39}\sqrt{39} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y=\frac{5}{39}\sqrt{39}\,x-\frac{40}{39}\sqrt{39}$$ equazione della tangente



oppure:

sempre con lo stesso esercizio di prima si procede in questo modo:

si impone il passaggio per P:

$n = -8m$ condizione perchè la retta passi per P

poi si prende l'equazione "generale", e si sostituisce n come sempre, ma si mette in forma implicita, poi si procede col fare la distanza del fascio di rette con centro in P dal centro imponendo al tutto di essere uguale al raggio:

$mx - y - 8m = 0$ equazione del fascio di rette di centro P escluso quello parallelo all'asse y

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$a = m$

$b = -1$

$c = -8m$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{array}\right\}$ perchè $O(0,0)$

quindi:

$$\frac{|8m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$$ condizione perchè le rette del fascio di centro P sono tangenti alla circonferenza e quindi uguali al raggio.

$|8m| = 5\sqrt{m^2+1}$

equazione irrazionale $\Rightarrow 64m^2 = 25m^2 + 25$

$33m^2 = 25$

$m = \pm \frac{5\sqrt{33}}{33}$

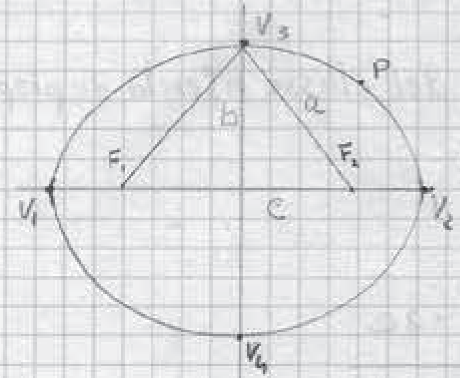
$\left.\begin{array}{l} m_1 = -\frac{5\sqrt{33}}{33} \\ n_1 = \frac{40\sqrt{33}}{33} \end{array}\right. \Rightarrow y = -\frac{5\sqrt{33}}{33}x + \frac{40}{33}\sqrt{33}$ equazione della tangente

$\left.\begin{array}{l} m_2 = \frac{5\sqrt{33}}{33} \\ n_2 = -\frac{40\sqrt{33}}{33} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5\sqrt{33}}{33}x - \frac{40}{33}\sqrt{33}$ equazione della tangente.

Ellisse

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Generalmente si chiama:



$\overline{F_1F_2} = 2c$

$\overline{V_1V_2} = 2a$

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

$\overline{V_3V_4} = 2b$

$\overline{V_1V_2}$ è detto asse focale

$\overline{V_3V_4}$ è detto asse afocale.

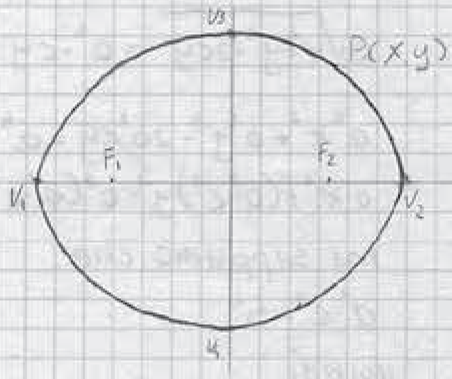
Vale il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo $F_1V_3F_2$:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$

equazione dell'ellisse riferita ai propri assi di simmetria e con i fuochi sull'asse x:

$F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$



$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \qquad P(x, y)$

$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$\overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2x^2 - 2a^{\cancel{2}}cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2\cancel{a}cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ma sappiamo che

$$a^2 - c^2 = b^2$$

quindi:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

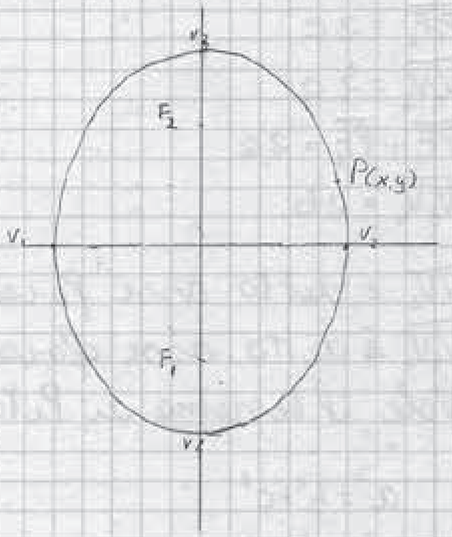
dividiamo ambo i membri per a^2b^2.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

equazione dell'ellisse riferita ai propri assi di simmetria e con i fuochi sull'asse y.

$F_1(0,-c)$

$F_2(0,c)$



$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$$

$$\overline{PF_1}=\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

$$\overline{PF_2}=\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$

$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a$$

$$\sqrt{x^2+y^2+2cy+c^2}=2a-\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2cy+\cancel{c^2}=4a^2-4a\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}+\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2cy+\cancel{c^2}$$

$$a\sqrt{x^2+y^2-2cy}=a^2-cy$$

$$a^2x^2+a^2y^2-2a^2\cancel{c}y=a^4-2a^2\cancel{c}y+c^2y^2$$

$$ax^2+(a^2-c^2)y^2=a^2(a^2-c^2)$$

ma sappiamo che:

$$a^2-c^2=b^2$$

quindi

$$ax^2+b^2y^2=a^2b^2$$

dividiamo tutto per a^2b^2:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$\frac{2c}{2a}$ = eccentricità = e

$0<e<1$

quando $2c=2a$ il rapporto è 1 e l'ellisse diventa un segmento contato 2 volte per cui il perimetro è $4a$.

Quando c è uguale a zero l'ellisse diventa una circonferenza

Come sapere se le radici di una equazione sono esterne o interna ad un numero dato senza risolvere l'equazione:

si ha l'equazione

$x^2 - 6x + 5 = 0$

e, dato il numero 2, vogliamo vedere se questo numero è esterno o interno alla intervallo delle radici:

dapprima si fa il Δ, in questo caso il $\frac{\Delta}{4}$:

$\frac{\Delta}{4} = 9 - 5 = 4$

4 è >0, questo serve solo a vedere se esistono radici reali

ora si fa l'$f(2)$, cioè si sostituisce "2" alla x:

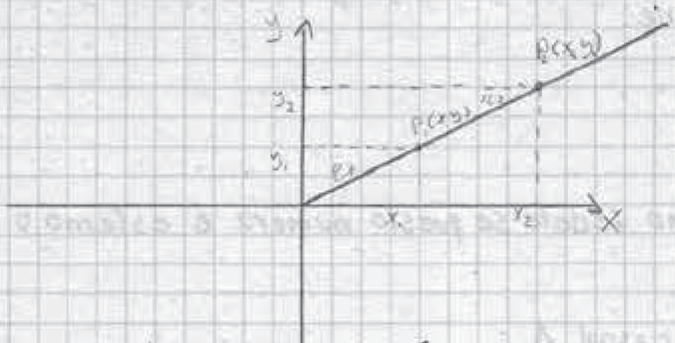
$f(2) = 4 - 12 + 5 = -3$

-3 è <0, ora si confronta il -3 con il coefficiente di A: essendo questo >0, allora -3 è interno all'intervallo delle radici:

$\left.\begin{array}{l} f(2) = -3 < 0 \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "2" è interno all'intervallo delle radici.

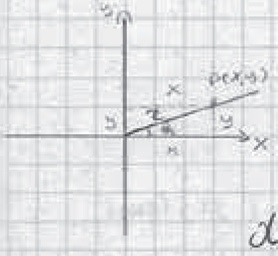
per maggiori esemplificazioni guardare a pag 38, 39; inoltre per i sistemi formati da una limitazione e da una equazione parametrica di 2° grado guardare a pag 41, 42, 43, 47, 48.

Funzioni circolari dirette dell'angolo:



è dato un angolo, il cui lato uno è con il vertice nell'origine e sul semiasse positivo delle ascisse. Sul secondo lato dell'angolo prendiamo 2 punti: $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e chiamiamo rispettivamente r_1 e r_2 le loro distanze dall'origine.
a questo punto noi possiamo calcolare le FUNZIONI CIRCOLARI DELL'ANGOLO.
esse sono: coseno (cos), seno (sen) e tangente (tg).
Per calcolarle basta un solo punto, poiché dato un angolo, escludendo l'origine, queste funzioni sono costanti per ogni punto naturalmente del secondo lato:

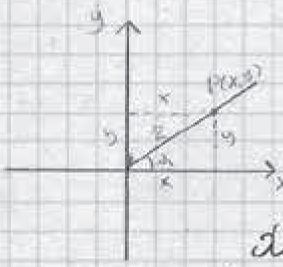
Coseno



coseno α = cos $\alpha = \frac{x}{r}$

Il coseno di un angolo orientato è il rapporto fra l'ascisse di un qualunque punto preso sul secondo lato e distinto dal vertice e la sua distanza dal vertice quando l'angolo è posto in un riferimento cartesiano ortogonale con il vertice nell'origine e il primo lato coincidente col semiasse positivo delle ascisse.

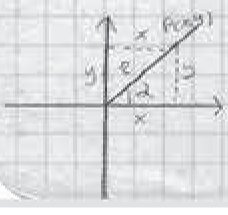
Seno



seno α = sen $\alpha = \frac{y}{r}$

Il seno di un angolo orientato è il rapporto fra l'ordinata di un qualunque punto preso sul secondo lato e distinto dal vertice e la sua distanza dal vertice quando l'angolo è posto in un riferimento cartesiano ortogonale con il vertice nell'origine e il primo lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse.

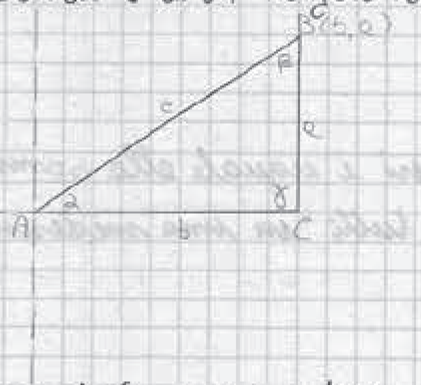
Tangente



tangente α = tg $\alpha = \frac{y}{x}$

La tangente di un angolo orientato è il rapporto fra l'ordinata e l'ascisse di un qualunque punto preso nel secondo lato e distinto dal vertice quando l'angolo è posto in un riferimento cartesiano ortogonale con il vertice nell'origine e il primo lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse.

Risolvezione di un triangolo rettangolo.



per definizione si ha:

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha$: In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto fra l'ipotenusa e il coseno dell'angolo da essi formato.

$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$ perché angoli complementari. Quindi:
$b = c \cdot \operatorname{sen}\beta$. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto fra l'ipotenusa e il seno dell'angolo opposto al cateto considerato.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$: In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto considerato.

Definizione di Logaritmo:

dato un numero b positivo e diverso da 1 e un numero m positivo il logaritmo di m in base b è l'esponente che va dato a b per ottenere m.

$\log_b m = a \Leftrightarrow b^a = m$

Teoremi sui logaritmi:

teorema 1: il logaritmo del prodotto di più numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori calcolati tutti in una medesima base.

si tratta cioè di dimostrare che

$\lg_b m \cdot n = \lg_b m + \lg_b n$

$\lg_b m = x \Rightarrow b^x = m$ (1)

$\lg_b n = y \Rightarrow b^y = n$ (2)

$\lg_b m \cdot n = z \Rightarrow b^z = m \cdot n$ (3)

moltiplichiamo la (1) con la (2):

$b^x \cdot b^y = m \cdot n$

$b^{x+y} = m \cdot n$

per transitività si ha:

$b^z = b^{x+y}$ (4)

siccome b, per definizione di logaritmo, è positivo e diverso da 1, dalla (4) si deduce:

$z = x+y$

cioè

$\lg_b m \cdot n = \lg_b m + \lg_b n$

È banale come il teorema si possa estendere ad un qualunque numero di fattori.

teorema 2: il logaritmo del quoziente fra 2 numeri è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore.

considerıamo l'identità:

$$\frac{m}{n} \cdot n = m$$

Per il teorema precedente abbiamo:

$$lg_b \frac{m}{n} \cdot n = lg_b m$$

$$lg_b \frac{m}{n} + lg_b n = lg_b m$$

$$\boxed{lg_b \frac{m}{n} = lg_b m - lg_b n.}$$

teorema 3: il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto fra l'esponente e il logaritmo della [redacted] base della potenza

si tratta di dimostrare che

$$lg_b m^n = n \cdot lg_b m$$

$$lg_b m = x \Rightarrow b^x = m \quad (1)$$

eleviamo ad n ambo i membri della (1):

$$(b^x)^n = m^n$$

$$b^{nx} = m^n \quad (2)$$

$$lg_b m^n = y \Rightarrow b^y = m^n$$

confrontandola con la (2) per transitività si ha:

$$b^y = b^{nx} \quad (3)$$

siccome b è positivo e diverso da 1 dalla (3) si ha:

$$y = nx$$

cioè

$$lg_b m^n = n \cdot x$$

ovvero

$$lg_b m^n = n \cdot lg_b m$$

Corollario:

$$lg_b \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \cdot lg_b m$$

cioè il logaritmo di un radicale è uguale al logaritmo del radicando diviso per l'indice, perché sarebbe:

$$lg_b \sqrt[n]{m} = lg_b m^{\frac{1}{n}}$$

Cambiamento di base in un sistema di logaritmi.

si tratta cioè di dimostrare che:

$$lg_k m = \frac{lg_b m}{lg_b k}$$

$$lg_k m = x \Rightarrow k^x = m \quad (1)$$

calcoliamo il logaritmo in base b di ambo i membri della (1):

$$lg_b k^x = lg_b m$$

in base al terzo teorema si ha:

$$x \cdot lg_b k = lg_b m$$

$$x = \frac{lg_b m}{lg_b k}$$

Passaggio dalla scrittura normale alla convenzionale e viceversa:

per passare dalla scrittura normale alla convenzionale di un numero negativo si toglie il − davanti, si aumenta di una unità la parte intera e il − gli si mette sopra; mentre alla parte decimale si fa il complemento a 10 dell'ultima cifra e il complemento a 9 di tutti gli altri.

es:

$-7,16084 = \bar{8},83916$ (il $\bar{8}$ si legge 8 col meno sopra)

Per passare dalla scrittura convenzionale alla normale di un numero negativo si toglie il − sopra, si diminuisce di una unità la parte intera e il − gli si mette accanto; mentre alla parte decimale si fa il complemento a 10 dell'ultima cifra e il complemento a 9 di tutte le altre.

(13)

es: $\bar{4},316 = -4 + 0,316 = -3,684$.

Teorema:

In un qualunque sistema di logaritmi se si moltiplica un numero per una potenza intera della base dei logaritmi, il logaritmo cambia solo nella caratteristica (aumentata dell'esponente della potenza della base per cui ho moltiplicato) mentre la mantissa resta invariata.

$\lg_b m = i,d$

moltiplichiamo per una potenza intera della base:

sia n intero:

$\lg_b m \cdot b^n = \lg_b m + \lg_b b^n = i,d + n \cdot \lg_b b = (i+n),d$

es:

$\lg_{10} 7 = 0,84510$.

$\lg_{10} 70 = 1,84510$.

$\lg_{10} 700 = 2,84510$.

$\lg_{10} 7000 = 3,84510$.

Esempi:

Calcolare il logaritmo in base 10 di 48376.

$\lg_{10} 48376 = 4,\dots$

M 48370 (1)	68458	(4)
M 48376 (2)		(6)
M 48380 (3)	68467	(5)

$(1)-(3) = 10$

$(4)-(5) = 9$

$(1)-(2) = 6$

$(4)-(6) = x$

$10 : 9 = 6 : x$

$x = 5,4 = 5$

$\lg_{10} 48376 = 4,68463$.

per trovare la mantissa di un numero superiore alla capacità delle tavole occorre trovare le mantisse dei numeri ad esso più vicini con vari zeri, in modo che, preso il numero senza contare gli zeri, esso rientri nelle tavole. Poi occorre fare l'interpolazione lineare, da cui si troverà un certo numero, questo va aggiunto alla mantissa del numero preso precedente con gli zeri per ottenere il logaritmo desiderato.

Calcolare il logaritmo in base 10 del numero 483768:

$lg_{10}\ 483768 = 5,\ldots$

M 483700 (1)   68458 (4)

M 483768 (2)   (6)

M 483800 (3)   68467 (5)

$(1)-(3) = 100$

$(4)-(5) = 9$

$(1)-(2) = 68$

$(4)-(6) = X$

$100 : 9 = 68 : X$

$X = 6,12$

sulle tavole sono andato a vedere nelle P.P con differenza a 9 il numero 6 che è 5,4; poi sempre nello stesso momento e nella stessa colonna sono andato a vedere ~~a~~ il numero 8 e l'ho diviso per 100, dopodiché avendo trovato $7,2 \Rightarrow 0,72$, l'ho sommati:

$5,4 + 0,72 = 6,12$, come nell'interpolazione lineare da aggiungere alla mantissa (4).

Logaritmi di numeri compresi fra 0 e 1:

la caratteristica del logaritmo di un numero compreso fra 0 e 1 è uguale al numero degli zeri (precedenti il numero caratteristico) col meno sopra:

es: $lg_{10}\ 0,0006452$ ha come caratteristica $\bar{4}$.

$lg_{10}\ 0,0034052$ ha come caratteristica $\bar{3}$.

Data la mantissa, come trovare il numero da cui deriva:

Trovare il numero logaritmo, cioè il numero il cui logaritmo è 2,84671.

Innanzitutto il 2 della caratteristica indica di quanti numeri interi, cioè prima della virgola, è il numero.

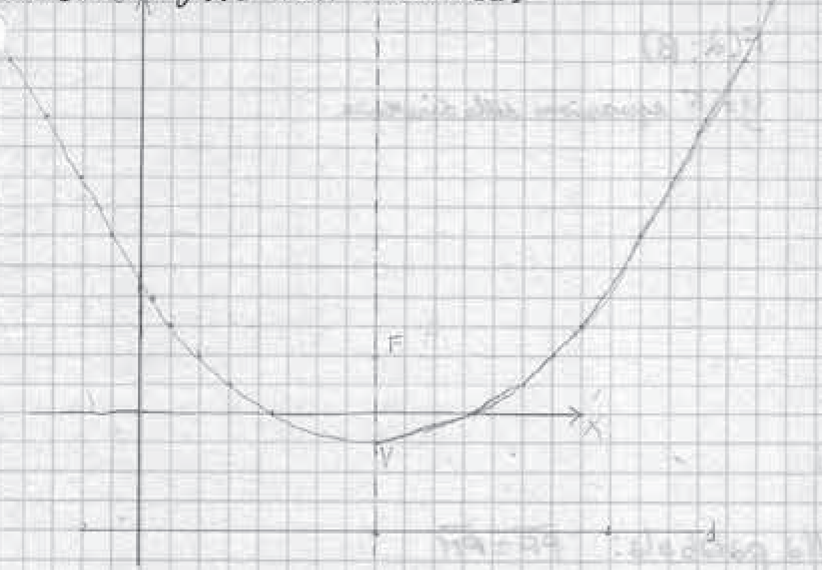
$Nlg\ 2,84671 = 702,6$

$Nlg\ 2,84675 =$ per ora sappiamo solo il numero della parte intera grazie alla caratteristica.

si va a cercare nelle tavole la mantissa 84675: noi troviamo solo 84671, allora si va a guardare la differenza fra il più vicino e la mantissa dopo (in questo caso 84677), poi si va a guardare nelle P.P. dedicate alla differenza 6 cercando nella colonna di destra (con i numeri in nero) il numero approssimativo per difetto della differenza fra la prima mantissa trovata con la mantissa cercata. Si arrotonda e si pone accanto al numero trovato.

La Parabola

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da ~~p~~un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice.



equazione della parabola:

$y = ax^2 + b\cancel{x}x + c$

$\Delta = b^2 - 4ac$

se "a" è maggiore di zero, la parabola è posta in un riferimento cartesiano ortogonale, come nella figura; al contrario, se "a" è minore di zero, la parabola è posta, sempre in un riferimento cartesiano, "capovolta".

coordinate del vertice e del fuoco:

$$V\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases} \qquad F\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = \dfrac{1-\Delta}{4a} \end{cases}$$

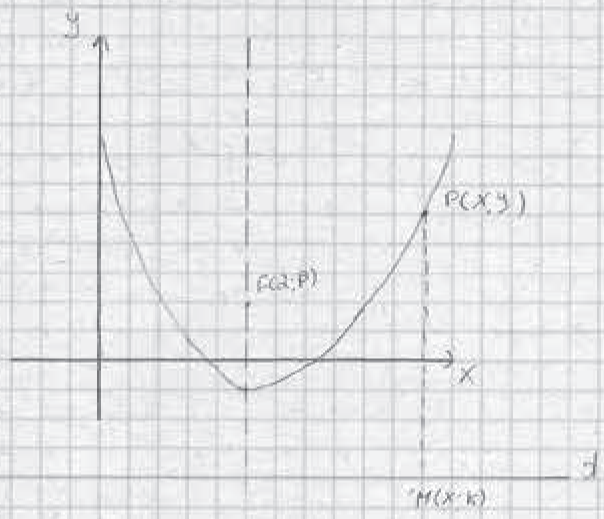
equazione dell'asse di simmetria

$$x = -\frac{b}{2a}$$

equazione della direttrice

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

Dimostrazione



$F(\alpha;\beta)$

$y = k$ equazione della direttrice

condizione perché P appartenga alla parabola: $\overline{PF} = \overline{PM}$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = |y-k|$$

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+\cancel{y^2}-2\beta y+\beta^2 = \cancel{y^2}-2ky+k^2$$

$$(2k-2\beta)y = -x^2+2\alpha x+k^2-\alpha^2-\beta^2$$

$$y = \frac{1}{2\beta-2k}x^2+\frac{2\alpha}{2k-2\beta}x+\frac{k^2-\alpha^2-\beta^2}{2k-2\beta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\beta-2k} = a \\[2ex] \dfrac{2\alpha}{2k-2\beta} = b \\[2ex] \dfrac{k^2-\alpha^2-\beta^2}{2k-2\beta} = c \end{cases}$$

$$y = ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\beta-2k} = a \\[2ex] \dfrac{-2\alpha}{2\beta-2k} = b \\[2ex] -\dfrac{k^2-\alpha^2-\beta^2}{2\beta-2k} = c \end{cases}$$

r17

$$\begin{cases} 2a\beta - 2aK - 1 = 0 \\ 2b\beta - 2bK + 2\alpha = 0 \\ 2c\beta - 2cK + K^2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{cases} \left| \begin{matrix} b \\ -a \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$-b + 2a\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\begin{cases} 2a\beta - 2aK - 1 = 0 \\ 2c\beta - 2cK + K^2 - \frac{b^2}{4a^2} - \beta^2 = 0 \end{cases}$$

$$2a\beta - 1 = 2aK$$

$$K = \frac{2a\beta - 1}{2a}$$

$$2c\beta - \frac{2ac\beta - c}{a} + \frac{4a^2\beta^2 - 4a\beta + 1}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} - \beta^2 = 0$$

$$\cancel{8a^2c\beta} - \cancel{8a^2c\beta} + 4ac - 4a\beta + 1 - b^2 = 0$$

$$4ac + 1 - b^2 = 4a\beta$$

$$\beta = \frac{1 - \Delta}{4a}$$

$$K = \frac{1-\Delta}{4a} - \frac{1}{2a} = \frac{1-\Delta}{4a} - \frac{2}{4a} = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

coordinate del vertice:

$$V \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = \frac{1 - \Delta - 1 - \Delta}{4a} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

equazione della parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse x:

$x = ay^2 + by + c$

coordinate del vertice:

$$V \begin{cases} x = -\frac{\Delta}{4a} \\ y = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

coordinate del fuoco:

$$F \begin{cases} x = \frac{1-\Delta}{4a} \\ y = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

equazione dell'asse di simmetria:

$y = -\frac{b}{2a}$

equazione della direttrice

$x = -\frac{1+\Delta}{4a}$

equazioni esponenziali: (per esercizi vedere exp pag. 73, 80)

una equazione si chiama esponenziale quando l'incognita compare all'esponente di una potenza

Es n: 56 pag 643

È dato un fascio di circonferenze di equazione:

$$x^2+y^2-(K-1)x-(K-2)y+K-5=0$$

a) Provare che tale equazione rappresenta una circonferenza per ogni valore di K.

b) Trovare per quale valore di K le circonferenze del fascio passano per l'origine degli assi

c) Determinare i punti base, A e B, del fascio.

d) Dimostrare che al variare di K i centri delle circonferenze del fascio appartengono tutti a una stessa retta e di questa retta si determini l'equazione.

a) Qualunque valore si attribuisca a K l'equazione rimane sempre di 2° grado, ~~manca~~ continua a mancare il termine misto e inoltre i coefficienti della x^2 e y^2 rimangono uguali.

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(K-1)^2+(K-2)^2-4(K-5)}=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{K^2-2K+1+K^2-4K+4-4K+20}=\frac{1}{2}\sqrt{2K^2-10K+25}.$$

$$2K^2-10K+25=0$$

$$K=\frac{5\pm\sqrt{25-50}}{2}=\text{no}$$

Quindi, essendo il raggio mai immaginario, la circonferenza esiste sempre.

b) Affinché la circonferenza passi per l'origine occorre che il C sia zero: quindi $K=5$

e l'equazione sarebbe: $x^2+y^2-4x-3y=0$

c) $x^2+y^2-(K-1)x-(K-2)y+K-5=0$

pongo

$K=K_1$

$K=K_2$

$K_1\neq K_2$

$$\begin{cases} x^2+y^2-(K_1-1)x-(K_1-2)y+K_1-5=0 & \Big| \ 1 \\ x^2+y^2-(K_2-1)x-(K_2-2)y+K_2-5=0 & \Big| -1 \end{cases}$$

$$(K_2-K_1)x+(K_2-K_1)y-(K_2-K_1)=0$$

$$\begin{cases} x+y-1=0 \Rightarrow y = 1-x \\ x^2+(1-x)^2-(K_2-1)x-(K_2-2)(1-x)+K_2-5=0 \end{cases}$$

$$x^2+x^2-2x+1-\cancel{K_2}x+x-\cancel{K_2}+\cancel{K_2}x+2-2x+\cancel{K_2}-5=0$$

$$2x^2-3x-2=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}\quad x_1=-\frac{1}{2}\quad x_2=2$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}\qquad A\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}\qquad B(2,-1)$$

3:

$$x^2+y^2-(K-1)x-(K-2)y+K-5=0$$

pongo $K=1$

$$x^2+y^2+y-4=0$$

$$C_1\begin{cases} x=-\frac{1}{2}a=0 \\ y=-\frac{1}{2}b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

pongo $K=3$

$$x^2+y^2-2x-y-2=0$$

$$C_2\begin{cases} x=-\frac{1}{2}a=1 \\ y=-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$y: mx+n$

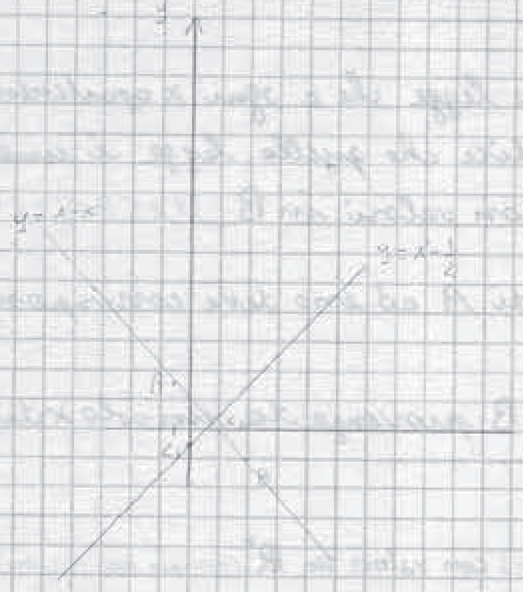
$$\begin{cases} (y+\frac{1}{2})=mx & \text{condizione perché la retta passi per } C_1 \\ (y-\frac{1}{2})=m(x-1) & \text{condizione perché la retta passi per } C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=mx-\frac{1}{2} \\ y=mx-m+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cancel{mx}-m+\frac{1}{2}=\cancel{mx}-\frac{1}{2}$$

$$m=1$$

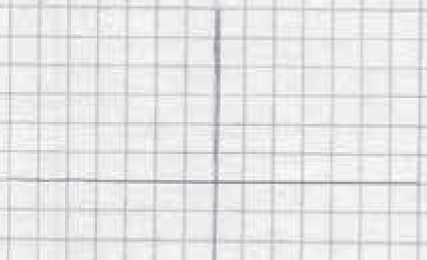
$y=x-\frac{1}{2}$ equazione della retta che passa per C_1 e C_2.



Centro generico:

$$(C)\begin{cases} x = \dfrac{K-1}{2} & (1) \\ y = \dfrac{K-2}{2} \end{cases}$$

equazioni parametriche della curva [illegible]



K	x	y
7	3	$\frac{5}{2}$
4	$\frac{3}{2}$	1
0	$-\frac{1}{2}$	-1
-4	[illegible]	-3
5	2	$\frac{3}{2}$

dalla (1)

$2x = K - 1$

$K = 2x + 1$

$$y = \frac{2x + 1 - 2}{2}$$

$$y = \frac{2x - 1}{2}$$

$$y = x - \frac{1}{2}$$

equazione cartesiana della retta formata dai centri mediante l'eliminazione del parametro dalle equazioni parametriche.

Quando una curva ammette equazioni parametriche razionali, la curva stessa si chiama razionale.

Dall'esercizio fatto possiamo affermare che la retta è una curva razionale.

L'asse radicale è sempre perpendicolare all'asse centrale.

Le funzioni

Dati due insiemi A e B se esiste una legge che a ogni x appartenente ad A si deduce un certo y appartenente a B si dice che quella legge è una funzione (applicazione, mappa) definita in A con valori in B. $(\forall x \in A \Rightarrow y \in B)$

È bene sottolineare che fissato un x di A ad esso deve corrispondere uno ed uno solo y di B.
Non è necessario però che un y di B provenga da un solo x di A.

Esempio:
consideriamo la funzione definita in $\mathbb{R}$ (numeri reali) con valori in $\mathbb{R}^+$ (numeri reali positivi)

$$y = x^2$$

x	y
0	0
2	4
-2	+4
$\sqrt{3}$	3

consideriamo la funzione definita in $\mathbb{R}$ con valori in $\mathbb{R}$

$$y = x^3$$

x	y
0	0
2	8
-2	-8
1	1
-1	-1

in queste funzione ad ogni x corrisponde un solo y (e questo è obbligatorio), però succede anche che ogni y proviene da un solo x. Per quest'ultima ragione la funzione si dice iniettiva o più semplicemente iniezione.
Nel primo esempio invece $(y = x^2)$ è sempre vero sì, come d'obbligo, che ad ogni x corrisponde un solo y, ma come si scorge dalla tabella non è vero che ogni y proviene da un solo x (il 3 per esempio proviene sia dal $\sqrt{3}$ che dal $-\sqrt{3}$). Allora tale funzione non è iniettiva.

Una funzione definita in $\mathbb{N}$ e con valori in $\mathbb{R}$ si chiama successione

Progressione aritmetica:
le progressioni aritmetiche sono successioni che hanno costante la differenza fra un termine e il precedente. Tale costante si chiama ragione o differenza e si indica con d.

es:

$\div$ 5 8 11 14 17 20 23 26 29 32 35.....

$\div\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11} \ldots\ldots a_n$

Come calcolare il termine m-esimo sapendo la ragione e un altro termine:

$$a_m = a_n + (m-n)d \qquad \Rightarrow \quad d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$$

Esempio: IN UNA PROGRESSIONE ARITMETICA (÷) LA RAGIONE È 3, IL QUARTO TERMINE È 14; CALCOLARE IL NONO TERMINE:

$$\div \begin{cases} d = 3 \\ a_4 = 14 \\ a_9 = x \end{cases}$$

$$a_9 = a_4 + (9-4)d = 14+15 = 29$$

Esempio: IN UNA PROGRESSIONE ARITMETICA LA RAGIONE È 3. IL DECIMO TERMINE È 32; CALCOLARE IL SECONDO TERMINE:

$$\div \begin{cases} d = 3 \\ a_{10} = 32 \\ a_2 = x \end{cases}$$

$$a_2 = a_{10} + (2-10)3 = 32-24 = 8.$$

Esercizio: IN UNA PROGRESSIONE ARITMETICA IL SECONDO TERMINE È 8 E IL QUINTO È 17; CALCOLARE LA RAGIONE:

Se $a_m = a_n + (m-n)d$

$$d = \frac{a_m - a_n}{m-n} = \frac{a_5 - a_2}{5-2} = \frac{17-8}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Come calcolare la somma dei primi n numeri in una progressione aritmetica

$$\div\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{oppure} \quad \div\ S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$\underline{a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots\ldots\ldots + (a_1 + a_n)$$

ho tolto la ragione a a_2 (che è diventato a_1) e l'ho aggiunta ad a_{n-1} (che è diventato a_n) e l'ho fatto per tutti gli altri escluso a_1 e a_n

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Esempio: CALCOLARE LA SOMMA DEI PRIMI 8 TERMINI IN UNA PROGRESSIONE ARITMETICA SAPENDO CHE LA RAGIONE È 3 E IL SETTIMO TERMINE È 23.

$$S_8 = \frac{(a_1 + a_8)8}{2}$$

$$a_1 = a_7 + (1-7)d = 23 - 18 = 5$$

$$a_8 = 23 + 3 = 26$$

$$S_8 = \frac{(5+26)8}{2} = 124.$$

Progressione geometrica:

una progressione geometrica è una successione dove è costante il rapporto fra un termine e il precedente. Tale rapporto si chiama ragione o quoziente della progressione e si indica con q.

3 6 12 24 48 96 192 384 768

$\div\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9 \ldots\ldots a_n$

come calcolare il termine n-esimo sapendo un termine m-esimo e la ragione:

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

Esempio: CALCOLARE IL SESTO TERMINE DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA (÷) SAPENDO CHE LA RAGIONE È 2 E IL TERZO TERMINE È 12

$$\div \begin{cases} a_6 = x \\ a_3 = 12 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$a_6 = a_3 \cdot q^{6-3} = 12 \cdot 2^3 = 12 \cdot 8 = 96$$

Esempio: CALCOLARE IL SECONDO TERMINE DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA SAPENDO CHE LA RAGIONE È 2 E L'OTTAVO TERMINE 384.

$$\div \begin{cases} a_2 = x \\ q = 2 \\ a_8 = 384 \end{cases}$$

$$a_2 = a_8 \cdot q^{2-8} = 384 \cdot 2^{-6} = 384 \cdot \frac{1}{64} = 6$$

Esempio: CALCOLARE IL SETTIMO TERMINE DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA SAPENDO CHE LA RAGIONE È $\frac{1}{2}$ E IL PRIMO TERMINE È 8.

$$\div \begin{cases} a_7 = x \\ a_1 = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 8 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{8}$$

$$\div\ 8\quad 4\quad 2\quad 1\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{8}\quad \frac{1}{16}\quad \frac{1}{32}\quad \frac{1}{64} \ldots\ldots$$

COME calcolare la somma dei primi n termini di una progressione geometrica:

$$\div\ S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1 \quad \text{oppure} \quad \div\ S_n = \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot a_1$$

DIMOSTRAZIONE:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$$

in cui:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q$ e così via.

inoltre

$a_n = a_{(n-1)} q$ quindi:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \ldots\ldots + a_{(n-1)} q$$

raccolgo q e viene:

$$S_n = a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_{n-1})q$$

ma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_{n-1}$ è uguale alla somma dei termini meno l'ultimo, quindi:

$$S_n = a_1 + (S_n - a_n)q.$$

consideriamo l'uguaglianza come una equazione nell'incognita S_n:

$$S_n = a_1 + S_n \cdot q - a_n \cdot q$$

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$$

$$(1-q) S_n = a_1 - a_n \cdot q$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q}$$

ma $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ in questo caso, quindi viene:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q}{1-q}.$$

$a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 q^n$ e così viene:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$$

$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1$ avendo raccolto a_1.

come calcolare il prodotto dei primi n termini in una progressione geometrica.

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

La circonferenza rettificata:

Lemma: prefissato un segmento arbitrario σ, è possibile determinare un poligono regolare circoscritto ad una data circonferenza, il cui lato sia minore di σ. (dimostrazione sul libro)

Teorema: prefissato ad arbitrio un segmento σ, è possibile determinare due poligoni regolari, uno circoscritto e uno inscritto in una data circonferenza, tali che la differenza dei loro perimetri sia minore di σ (dimostrazione sul libro).

Teorema: le circonferenze rettificate stanno tra loro come i rispettivi raggi. (dimostrazio)

MATEMATICA

4ª Liceo Scientifico

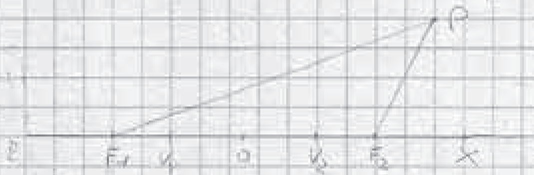
Teoria

L' Iperbole

ASINTOTO DI UNA CURVA
RETTA ALLA QUALE UNA CURVA SI AVVICINA INDEFINITAMENTE SENZA TOCCARLA

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante, in valore assoluto, la differenza delle loro distanze da 2 punti fissi detti fuochi.

considero una retta r e prendo su questa due punti F_1 e F_2 che chiamo fuochi.



Pertanto la misura del segmento F_1F_2 è $2c$.
Poi considero un punto esterno alla retta, P, che appartiene all'iperbole f. Quindi la differenza fra PF_1 e PF_2 è costante, in valore assoluto, ed è chiamata $2a$. Considero il segmento di lunghezza $2a$ con estremi V_1 e V_2.
Riporto il centro di questo sul centro di F_1F_2. Poiché $\overline{F_1F_2} > \overline{PF_1} - \overline{PF_2}$ per una nota proprietà dei triangoli allora, essendo $\overline{F_1F_2} = 2c$ e $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$ viene che $2c > 2a$; se ciò non valesse per un qualunque punto l'iperbole sarebbe impossibile.
Prendiamo un punto X esterno a F_1F_2; affermo che V_1 e V_2 appartengono a f.
Dimostrazione:
$\overline{V_2F_1} - \overline{V_2F_2} = \overline{V_2V_1} + \cancel{\overline{V_1F_1}} - \cancel{\overline{V_2F_2}}$; essendo V_1F_1 e V_2F_2 uguali, l'uguaglianza è:
$V_2F_1 = V_2V_1$. Ciò mi permette di affermare che V_2 appartiene a f.
In modo analogo si dimostra che V_1 appartiene a f:
$\overline{V_1F_2} - \overline{V_1F_1} = \overline{V_1V_2} - \cancel{\overline{V_2F_2}} - \cancel{\overline{V_1F_1}} = \overline{V_1V_2}$.

Costruzione per punti dell'iperbole:

considero una retta r e su di essa riporto $2c$ e $2a$ con i centri coincidenti.
Con il compasso, dopo aver preso un punto X esterno a V_1V_2 :
con centro in F_2 traccio la circonferenza di raggio $\overline{V_1X_1}$
con centro in F_1 traccio la circonferenza di raggio $\overline{V_2X_1}$
" F_1 " " V_1X_1
" F_2 " " V_2X_1
Considero un altro punto X_2
con centro in F_2 traccio la circonferenza di raggio V_1X_2
con centro in F_1 traccio la circonferenza di raggio V_2X_2
con centro in F_1 traccio la circonferenza di raggio V_1X_2
con centro in F_2 traccio la circonferenza di raggio V_2X_1

Si potrebbe continuare considerando X_n punti; ma è sufficiente così.
Da come è venuta l'iperbole si nota che essa è formata da 2 rami (simmetrici).
Per dimostrare che i punti trovati fanno parte dell'iperbole, considero solo Q_1:
$\overline{Q_1F_2} - \overline{Q_1F_1} = \overline{V_1X_2} - \overline{V_2X_2} = V_1V_2 = 2a.$

Circonferenza e rettangolo associati all'iperbole:

Considero l'asse focale e con centro in O traccio una circonferenza di raggio $\overline{F_1O}$. Questa circonferenza è detta associata all'Ip. Poi da V_1 e V_2 traccio le perpendicolari a r

che incontrano la circonferenza in 4 punti; questi punti, se uniti, costituiscono il rettangolo associato all'iperbole.

Si può notare che se viene data una circonferenza associata all'iperbole, questa non può essere disegnata perchè è impossibile trovare i punti V_1 e V_2, ma se viene dato un rettangolo associato all'iperbole, è possibile da questo arrivare al disegno (grafico) dell'iperbole perchè: il punto d'incontro delle diagonali è il centro dell'iperbole. Il segmento che passa per il centro e incontra perpendicolarmente 2 punti, che sono V_1 e V_2, sui lati maggiori del rettangolo è l'asse focale; quello che perpendicolarmente ai lati minori e sempre passante per il centro è l'asse afocale; per trovare i fuochi basta fare centro in O e raggio della misura di metà della diagonale e tracciare una circonferenza che incontra l'asse focale in due punti, questi due punti sono i fuochi.

coordinate fuochi dell'iperbole del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$F_1(c, 0)$

$F_2(-c, 0)$

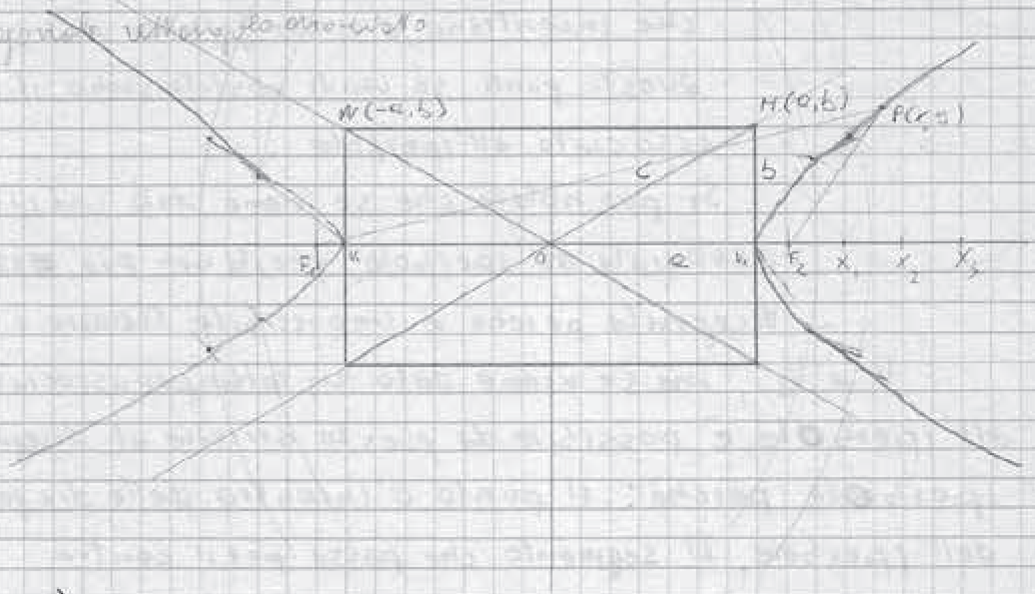
coordinate fuochi dell'iperbole del tipo $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$F_1(0, c)$

$F_2(0, -c)$

Equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria

$2b$ = lato rettangolo circoscritto
$2a$ = altro lato dell'angolo circoscritto
$2c$ = diagonale rettangolo circoscritto



$F_1(-c,0)$
$F_2(c,0)$

$$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a$$

$$\overline{PF_1}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\overline{PF_2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=2a+\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2+4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$

$$cx-a^2=a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$c^2x^2-\cancel{2a^2cx}+a^4=a^2x^2-\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

però sappiamo che:

$$c^2-a^2=b^2$$

quindi:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

dividiamo ambo i membri per a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Nel caso che i fuochi siano sull'asse y l'equazione viene:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

3 Equazione degli asintoti:

$y = mx$ equazione che esclude l'asse y.

Impongo il passaggio per M:

$b = ma \Rightarrow m = \frac{b}{a}$

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x}$$

Impongo il passaggio per N:

$b = -ma \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$

$$\boxed{y = -\frac{b}{a}x}$$

Inoltre, per trovare l'equazione degli asintoti, si eguaglia a zero l'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

questa è l'equazione complessiva degli asintoti e la conica è detta degenere perchè rappresenta una coppia di rette.

L'equazione complessiva degli asintoti scomposta è:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

per il principio di annullamento del prodotto si ha:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \rightarrow y = -\frac{b}{a}x$$

Nel caso che l'iperbole abbia i fuochi sull'asse y, le equazioni degli asintoti sono:

$y = \frac{a}{b}x$

$y = -\frac{a}{b}x$

e l'equazione complessiva è:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$$

che è scomposta in:

$$\left(\frac{y}{a} - \frac{x}{b}\right)\left(\frac{y}{a} + \frac{x}{b}\right) = 0$$

e quindi

$$\frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{b}x$$

$$\frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x$$

Iperbole equilatera:

una iperbole si dice equilatera quando i suoi asintoti sono tra loro perpendicolari.

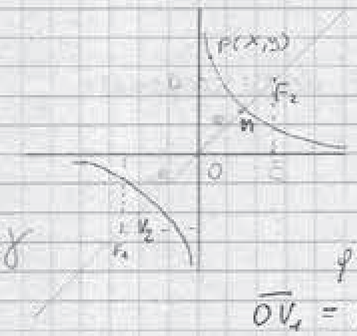
In questo caso non si parla di un rettangolo associato ma di un quadrato con la conseguenza che $a=b$ e quindi l'equazione diventa:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (\Rightarrow x^2-y^2=a^2)$$

L'equazione così ottenuta sarebbe dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria, ma possiamo pure assumere gli asintoti come assi cartesiani ortogonali.

L'iperbole riferita ai propri asintoti può trovarsi con i rami o nel I e III quadrante oppure nel II e nel IV.

Equazione iperbole riferita ai propri asintoti con i rami nei quadranti I e III:



Prima di andare a trovare come è l'equazione di questo tipo di iperbole, bisogna conoscere le coordinate dei fuochi, poiché esse servono a calcolare la misura dei segmenti PF_1 e PF_2. La distanza tra i due fuochi è $2c$, pertanto in questa figura OF_2 e OF_1 sono uguali a c. Noi sappiamo che $\overline{OV_1}=a$ perché $V_1V_2=2a$, quindi $c=a\sqrt{2}$ e anche OF_2 e OF_1 sono $a\sqrt{2}$. Ma questa è la diagonale del quadrato DF_2EO, quindi per calcolare il lato bisogna moltiplicare la diagonale per $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Si avrà:

$$F_2\begin{cases} a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=a & \text{(ascissa)}\\ a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=a & \text{(ordinata)}\end{cases}$$

$$F_1\begin{cases} -a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=-a & \text{(ascissa)}\\ -a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=-a & \text{(ordinata)}\end{cases}$$

A questo punto, sapendo le coordinate di $F_2(a,a)$ e di $F_1(-a,-a)$ possiamo passare all'equazione dell'iperbole:

$$P\in\gamma \Longleftrightarrow \overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a$$

$$\overline{PF_1}=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}$$

$$\overline{PF_2}=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$$

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}-\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=2a+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$$

$$\cancel{x^2}+2ax+\cancel{a^2}+\cancel{y^2}+2ay+\cancel{a^2}=4a^2+4a\sqrt{x^2-2ax+y^2-2ay+a^2+a^2}+\cancel{x^2}-2ax+\cancel{a^2}+\cancel{y^2}-2ay+\cancel{a^2}$$

4

$$\cancel{4}ax+\cancel{4}ay-\cancel{4}a^2=\cancel{4}a^2\sqrt{x^2-2ax+y^2-2ay+2a^2}$$

$$\cancel{a^2x^2}+\cancel{a^2y^2}+a^4+2a^2xy-\cancel{2a^3x}-\cancel{2a^3y}=\cancel{a^2x^2}-\cancel{2a^3x}+\cancel{a^2y^2}-\cancel{2a^3y}+2a^4$$

$$2a^2xy=a^4$$

$$2xy=a^2$$

$$\boxed{xy=\frac{1}{2}a^2}$$

In questa equazione xy sarà uguale a un certo valore k, mentre $\frac{1}{2}a^2$ può essere sia positivo che negativo a seconda della posizione dell'iperbole;

quindi:

$\frac{1}{2}a^2=|k|$ (perché $xy=\pm k$)

$a^2=2|k| \Rightarrow a=\sqrt{2|k|}$

Sarebbe gravissimo errore mettere il segno meno davanti alla radice.

CURIOSITÀ: NELL'IPERBOLE IL $\frac{c}{a}$ È SEMPRE MAGGIORE DI 1; NELL'ELLISSE È SEMPRE MINORE DI 1; NELLA PARABOLA È SEMPRE UGUALE A 1

5

Dimostrare che:

dato il trinomio di secondo grado

$$ax^2+bx+c$$

e indicati con x_1 e x_2 i suoi zeri, dimostrare che il trinomio è scomponibile in:

$$a(x-x_1)(x-x_2).$$

Dimostrazione:

ax^2+bx+c. raccolgo la a:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right].$$

poiché $-\frac{b}{a}=x_1+x_2$ e $\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$ allora viene:

$$a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right]=a\left(x^2-x_1x-x_2x+x_1\cdot x_2\right)=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Dimostrare che:

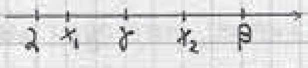
dato il trinomio di secondo grado

$$ax^2+bx+c$$

dimostrare che se il polinomio ha radici reali e distinte, per valori esterni allo intervallo degli zeri assume valori che hanno lo stesso segno di a e per valori interni all'intervallo degli zeri assume valori che hanno segno opposto a quello di a.

Dimostrazione:

$f(x)=ax^2+bx+c$. $\qquad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$.



$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ per la precedente dimostrazione.

$f(\alpha)=a(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)$.

$\alpha-x_1<0$

$\alpha-x_2<0$

il polinomio per $x=\alpha$ assume valori che hanno il segno di a.

$f(\beta)=a(\beta-x_1)(\beta-x_2)$

$\beta-x_1>0$

$\beta-x_2>0$

il polinomio per $x=\beta$ assume valori che hanno il segno di a

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x - x_1 > 0$

$x - x_2 < 0$

il polinomio assume valori che hanno il segno opposto a quello di a.

Dimostrare che:

dato il trinomio

$$ax^2 + bx + c$$

dimostrare che se il polinomio ha due zeri reali e coincidenti esso assume valori che hanno lo stesso segno di a per ogni valore di x, mentre si annulla per il valore degli zeri.

Dimostrazione:

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 = -\frac{B}{2A}$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_1)$

$f(x) = a(x - x_1)^2$

$f(x) = a\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2$

Essendo $x + \frac{B}{2A}$ sempre maggiore di zero, il polinomio assumerà per ogni valore di x, eccetto $-\frac{B}{2A}$, per il quale si annulla, valori che hanno il segno di a.

Dimostrare che:

dato il trinomio

$$ax^2 + bx + c$$

dimostrare che se il polinomio ha radici non reali esso assume, per ogni valore di x, valori che hanno il segno di a.

Dimostrazione:

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \Delta < 0$

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ avendo raccolto la a:

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

$x + \frac{b}{2a} > 0$ essendo un quadrato di un binomio.

$-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ essendo il $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ cambiato di segno.

Quindi il polinomi per qualunque valore di x assume valori che hanno il segno di a

Funzioni circolari dirette dell'angolo

le funzioni circolari dell'angolo sono il seno, il coseno e la tangente.

Definizione di coseno:

il coseno di un angolo orientato è il rapporto fra l'ascissa di un qualunque punto preso sul secondo lato e distinto dal vertice e la sua distanza dal vertice quando l'angolo è posto in un R.C.O con il vertice nell'origine e il primo lato coincidente col semiasse positivo delle ascisse.

Definizione di seno:

il seno di un angolo orientato è il rapporto fra l'ordinata di un qualunque punto preso sul secondo lato e distinto dal vertice e la sua distanza dal vertice quando l'angolo è posto in un R.C.O con il vertice nell'origine e il primo lato coincidente col semiasse positivo delle ascisse.

Definizione di tangente:

la tangente di un angolo orientato è il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di un qualunque punto preso sul secondo lato e distinto dal vertice quando l'angolo è posto in un R.C.O con il vertice nell'origine e il primo lato coincidente col semiasse positivo delle ascisse.

Reciproci delle funzioni circolari dirette dell'angolo:

il reciproco della tangente è detto cotangente

il reciproco del seno è detto cosecante

il reciproco del coseno è detto secante.

Nelle funzioni di angoli complementari il coseno e il seno si scambiano di valore, la tangente è uguale alla cotangente.

Angoli compresi fra 0° e 60° sono detti propri; angoli maggiori di 360° sono detti impropri.

Angoli la cui somma sia 360° sono detti esplementari.

Teorema n:1

Angoli che differiscono di un numero intero di angoli giro hanno le stesse funzioni goniometriche.

Due angoli si chiamano esplementari quando la loro somma è 360°

Teorema n° 2

Angoli esplementari (somma 360°) hanno seni opposti, coseni uguali e tangenti opposte.

Teorema n° 3

Angoli supplementari (somma 180°) hanno seni uguali, coseni opposti e tangenti opposte.

Teorema n° 4

Angoli complementari (somma 90°) si scambiano il seno con il coseno e la tangente con la cotangente.

Formule di addizione

$$\boxed{\begin{aligned}
sen(\alpha+\beta) &= sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sen\,\beta \\
sen(\alpha-\beta) &= sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sen\,\beta \\
cos(\alpha+\beta) &= cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta \\
cos(\alpha-\beta) &= cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta \\
tg(\alpha+\beta) &= \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} \\
tg(\alpha-\beta) &= \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}
\end{aligned}}$$

Relazioni fondamentali della trigonometria:

$\boxed{tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}$ prima

perché per definizione sarebbe: $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$; dividiamo per r: $tg\,\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$.

$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$ seconda

$y^2 + x^2 = r^2$

dividiamo per r^2

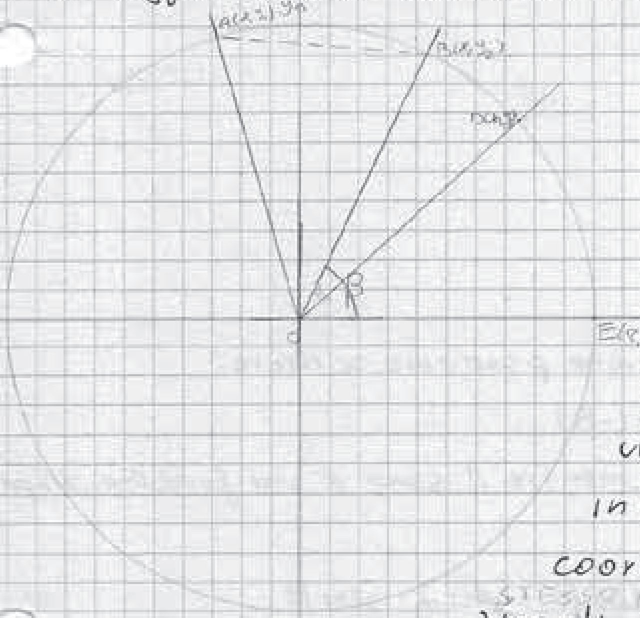
$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1$

$(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1 \Rightarrow sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Teorema:
cambiando di segno ad un angolo i seni e le tangenti cambiano di segno, mentre i coseni restano inalterati.

Ciò si esprime dicendo che il seno e la tangente sono funzioni dispari e che il coseno è una funzione pari.

Dimostrazione:
vogliamo dimostrare che
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
Prendiamo un R.C.O e facendo centro nell'origine tracciamo una circonferenza γ di raggio r e di centro O. Dopo aver tracciato la circonferenza, prendiamo



due angoli, α e β con $\alpha > \beta$, in posizione trigonometrica. Il secondo lato di α incontra la circonferenza nel punto A di coordinate x_1 e y_1; mentre il secondo lato di β incontra la circonferenza in B di coordinate x_2 e y_2. Tracciamo la corda AB, poi con centro in E ed apertura AB tracciare un arco di cerchio che incontra la circonferenza in un punto che noi chiameremo D, di coordiate x_3 e y_3. Poiché $AB = DE$ allora gli angoli $D\hat{O}E$ e $A\hat{O}B$ sono uguali, ma essendo $A\hat{O}B = \alpha-\beta$ allora anche $D\hat{O}E$ è uguale ad $\alpha-\beta$ con il vantaggio che $D\hat{O}E$ è in posizione trigonometrica.

Calcoliamo ora la misura di DE^2:
$DE^2 = (x_3 - r)^2 + (y_3)^2 = (x_3 - r)^2 + y_3^2$
Calcoliamo la misura di AB^2
$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.
Poiché $\overline{DE} = \overline{AB}$ allora sarà anche $\overline{DE}^2 = \overline{AB}^2$; quindi viene:
$x_3^2 - 2rx_3 + r^2 + y_3^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$. (1)
Ricordandoci della particolare posizione di γ rispetto al riferimento cartesiano ne possiamo scrivere l'equazione, che è:
$x^2 + y^2 = r^2$
Siccome i punti A, B, D appartengono alla circonferenza, le loro rispettive coordinate devono soddisfare l'equazione di γ; quindi avverrà che si avranno le

seguenti conseguenze:

$$x_3^2+y_3^2=r^2 \iff D\in\gamma$$
$$x_2^2+y_2^2=r^2 \iff B\in\gamma$$
$$x_1^2+y_1^2=r^2 \iff A\in\gamma$$

Sostituendo sulla (1) si ha:

$$\cancel{r^2}-2rx_3+\cancel{r^2}=\cancel{r^2}-2x_1x_2+\cancel{r^2}-2y_1y_2$$
$$rx_3=x_1x_2+y_1y_2$$

dividiamo ambo i membri per r^2:

$$\frac{x_3}{r}=\frac{x_1}{r}\cdot\frac{x_2}{r}+\frac{y_1}{r}\cdot\frac{y_2}{r}$$

tenendo conto delle definizioni di seno e coseno si ha:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

Dimostrazione:

vogliamo dimostrare che:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\,\cancel{\cos}\,\operatorname{sen}\beta.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]$$

tenendo conto della precedente dimostrazione possiamo scrivere:

$$\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta).$$

poiché il coseno è una funzione pari, mentre il seno è una funzione dispari, verrà:

$$\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Dimostrazione:

vogliamo dimostrare che:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos[90^\circ-(\alpha-\beta)]=\cos[90^\circ-\alpha+\beta]=\cos[(90^\circ-\alpha)+\beta]=$$
$$=\cos(90^\circ-\alpha)\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}(90^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

perché $90^\circ-\alpha$ è il complementare d'α e per il teorema n°4 si può quindi scrivere l'ultimo passaggio.

Dimostrazione:

vogliamo dimostrare che:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}[\alpha-(-\beta)] = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta) =$$
$$= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta.$$

Dimostrazione:

vogliamo dimostrare che:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Per la prima relazione fondamentale della trigonometria si ha che:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}.$$

Dividiamo il numeratore e il denominatore per $\cos\alpha \cdot \cos\beta$:

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha \cdot \cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta \cdot \cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha} \cdot \cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Dimostrazione:

vogliamo dimostrare che:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Per la prima relazione fondamentale della trigonometria si ha che:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$$

dividiamo il numeratore e il denominatore per $\cos\alpha \cdot \cos\beta$:

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha \cdot \cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\cancel{\cos\alpha} \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha} \cdot \cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

Formule di duplicazione

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \end{aligned}}$$

Equazioni goniometriche:

Una equazione si dice goniometrica quando la variabile compare come argomento di una funzione goniometrica.

Le equazioni goniometriche fondamentali o elementari sono:

$\operatorname{sen} x = a \qquad -1 \leq a \leq 1$

$\cos x = a \qquad -1 \leq a \leq 1$

$\operatorname{tg} x = a$

Formula che raggruppa tutti gli angoli che hanno uno stesso seno:
Data l'equazione goniometrica

$$\operatorname{sen} x = a \qquad \text{con } -1 \leq a \leq 1$$

se α è una soluzione qualunque dell'equazione, allora tutte le altre sono date dalla seguente formula:

$$x = K180° + (-1)^K \alpha \qquad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

Formula che raggruppa tutti gli angoli che hanno uno stesso coseno:
Data l'equazione goniometrica:

$$\cos x = a \qquad \text{con } -1 \leq a \leq 1$$

se α è una soluzione qualunque dell'equazione, allora tutte le altre sono date dalla seguente formula:

$$x = 2K180° \pm \alpha \qquad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

Formula che raggruppa tutti gli angoli che hanno una stessa tangente:
Data l'equazione goniometrica

$$\operatorname{tg} x = a$$

se α è una soluzione qualunque dell'equazione, allora tutte le altre sono date dalla seguente formula:

$x = K180° + \alpha \qquad$ con $K \in \mathbb{Z}$ ([illegible])

Formule parametriche (o formule in t)

$$sen\,\alpha = \frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

dimostrazione:

$sen\,\alpha = 2\,sen\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. divido per $sen^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\,(=1)$

$$sen\,\alpha = \frac{2\,sen\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{sen^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

divido per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$sen\,\alpha = \frac{\dfrac{2\,sen\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{sen^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

dimostrazione:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}$$

divido per $sen^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\,(=1)$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}}{sen^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

divido per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{sen^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

applicando direttamente la formula di duplicazione della tangente.

Se pongo $tg\frac{\alpha}{2} = t$ allora le formule parametriche vengono:

$$sen\,\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad tg\,\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

Formule di bisezione:

(1) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = +A-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

(2) $\cos\frac{\alpha}{2} = +A-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

(3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = +A-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Dimostrazione (1):

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

$2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$

$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = +A-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Dimostrazione (2):

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$\cos\alpha + 1 = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = +A-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

Dimostrazione (3):

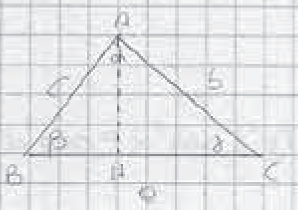
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}\cdot\frac{2}{1+\cos\alpha}} =$

$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Teorema delle proiezioni:

in ogni triangolo un lato è uguale alla somma dei prodotti degli altri due lati moltiplicati ciascuno per il coseno dell'angolo che essi formano con il lato considerato.

Dimostrazione



$a = \overline{HC} + \overline{HB}$

$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$

HC cateto

HB cateto

$a = \overline{HC} - \overline{HB}$

$a = b \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos\beta_1$

$a = b \cos\gamma + c \cos\beta$

Teorema di Carnot

in ogni triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto di detti lati per il coseno dell'angolo da essi formato.

$$\begin{cases} a^2 = ab\cos\gamma + ac\cos\beta \\ -b^2 = -ab\cos\gamma - bc\cos\alpha \\ -c^2 = -ac\cos\beta - bc\cos\alpha \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Teorema di Eulero:

in ogni triangolo, il rapporto fra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto è uguale alla misura del diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

corollario:

in ogni triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

Formule del seno e del coseno in funzione della tangente

$$(1)\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

dovunque Se alla radice c'è il più in questo c'è anche il + nel caso e viceversa

$$(2)\quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Dimostrazione (1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Dimostrazione (2):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Formule di prostaferesi (di trasformazione delle somme in prodotto)

$$(1)\quad \operatorname{sen}p + \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(2)\quad \operatorname{sen}p - \operatorname{sen}q = 2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$(3)\quad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(4)\quad \cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

Dimostrazione:

pongo $\alpha+\beta = p$

pongo $\alpha-\beta = q$

$$\begin{cases}\alpha+\beta = p\\ \alpha-\beta = q\end{cases}$$

$$2\alpha = p+q \Rightarrow \alpha = \frac{p+q}{2}$$

$$\frac{p+q}{2} + \beta = p$$

$$2\beta + p + q = 2p$$

$$2\beta = p - q \Rightarrow \beta = \frac{p-q}{2}$$

Dimostrazione (1):

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

Dimostrazione (2):

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ -1\cdot\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

Dimostrazione (3):

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Dimostrazione (4):

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

Formule di Briggs

(angoli di un triangolo in funzione dei lati)

$a+b+c=2p$

(1) $$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

(2) $$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Dimostrazione (1):

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$ teorema di Carnot

$$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\quad(1_1)$$ prendiamo in esame la formula di bisezione del seno

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}\quad(1_2)$$ prendiamo l'espressione

$$a+b+c=2p$$

togliamo da ambo i membri $2c$:

$$a+b-c=2p-2c$$

$$a+b-c=2(p-c)$$

togliamo da ambo i membri $2b$:

$$a-b+c=2p-2b$$

$$a-b+c=2(p-b)$$

sostituiamo nella (1_2):

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2(p-c)\,2(p-b)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Dimostrazione (2):

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}\quad(2_1)$$

$a+b+c=2p$

togliamo ad ambo i membri $2a$:

$-a+b+c=2(p-a)$

sostituiamo nella (2_1):

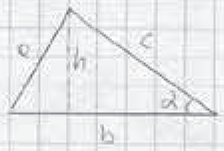
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2p\cdot 2(p-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Formula di Erone

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

in cui A è la superficie di un triangolo qualunque a, b e c sono i lati e $2p$ il perimetro

Dimostrazione:



$A=\frac{1}{2}bh$

$h=c\,\text{sen}\,\alpha$

$A=\frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\alpha \quad (1_1) \quad \Rightarrow \text{sen}\,\alpha=\frac{2A}{bc}$

$\text{sen}\,\alpha$ (inteso come $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}$) $=2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

applicando le formule di Briggs:

$$\text{sen}\,\alpha=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}}=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ritornando alla (1_1) si ha:

$$A=\frac{1}{2}\cancel{bc}\,\frac{2}{\cancel{bc}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$R=\frac{a}{2\,\text{sen}\,\alpha}$ formula del seno

ricaviamo $\text{sen}\,\alpha$:

$R=\frac{a}{\frac{4A}{bc}}=\frac{abc}{4A}$ raggio della circonferenza circoscritta.

circonferenza inscritta $r=\frac{A}{p}$ dove p è il semiperimetro

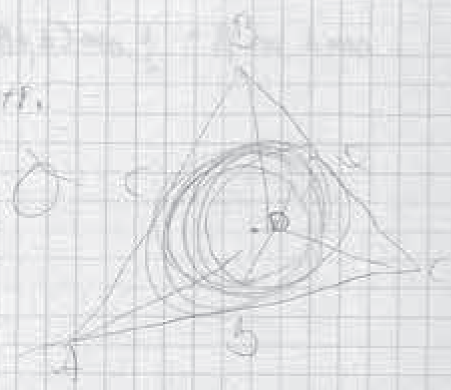
Dimostr.

$\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=A$

$(a+b+c)r=2A$

$\cancel{2}p\,r=\cancel{2}A$

$r=\frac{A}{p}$



Formule di Werner

(1) $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

(2) $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

(3) $\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

Dimostrazione: (valida per tutte e 3 le dimostrazioni)

pongo $\frac{p+q}{2} = \alpha$ ($\frac{p+q}{2}$ dalle formule di prostaferesi)

pongo $\frac{p-q}{2} = \beta$

$$\begin{cases} p+q = 2\alpha \\ p-q = 2\beta \end{cases}$$

$p = \alpha+\beta$

$q = \alpha-\beta$

Dimostrazione (1):

Applicando le formule di prostaferesi si ha:

$$2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

Dimostrazione (2):

$$2\cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

Dimostrazione (3):

$$2\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

I numeri complessi

Si dice numero complesso la somma di un numero reale "a" con un numero immaginario "ib" in cui "b" è un altro numero reale mentre "i" è l'unità immaginaria, il cui quadrato è uguale a -1:

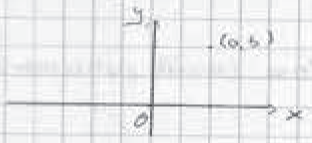
$$i^2=-1 \Rightarrow \sqrt{-1}=i$$

Un numero complesso è rappresentato anche dalla coppia: (a,b).

rappresentazione geometrica di un numero complesso:

Il numero complesso $a+ib$ è rappresentabile sul piano cartesiano Oxy mediante il punto P di ascissa "a" e di ordinata "b":

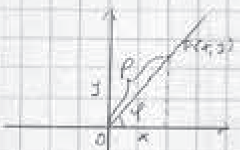
$P(a,b)$



forma trigonometrica di un numero complesso:

Il numero complesso $a+ib$ (a,b), rappresentato sul piano cartesiano dal punto P può anche essere messo nella forma:

$$a+ib=(a,b)=\rho(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi)$$



ρ: raggio vettore

φ: anomalia

$P(x,y)$ coordinate cartesiane

$P(\rho,\varphi)$ coordinate polari

$$(1)\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \Rightarrow (x,y)=x+iy=\rho\cos\varphi+i\rho\,\text{sen}\,\varphi=\underline{\rho(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi)}$$

elevo al quadrato ambo i membri della (1):

$$\begin{cases} x^2=\rho^2\cos^2\varphi \\ y^2=\rho^2\,\text{sen}^2\varphi \end{cases}$$

sommo membro a membro:

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\,\text{sen}^2\varphi$$

$$x^2+y^2=\rho^2(\cos^2\varphi+\text{sen}^2\varphi)$$

$$x^2+y^2=\rho^2 \rightarrow \text{norma del numero complesso}$$

$$\rho^2=x^2+y^2$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

Dalla (1) si ricava:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho} \Rightarrow \varphi=\arccos\frac{x}{\rho}$$

$$\text{sen}\,\varphi=\frac{y}{\rho} \Rightarrow \varphi=\text{arcsen}\,\frac{y}{\rho}$$

Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica:

$$\rho_1 (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \cdot \rho_2 (\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$$

Dimostrazione:

$$\rho_1 (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)\, \rho_2 (\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + i\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta) =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)].$$

in sostanza il prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica è un numero complesso in forma trigonometrica che ha per MODULO $\boxed{\text{raggio vettore}}$ la somma dei MODULO $\boxed{\text{raggi vettori}}$ del moltiplicando e del moltiplicatore e per anomalia la somma delle anomalie degli stessi.

Potenza n-esima di un numero complesso in forma trigonometrica: (ricavata praticamente dalla formula precedente

$$[\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n = \rho^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) \qquad (\alpha = \varphi)$$

Radice n-esima di un numero complesso in forma trigonometrica: (le radici n-esime di un numero complesso sono n)

$$[\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

Dimostrazione:

$$[\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^{\frac{1}{n}} = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1) \qquad (1)$$

$$[\rho_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)]^n = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

per quanto riguarda il primo membro si applica la formula della potenza n-esima di un numero complesso; per quanto riguarda il secondo membro si aggiunge a φ un numero pari di angoli giro:

$$\rho_1^n (\cos n\varphi_1 + i \operatorname{sen} n\varphi_1) = \rho[\cos(\varphi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\varphi + 2k\pi)]$$

$$\rho_1^n = \rho \Rightarrow \rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$$

$$n\varphi_1 = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$ con k che assume valori $0, 1, 2, \dots, n-1$

Sostituendo nella (1) si ha:

$$[\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

1,

Insiemistica

L'insieme è un concetto primitivo e come tale indefinibile. Possiamo però ritenere la parola insieme sinonimo di classe, aggregato ecc.

insieme infinito:

un insieme si dice infinito quando si può creare una corrispondenza biunivoca fra gli elementi dell'insieme e gli elementi di un sottoinsieme proprio dell'insieme stesso.

Un insieme si indica con una lettera maiuscola, i suoi elementi con una minuscola: l'insieme A, l'insieme B; l'elemento a dell'insieme A e l'elemento b dell'insieme B.

Il segno di appartenenza si indica con "$\in$":

$a \in A$; $b \in B$.

unione e intersezione:

dati due insiemi A e B, l'unione è un insieme C i cui elementi appartengono indifferentemente ad A e B.

L'unione si indica con "$\cup$".

$A \cup B = C$

$\{a, t, 7\} \cup \{x\ t\ 5\} = \{a, x, t, 7, 5\}$

L'unione di un insieme A con l'insieme vuoto è l'insieme A:

$A \cup \emptyset = A$

L'operazione di unione è commutativa.

Dati due insiemi A e B, l'intersezione è un insieme C i cui elementi appartengono sia ad A che a B:

L'intersezione si indica con "$\cap$"

$A \cap B = C$

$\{a\ 5\ b\ m\} \cap \{x\ 5\ m\} = \{m\ 5\}$

$\{a\ b\} \cap \{x\ y\} = \emptyset$

Quando l'intersezione tra due insiemi dà l'insieme vuoto si dice che i due insiemi sono disgiunti.

L'intersezioni di un insieme A con l'insieme vuoto è l'insieme vuoto.

$A \cap \emptyset = \emptyset$

L'operazione di intersezione è commutativa il sottoinsieme:

si dice che A è un sottoinsieme dell'insieme B se ogni elemento di A è anche elemento di B. In particolare A può coincidere con B e in tal caso diremo che A è il sottoinsieme improprio di B.

L'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque insieme.

Per annotare che A è un sottoinsieme di B scriviamo $A \subseteq B$ e leggiamo A sottoinsieme di B oppure A incluso in B, il che equivale a dire B include A ($B \supseteq A$).

partizione di un insieme:

un insieme di sottoinsiemi di un insieme A costituisce una partizione di A se:

1) tali sottoinsiemi sono a due a due disgiunti
2) se l'unione di tali sottoinsiemi è A.

relazioni binarie tra gli elementi di un insieme:

è inutile affannarsi a cercare una definizione di relazione, pertanto accettiamo come primitivo il termine relazione.

Per indicare una relazione si usa la lettera "R".

$x R y$; $a R b$.

- relazione riflessiva:

si dice che una relazione è riflessiva quando è valida per qualunque elemento nei riguardi di se stesso.

$x R x$.

- relazione simmetrica:

si dice che una relazione è simmetrica quando, trovati due elementi tale che x sia in relazione con y, si deduce che y sia in relazione con x.

$x R y \Rightarrow y R x$ (la relazione "parallelo a" è simmetrica nell'insieme delle rette)

relazione transitiva:

si dice che una relazione è transitiva se, dalle premesse $x R y$ e $y R z$ consegue che è anche $x R z$.

$\left.\begin{matrix} x R y \\ y R z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x R z$ (la relazione "parallelo a" è transitiva)

relazione di equivalenza:

una relazione che simultaneamente è riflessiva, simmetrica e transitiva si chiama "RELAZIONE DI EQUIVALENZA" e gli elementi che la soddisfano si dicono equivalenti.

Teorema:

se R è una relazione di equivalenza valida per gli elementi di un insieme A allora detta relazione induce su A una partizione.

Gli elementi di tale partizione vengono poi detti "classi di equivalenza"

insieme delle direzioni:

la direzione è la classe di equivalenza indotta dalla relazione di parallelismo nell'insieme delle rette.

insieme dei vettori:

i vettori sono le classi di equivalenza indotte dalla relazione di equipollenza nell'insieme dei segmenti orientati.

insieme dei numeri naturali:

i numeri naturali sono le classi di equivalenza indotte dalla relazione di equipotenza operante nell'insieme degli insiemi finiti.

spazio:

Spesso un insieme infinito viene chiamato spazio.

spazio quoziente:

si dice che quozientando l'insieme dei segmenti orientati con la relazione di equipollenza nasce un insieme che è l'insieme dei vettori (spazio quoziente).

A = insieme dei segmenti orientati
R = relazione di equipollenza

$\frac{A}{R}$ = B (insieme dei vettori)

R = insieme delle rette
R = relazione di parallelismo

$\frac{R}{R}$ = D (insieme delle direzioni)

operazione interna:

si chiama operazione interna fra gli elementi di un insieme un qualunque procedimento (ben definito) che permette di associare a due elementi qualunque a e b dell'insieme un terzo elemento c pure appartenente all'insieme.

Strutture algebriche:

Un insieme A dotato di una operazione interna associativa costituisce una particolare struttura che è detta <u>monoide</u> o <u>semigruppo</u>. $S = (N; +)$

SEMIGRUPPO ADDITIVO DEI NUMERI NATURALI
$S = (N; +)$

$S = (R - \{0\}; :)$ UN INSIEME STRUTTURATO CON LA DIVISIONE NON È UNA STRUTTURA

$\underbrace{R - \{0\}}_{\text{INSIEME DEI NUMERI REALI ESCLUSO LO ZERO}}$

Monoide Abeliano:

quando l'operazione introdotta in un insieme è commutativa, la struttura si dice abeliana.

Elemento neutro o indifferente:

data la struttura $S = (A; \perp)$ allora un elemento e appartenente ad A si dice neutro o indifferente rispetto alla struttura se per ogni x appartenente ad A si ha e operato con x è uguale a x operato ad e è uguale a x.

$S = (A; \perp)$ [illegible]

$e \in A$

$\forall x \in A$

$e \perp x = x \perp e = x$.

$S = (N; +)$ lo zero è in questa struttura l'elemento neutro.

$S = (N; \cdot)$ l'uno è in questa struttura l'elemento neutro.

Teorema:

se una struttura ammette un elemento neutro, esso è unico.

dimostrazione (per assurdo)

$\exists\, e$ et e_1

se si considera e elemento neutro

$e \perp e_1 = e_1 = e$ (se si considera e_1 elemento neutro)

Struttura unitaria:

una struttura che ha l'elemento neutro si dice unitaria

Elementi simmetrici:

data la struttura $S = (A; \perp)$ dotata di elemento neutro e (cioè la struttura è unitaria) se in corrispondenza ad un elemento x appartenente ad A esiste un elemento x_1 tale che x operato con x_1 è uguale a x_1 operato con x uguale ad e allora i due elementi x e x_1 si dicono simmetrici fra loro.

$x \in A$

x_1

$x \perp x_1 = x_1 \perp x = e$

Teorema

il simmetrico di un elemento, se esiste, è unico.

dimostrazione (per assurdo)

$\exists\, x_1$ et x_2

$x \perp x_1 = x_1 \perp x = e$

$x \perp x_2 = x_2 \perp x = e$

$x_1 = x_2$

Il gruppo:

un insieme A si dice che è strutturato a gruppo se:

1) è dotato di una operazione "$\perp$" interna

2) la "$\perp$" è associativa

3) esiste l'elemento neutro e

4) ogni elemento di A è simmetrizzabile.

gruppo abeliano:

Se poi la "$\perp$" è commutativa allora il gruppo si dice abeliano.

Struttura ad anello:

un insieme A si dice strutturato ad anello se è dotato di due operazioni interne ($\perp$ e $*$) in modo che rispetto alla prima operazione ($\perp$) sia un gruppo abeliano e rispetto alla seconda sia un monoide. Inoltre deve valere la doppia proprietà distributiva della seconda operazione ($*$) rispetto alla prima.

$S(A \perp *)$

$a\ b\ c \in A$

$a * (b \perp c) = a * b \perp a * c$

$(b \perp c) * a = a * b \perp a * c$

Se anche la seconda operazione ammette l'elemento neutro allora l'anello si dice unitario.

Se tutti gli elementi di A ad eccezione del neutro della prima operazione sono simmetrizzabili rispetto alla seconda operazione allora la struttura si chiama corpo e se inoltre anche la seconda operazione è commutativa la struttura si dice corpo abeliano o campo.

Prodotto cartesiano:

il prodotto cartesiano tra due insiemi A e B è l'insieme C i cui elementi sono tutte le possibili coppie che si possono formare aventi la prima componente in A e la seconda in B

$A \times B$ e si legge A cartesiano B.

$A(x, y)$

$B(a, m, n)$

$A \times B = \{(x a); (x m)(x n); (y a); (y m); (y m)\}$

In generale il prodotto cartesiano non è commutativo.

Nel caso del quadrato di un insieme il sottoinsieme del prodotto formato dalle coppie con componenti uguali si chiama diagonale del prodotto cartesiano.

Il piano cartesiano non è altro che il quadrato dell'insieme dei numeri reali (R)

Coppie equivalenti

diremo che le coppie (a, b), (c, d) - che sono elementi di $\mathbb{N}^2$) sono equivalenti se

$$(a, b) \, R \, (c, d) \iff a + d = b + c$$

con «+» segno dell'ordinario addizione dei numeri naturali.

Esaminiamo la relazione R ora introdotta:

$$(x, y) \, R \, (x, y) \iff x + y = y + x$$

quindi la relazione R è riflessiva.

Vediamo se è simmetrica:

supponiamo $(x, y) \, R \, (a, b) \iff x + b = y + a$ (1)

vediamo se è $(a, b) \, R \, (x, y) \iff a + y = b + x$ (2)

ma dall'esser vera la (1) si ha che è vera anche la (2), quindi la relazione è simmetrica.

Vediamo se è transitiva:

abbiamo:

$(x, y) \, R \, (a, b) \iff x + b = y + a$ (1)

$(a, b) \, R \, (m, n) \iff a + n = b + m$ (2)

e vogliamo dimostrare che è:

$(x, y) \, R \, (m, n)$.

Sommiamo membro a membro la (1) con la (2):

$$x + \cancel{a} + \cancel{b} + n = y + \cancel{a} + \cancel{b} + m$$

$$x + n = y + m$$

e ciò comporta che $(x, y) \, R \, (m, n)$.

Ma allora essendo R una relazione di equivalenza, si ha che essa induce in $\mathbb{N}^2$ una partizione i cui elementi si chiamano classi di equivalenza.

L'insieme di tali classi di equivalenza si chiama insieme $\mathbb{Z}$, cioè l'insieme dei numeri interi relativi.

Teorema:

due coppie tali che le differenze tra i termini di ugual posto sono uguali sono equivalenti.

$$(x, y) \, R \, (x + k, y + k) \iff x + y + k = y + x + k$$

Mappa o applicazione:

(una relazione tra due insiemi X e Y si dice relazione funzionale di X verso Y se per ogni x appartenente a X esiste un solo elemento y che possa essere associato alla x nella relazione considerata.) è una relazione che pone dei valori di un insieme A in valori di un insieme $\mathbb{R}$

Dominio:

i valori per cui la funzione è definita sono il dominio della funzione.

Immagine:

Se l'immagine coincide con $\mathbb{R}$ allora la funzione si dice suriettiva

La funzione si dice iniettiva se ad un elemento appartenente al primo insieme ne corrisponde uno appartenente al secondo insieme (e viceversa).

Se l'immagine e il dominio coincidono, la funzione si dice suriettiva

Sottoinsieme stabile:

un sottoinsieme A_1 di un insieme A si dice stabile rispetto ad una operazione interna di A se il risultato dell'operazione fra due elementi qualunque di A_1 appartiene ad A_1.

Definizione:

nella struttura $A = (\mathbb{Z} \perp *)$ il sottoinsieme $\mathbb{Z}_1$, formato con gli elementi che hanno la prima componente maggiore o uguale alla seconda del tipo $\{a, 0\}$, è stabile rispetto sia alla operazione $\perp$ che alla operazione $*$.

Consideriamo le strutture $A = (\mathbb{Z} \perp *)$ e $S = (\mathbb{N} + \cdot)$.

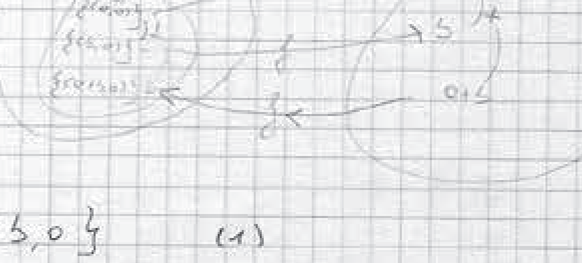
È data la funzione f definita in $\mathbb{Z}$ con valori in $\mathbb{N}$ così definita:

$\{(a, 0)\} \Leftrightarrow a$

si tratta quindi di una mappa iniettiva.

Consideriamo le operazioni $\perp$ e $+$.

$\{(a, 0)\} \perp \{(b, 0)\} = \{(a+b, 0)\}$



$f\{a, 0\} = a$

$f\{b, 0\} = b$

$a+b = a+b$ (a+b = a+b)

$f[\{(a, 0)\} \perp \{(b, 0)\}] = f\{a, 0\} + f\{b, 0\}$ (1)

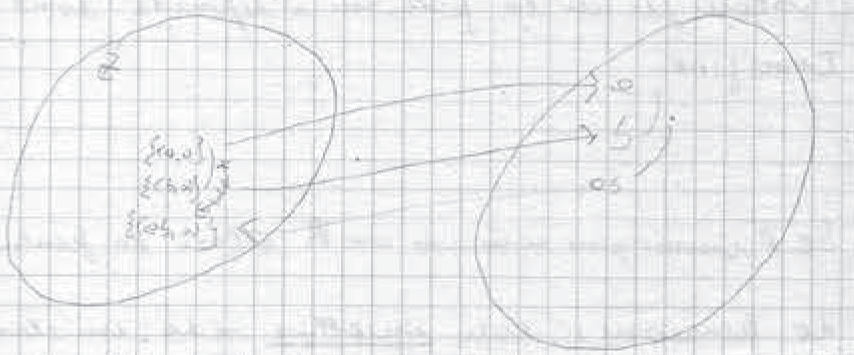
Se la funzione gode della proprietà (1), si dice che è compatibile con le due strutture (Z, N)

Si dice anche che la funzione è un morfismo

Se poi, come in questo caso, la funzione è iniettiva allora si parla di isomorfismo.

Consideriamo ora le operazioni $*$ e $\cdot$ (con la funzione f precedentemente definita)

$\{(a,0)\} * \{(b,0)\} = \{(ab,0)\}$



$f\{a,0\} = a$

$f\{b,0\} = b$

$a \cdot b = ab$

$f[\{(a,0)\} * \{(b,0)\}] = f\{a,0\} \cdot f\{b,0\}$ (1)

Se la funzione gode della proprietà (1), si dice che è compatibile con le due strutture

Si dice anche che la funzione è un morfismo e, essendo in questo caso la funzione iniettiva, si parla di isomorfismo.

Allora esiste un isomorfismo totale fra l'insieme N e Z

La struttura $S=(\mathbb{Z}\ \perp)$ è un gruppo abeliano e l'operazione è così definita:

$$\{(a,b)\}\perp\{(c,d)\}=\{(a+c,\ b+d)\}$$ Es: $\{(5,2)\}\perp\{(7,1)\}=\{(12,3)\}$

Dimostrazione:

- il risultato dell'operazione $\perp$ non dipende dal rappresentante che uso:

$$\{(a,b)\}\perp\{(c,d)\}=\{(a+c,\ b+d)\}$$

$$\{(a+x,\ b+x)\}\perp\{(c+y,\ d+y)\}=\{(a+c+x+y,\ b+d+x+y)\}$$

$$(a+c+x+y,\ b+d+x+y)\overset{R}{\sim}(a+c,\ b+d)\ ?\quad (*) \iff a+b+c+d+x+y=b+d+x+y+a+c$$

siccome queste 2 somme sono uguali, la (*) è vera

- l'operazione è associativa:

$$[\{(a,b)\}\perp\{(c,d)\}]\perp\{(e,f)\}=\{(a+c,\ b+d)\}\perp\{(e,f)\}=\{(a+c+e,\ b+d+f)\}$$

$$\{(a,b)\}\perp[\{(c,d)\}\perp\{(e,f)\}]=\{(a,b)\}\perp\{(c+e,\ d+f)\}=\{(a+c+e,\ b+d+f)\}$$

quindi l'operazione è associativa.

- l'operazione ha l'elemento neutro:

$$\{(a,b)\}\perp\{(x,y)\}=\{(a+x,\ b+y)\}$$

$$\{(a,b)\}\perp\{(x,y)\}=\{(a,b)\}$$

$$(a+x,\ b+y)=(a,b)$$

vero solo se $x=0$ e $y=0$, quindi l'elemento neutro è $(0,0)$

- gli elementi sono simmetrizzabili:

$$\{(a,b)\}\perp\{(b,a)\}=\{(a+b,\ b+a)\}$$

ma $(a+b,\ b+a)$ è l'elemento neutro e quindi gli elementi sono simmetrizzabili.

- l'operazione è commutativa:

$$\{(a,b)\}\perp\{(c,d)\}=\{(a+c,\ b+d)\}$$

$$\{(c,d)\}\perp\{(a,b)\}=\{(c+a,\ d+b)\}$$

Quindi a questo punto è dimostrato che la struttura $S=(\mathbb{Z}\ \perp)$ è un gruppo abeliano.

La struttura $S=(Z,*)$ è un monoide e l'operazione è così definita:

$\{(a,b)\}*\{(c,d)\}=\{(ac+bd,\ ad+bc)\}$ $\quad \{(3,2)\}*\{(5,1)\}=\{(15+2,\ 3+10)\}=\{(17,13)\}=\{(4,0)\}$

Dimostrazione:

- Il risultato dell'operazione $*$ non dipende dal rappresentante che uso:

$\{(a,b)\}*\{(c,d)\}=\{(ac+bd,\ ad+bc)\}$

$\{(a+x,b+x)\}*\{(c+y,d+y)\}=\{(ac+ay+xc+xy+bd+by+xd+xy,\ ad+ay+xd+xy+bc+by+xc+xy)\}$

$(ac+bd,ad+bc)\sim(ac+ay+xc+xy+bd+by+xd+xy,\ ad+ay+xd+xy+bc+by+xc+xy)$? (1) $\Leftrightarrow$

$ac+bd+ad+ay+xd+xy+bc+by+xc+xy=ad+bc+ac+ay+xc+xy+bd+by+xd+xy$

siccome queste due somme sono uguali, la (1) è vera

- L'operazione è associativa

$[\{(a,b)\}*\{(c,d)\}]*\{(e,f)\}=\{(ac+bd,\ ad+bc)\}*\{(e,f)\}=$

$=(ace+bde+adf+bcf,\ acf+bdf+ade+bce)$ (1)

$\{(a,b)\}*[\{(c,d)\}*\{(e,f)\}]=\{(a,b)\}*\{(ce+df,\ cf+de)\}=$

$=\{(ace+adf+bcf+bde,\ acf+ade+bce+bdf)\}$ (2)

poiché la (1) e la (2) sono uguali, l'operazione è associativa.

- L'operazione ha l'elemento neutro

$\{(a,b)\}*\{(x,y)\}=\{(ax+by,\ ay+bx)\}$

$\{(a,b)\}*\{(x,y)\}=\{(a,b)\}$

$\{(ax+by,\ ay+bx)\}=\{(a,b)\}$

vero solo se $x=1$ et $y=0$, quindi l'elemento neutro è $(1,0)$.

Dimostrare che il sottoinsieme C_1 dell'insieme $(C \perp *)$ con gli elementi del tipo $\{(x,0)\}$ è stabile.

$(a,0) \perp (b,0) = (a+b, 0)$ $\quad$ C_1 è stabile rispetto all'operazione $\perp$

$(a,0) * (b,0) = (ab, 0)$ $\quad$ C_1 è stabile rispetto all'operazione $*$

Consideriamo le strutture $S = (C_1 \perp *)$ e $A = (R + \cdot)$.

È data la funzione f definita in C con valori in R così definita:

$f(x,0) = x$

L'insieme $(C_1 \perp *)$ è stabile

Consideriamo le operazioni $\perp$ e $+$

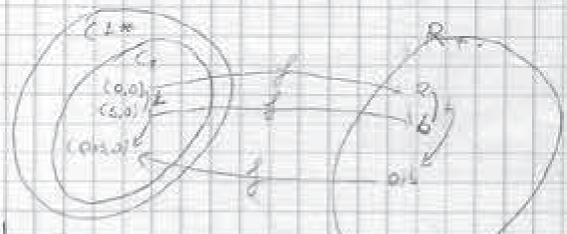
$(a,0) \perp (b,0) = (a+b, 0)$

$f(a,0) = a$

$f(b,0) = b$

$a+b = a+b$

$f[(a,0) \perp (b,0)] = f(a,0) + f(b,0)$ $\quad$ (1)



Poiché la funzione gode della proprietà (1) allora essa è un morfismo.
Poiché la funzione è iniettiva allora si parla di isomorfismo

Consideriamo le operazioni $*$ e $\cdot$

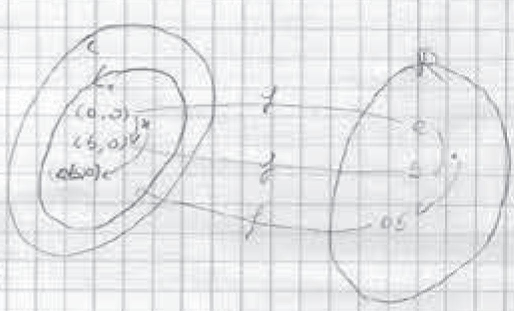
$(a,0) * (b,0) = (ab, 0)$

$f(a,0) = a$

$f(b,0) = b$

$a \cdot b = ab$

$f[(a,0) * (b,0)] = f(a,0) * f(b,0)$ $\quad$ (2)



Poiché la funzione gode della proprietà (2) allora essa è compatibile con le 2 strutture.

La funzione è allora un morfismo e poiché è iniettiva essa è un isomorfismo.

L'isomorfismo tra le 2 strutture $S = (C_1 \perp *)$ e $A = (R + \cdot)$ è totale.

III
1 Studiare la struttura $S = (\mathbb{R}^2 \perp *)$ con

$(a, b) \perp (c, d) = (a+c, b+d)$

$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

L'operazione $\perp$ è interna.

L'operazione $\perp$ è associativa:

$[(a,b) \perp (c,d)] \perp (e,f) = (a+c, b+d) \perp (e,f) = (a+c+e, b+d+f)$

$(a,b) \perp [(c,d) \perp (e,f)] = (a,b) \perp (c+e, d+f) = (a+c+e, b+d+f)$

Esiste l'elemento neutro ed è $(0,0)$:

$(a,b) \perp (0,0) = (a,b)$

Gli elementi sono simmetrizzabili:

$(a,b) \perp (x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases}$$

$x = -a$

$y = -b$

$(a,b) \perp (-a,-b) = (0,0)$

$(x,y) \perp (a,b) = (0,0)$

$$\begin{cases} x + a = 0 \\ y + b = 0 \end{cases}$$

$x = -a$

$y = -b$

$(-a,-b) \perp (a,b) = (0,0)$

L'operazione è commutativa:

$(a,b) \perp (c,d) = (a+c, b+d)$

$(c,d) \perp (a,b) = (c+a, d+b)$

Quindi la struttura $S = (\mathbb{R}^2 \perp)$ è un gruppo abeliano

L'operazione $*$ è interna

L'operazione $*$ è associativa:

$[(a,b) * (c,d)] * (e,f) = (ac - bd, ad + bc) * (e,f) = (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$

$(a,b) * [(c,d) * (e,f)] = (a,b) * (ce - df, cf + de) = (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)$

Quindi la struttura $S = (\mathbb{R}^2 *)$ è un monoide

Vale la doppia proprietà distributiva dell'operazione $*$ rispetto all'operazione $\perp$:

a sinistra $(a,b) * [(c,d) \perp (e,f)] = (a,b) * (c+e, d+f) = (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)$

a destra $[(c,d) \perp (e,f)] * (a,b) = (c+e, d+f) * (a,b) = (ca + ea - db - fb, cb + eb + da + fa)$

$(a,b) * (c,d) \perp (a,b) * (e,f) = (ac - bd, ad + bc) \perp (ae - bf, af + be) =$

$= (ac + ae - bd - bf, ad + bc + af + be)$

la struttura $S = (\mathbb{R}^2 *)$ è un gruppo

L'operazione $*$ ha l'elemento neutro ed è $(1,0)$:

$(a,b) * (1,0) = (a,b)$

La struttura $S = (\mathbb{R}^2 \perp *)$ è un anello unitario

Gli elementi sono simmetrizzabili rispetto alla seconda operazione ad eccezione del neutro della prima

$(a,b) * (x,y) = (1,0)$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$

$(a^2+b^2)x = a$

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

$(x,y) * (a,b) = (1,0)$

$$\begin{cases} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$

$(a^2+b^2)x = a$

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

se $a=0$ e $b=0$ il sistema è impossibile quindi l'elemento $(0,0)$ che è il neutro della prima operazione non è simmetrizzabile

$(a,b) * (0,0) = (1,0)$

$0 = 1$ impossibile.

La struttura $S = (\mathbb{R}^2 \perp *)$ è un corpo

L'operazione $*$ è commutativa

$(a,b) * (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

$(c,d) * (a,b) = (ca - db,\ da + cb)$

La struttura $S = (\mathbb{R}^2 \perp *)$ è un campo

MATEMATICA

5ª Liceo Scientifico

Teoria

Funzione continua:

si dice che una funzione $f(x)$ è continua per $x=c$ se il limite di $f(x)$ per x che tende a c è uguale a $f(c)$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Limite

data una f definita in un dominio D e sia c un suo punto di accumulazione

si dice che una funzione $f(x)$ tende a un numero l per x che tende a c se fissato un intorno R di l (di raggio ε arbitrario) è possibile in conseguenza determinare un intorno H completo di c (di raggio δ) tale che per ogni x appartenente ad H (con c al più escluso) il corrispondente valore della funzione appartiene a R.

$$c-\delta < x < c+\delta$$

si ha

$$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$$

o ciò che è lo stesso

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

P.S. Si dice che una funzione $f(x)$ tende a un numero l per x che tende a c, essendo c un punto di accumulazione del dominio, se fissato un numero ε positivo arbitrario è possibile in conseguenza determinare un intorno completo H_c tale che per ogni x appartenente ad H_c, al dominio, con c al più escluso, il corrispondente valore della funzione è compreso fra $l-\varepsilon$ e $l+\varepsilon$

· Limite infinito

si dice che una funzione $f(x)$ tende a più (meno) infinito per x che tende a c se fissato un numero M positivo (negativo) è possibile determinare un intorno I completo di c tale che per ogni valore di x appartenente a I si ha che il corrispondente valore della funzione è maggiore (minore) di M.

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

$$M>0 \Rightarrow \forall x \in I : f(x) > M \qquad\qquad M<0 \Rightarrow \forall x \in : f(x) < M$$

Teorema

se due o più funzioni per x che tende a c tendono ciascuna ad un limite finito, la funzione somma (differenza) delle funzioni date, per x che tende a c ha per limite la somma (differenza) dei limiti.

Ci limitiamo a dimostrare il teorema nel caso di due funzioni

Ip $\quad \lim_{x \to c} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to c} g(x) = l_2$

Ts $\quad \lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$

fissato un numero ε positivo e arbitrario e preso in considerazione $\frac{\varepsilon}{2}$ si ha:

$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \Rightarrow H_{1c} : \forall x \in H_{1c} - \{c\} =$

$= |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ (3)

$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \Rightarrow H_{2c} : \forall x \in H_{2c} - \{c\} =$

$= |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ (4)

Se consideriamo l'intersezione fra H_{1c} e H_{2c}, per un teorema di topologia si ottiene ancora un intorno H_c, ma allora la (3) e la (4) per $x \in H_c - \{c\}$ valgono simultaneamente. Possiamo quindi sommare membro a membro le due disequazioni:

$|f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \varepsilon$ (ma $|a+b| \leq |a| + |b|$)

Il modulo della somma di due numeri è minore o uguale alla somma dei moduli:

$|f(x) - l_1 + g(x) - l_2| < \varepsilon$

$|[f(x) + g(x)] - (l_1 + l_2)| < \varepsilon$ e ciò dimostra la tesi.

Teorema:

$$\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

Teorema

una funzione costante è continua in tutto il suo dominio

I_p $f(x) = K$

T_s: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = K$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists H_c \quad \forall x \in H_c =$

$|f(x) - K| < \varepsilon$

$|K - K| < \varepsilon$

$0 < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$

Teorema

la funzione $f(x) = x$ $(y = x)$ è continua in tutto $\mathbb{R}$

Sia c un qualunque numero reale, si tratta di dimostrare che

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = c$$

$\varepsilon > 0$

$|f(x) - c| < \varepsilon$ in un intorno di c

2r $|x-c|<\varepsilon$

$c-\varepsilon<x<c+\varepsilon$ che è proprio un intorno di c

Teorema

se due o più funzioni sono continue in un punto c anche la funzione somma è continua nel punto c.

La dimostrazione è immediata tenendo conto della definizione di continuità in un punto c e del teorema della somma dei limiti.

In modo perfettamente analogo si dimostra che se due funzioni sono continue nel punto c anche le funzioni differenza, prodotto e quoziente sono continue nel punto c.

La funzione

$$a x$$

con a costante è continua in tutto $\mathbb{R}$ perché prodotto di due funzioni

Teorema

la funzione x^n con n numero naturale $(n \in \mathbb{N})$ è una funzione continua perché prodotto di funzioni continue.

$$x^n = \underset{1}{x} \cdot \underset{2}{x} \cdot \underset{3}{x} \cdots \underset{n}{x}$$

Teorema

Qualunque polinomio in x è una funzione continua.

Teorema dell'unicità del limite:

se una funzione f(x), per x che tende a c ammette un limite, questo è unico.

Ip $\lim_{x\to c} f(x) = l_1$

$\lim_{x\to c} f(x) = l_2$ $\quad l_1 \neq l_2$

Ts l'ipotesi è assurda.

$\varepsilon>0 \Rightarrow I_c \; l_1-\varepsilon<f(x)<l_1+\varepsilon \quad$ et $I_c \; l_2-\varepsilon<f(x)<l_2+\varepsilon \quad ; \quad I_c = I_c \cap I_c$

se $l_1<l_2 \Rightarrow l_1-\varepsilon<l_2-\varepsilon$ e $l_1+\varepsilon<l_2+\varepsilon$

$l_1-\varepsilon<l_2-\varepsilon<f(x)<l_1+\varepsilon<l_2+\varepsilon$

$l_2-\varepsilon<l_1+\varepsilon$

$l_2-l_1<2\varepsilon$

$\varepsilon>\dfrac{l_2-l_1}{2}$ il che contraddice la definizione di limite in cui ε deve essere arbitrariamente piccolo

· Teorema della permanenza del segno:

Se per x tendente a c una funzione $f(x)$ tende ad un limite finito non nullo, esiste un intorno di c tale che per ogni x dell'intorno, escluso col più, la funzione assume valori che hanno lo stesso segno di l

I_p: $\exists \lim_{x \to c} f(x) = l$ con $l \neq 0$

T_s: $\exists H_c : \forall x \in H_c :$

$$f(x) \cdot l > 0$$

$$\varepsilon = |l| \Rightarrow \exists H_c : \forall_x \in H_c$$

$$l - |l| < f(x) < l + |l|$$

1°caso) $l < 0 \Rightarrow l + |l| = 0 \;:\; f(x) < 0$

2°caso) $l > 0 \Rightarrow l - |l| = 0 \;:\; f(x) > 0$

· Teorema del confronto:

Date 3 funzioni $g(x)$, $f(x)$ e $\varphi(x)$ definite in uno stesso dominio, tale che $f(x)$ è compresa fra le altre tre e che $g(x)$ e $\varphi(x)$ tendono ad uno stesso limite per x che tende a c, allora risulta che anche $f(x)$ tende a l per x che tende a c.

I_p: $\forall x \in D$

$$g(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

$$\lim_{x \to c} g(x) = l \qquad \lim_{x \to c} \varphi(x) = l$$

T_s: $\lim_{x \to c} f(x) = l$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \qquad H_{1c}$$

$$l - \varepsilon < \varphi(x) < l + \varepsilon \qquad H_{2c}$$

$$H_c = H_{1c} \cap H_{2c} \cap D - \{c\}$$

$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \qquad \text{C.V.D.}$$

Limite all'infinito

si dice che una funzione $f(x)$ tende a un numero l per x che tende a meno più infinito se, fissato un numero ε arbitrario e piccolo è possibile in conseguenza determinare un numero N tale che per ogni x minore di meno N maggiore di N si ha che il corrispondente valore della funzione è compreso nell'intervallo $l-\varepsilon$, $l+\varepsilon$.

Limite infinito all'infinito

si dice che una funzione $f(x)$ tende a meno più meno più infinito per x che tende a meno meno più più infinito se fissato un numero minore di minore di maggiore M positivo è possibile in conseguenza determinare un numero N positivo tale che per ogni x maggiore minore di meno N maggiore di N si ha che il corrispondente valore della funzione è minore di meno M maggiore di M maggiore di meno M maggiore di M.

3° Limite fondamentale

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

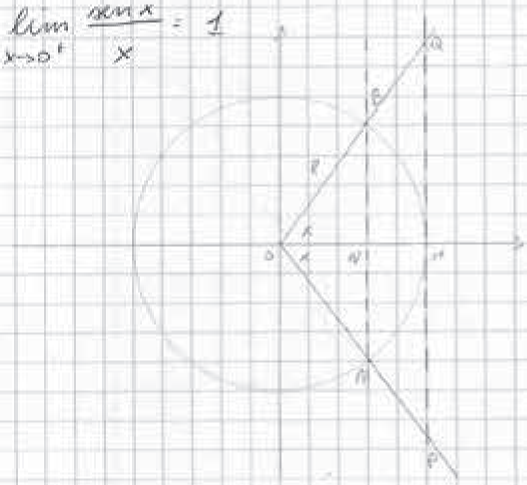
purché x sia misurato in ~~deg~~ radianti.

Dimostrazione:

limitiamo questa parte della dimostrazione nel caso che x si avvicini a 0 da destra.

Si tratta di dimostrare quindi che:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$



Consideriamo il cerchio trigonometrico di raggio 2 e su di esso tracciamo l'angolo x e il suo opposto misurati in radianti. Tracciamo il segmento che unisce le intersezioni della circonferenza con il lato degli angoli.

Per un teorema sulla rettificazione della circonferenza, si ha che l'arco AB è maggiore del segmento AB e minore del segmento PQ:

$AB < \widehat{AB} < PQ$ cioè

$2NB < 2\widehat{MB} < 2MQ$ dividiamo per 2:

$\frac{NB}{2} < \frac{\widehat{MB}}{2} < \frac{MQ}{2}$ cioè:

$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ divido per $\operatorname{sen} x$:

$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$ ricavo i reciproci, considerando che le disuguaglianze si invertono:

$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$

poiché:

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ e $\lim_{x \to 0} 1 = 1$,

per il teorema del confronto si ha che:

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, sapendo che x si avvicina da destra.

Calcoliamo ora il limite nel caso che x si avvicini da sinistra; si tratta di dimostrare che:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

pongo $x = -u$, si ha:

$$\lim_{-u \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-u)}{-u} = \lim_{u \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} u}{-u} = \lim_{u \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{u}.$$

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$$

Quindi possiamo generalizzare, dicendo che per x tendente a 0 per valori sia positivi che negativi, si ha:

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} = 1\right)$ 1° limite [illegible]

Continuità della funzione di seno:

Th $\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c \qquad (c \in \mathbb{R})$

Verificare questo limite significa far vedere che, fissato un numero ε positivo e arbitrario, la disequazione:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| < \varepsilon$$

è risolta in un intorno di c.

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| =$ 2

~~consideriamo~~:

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| = \left|2 \operatorname{sen} \frac{x-c}{2}\right| \left|\cos \frac{x+c}{2}\right| \leq 2\, \frac{|x-c|}{2} \cdot 1$

$\frac{x-c}{2} \geq \operatorname{sen} \frac{x-c}{2} \;/\; \cos \frac{x+c}{2} \leq 1$

si ha:

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| \leq |x-c| \quad (1)$

$|x-c| < \varepsilon \quad (2)$ risolviamo la seguente disequazione

$-\varepsilon < x-c < \varepsilon$

$c-\varepsilon < x < c+\varepsilon$

Dunque per x appartenente all'intorno di c $(c-\varepsilon);(c+\varepsilon)$ è vera la (2) e a maggior ragione si ha:

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| < \varepsilon$ a causa della (1)

Dato un insieme A di numeri reali, se esiste un numero K che è maggiore (minore) di tutti gli elementi dell'insieme, l'insieme si dice superiormente limitato (inferiormente limitato) e K è un maggiorante (minorante). È ovvio che tutti i numeri maggiori (minori) di K sono altrettanti maggioranti; ciò non esclude però che ci siano dei maggioranti minori (maggiori) di K

Teorema

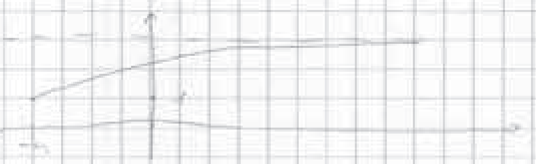
fra tutti i maggioranti (minoranti) di un insieme esiste ed è unico il più piccolo (grande) (Weierstrass) che è detto l'ESTREMO SUPERIORE (inferiore) dell'insieme

Se l'estremo superiore (inferiore) dell'insieme appartiene all'insieme, allora si chiama il MASSIMO (minimo) dell'insieme

Ex: (2, 5]

è evidente che il 5 è l'estremo superiore dell'insieme, ma è anche il massimo, mentre il 2 è solo l'estremo inferiore dell'insieme.

TUTTI i caratteri di una immagine si attribuiscono alla funzione



$I = [1; 5)$
$D = [-4; +\infty)$

Punti di accumulazione di un insieme:

un punto P dell'*ambiente a cui appartiene un insieme si dice punto di accumulazione dell'insieme se in un suo qualunque intorno (completo o no) appartengono infiniti punti dell'insieme.

*Ambiente: è un insieme che contiene il nostro insieme come sottoinsieme

Un punto di accumulazione dell'insieme può e non può far parte dell'insieme. Appartiene sicuramente all'ambiente.

I punti dell'insieme che non sono punti di accumulazione si chiamano punti isolati.

L'insieme D dei punti di accumulazione di un insieme A si chiama insieme derivato dell'insieme.

$A(0,1) \Rightarrow D(A) = \{\frac{1}{2}\}$
$B(2,5) \Rightarrow D(B) = [2,5]$
$D[2,5] \Rightarrow [2,5]$

Se un insieme coincide con il proprio derivato (come nell'ultimo es.) si chiama perfetto.

Derivata

Data una funzione $f(x)$ definita in D e un punto c del suo dominio, si chiama derivata della funzione nel punto c il limite (esistente e finito) del rapporto incrementale della funzione calcolato a partire dal punto c quando l'incremento della variabile indipendente tende a zero

Teorema:

la derivata di una costante è zero

Teorema

la derivata di una costante moltiplicativa passa inverato nella derivazione

Ip $y = k f(x)$

Ts $D\, k f(x) = k \cdot D f(x)$

rapporto incrementale della funzione calcolato a partire da x

$$Dkf(x) = \lim_{h \to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k[f(x+h) - f(x)]}{h} = k D f(x)$$

Teorema

Ip $\exists\, D f(x)$

$\exists\, D g(x)$

Ts: $\exists\, D\, [f(x) \pm g(x)] = D f(x) \pm D g(x)$

$$D[f(x) \pm g(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \pm g(x+h) - f(x) \mp g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= D f(x) \pm D g(x)$$

Funzione potenza:

$D x^n = n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Teorema

$y = f(x) \cdot g(x) \cdot \varphi(x)$

$y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot \varphi'(x)$

Teorema

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$

$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[illegible]}$

51 Funzioni elementari

$$\begin{cases} y = x^n \\ y' = n x^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y' = \cos x \end{cases}$$ dimostrato (pag 15)

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y' = -\operatorname{sen} x \end{cases}$$ dimostrato (pag 158)

$$\begin{cases} y = b^x \\ y' = b^x \lg_e b \quad \text{se } b = e \Rightarrow y' = e^x \end{cases}$$ dimostrazione (pag 15)

$$\begin{cases} y = \lg_b x \\ y' = \frac{1}{x} \lg_b e \quad \text{se } b = e \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \end{cases}$$ dimostrazione (pag 15)

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} x \\ y' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$ dimostrazione (pag 15)

$$\begin{cases} y = \operatorname{ctg} x \\ y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \end{cases}$$

Ip

$\exists f(x)$:

$f'(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$

Th

$f(x) = K \ \forall x \in [a, b]$

Corollario 1° e 2° del Teorema di Lagrange a pag 410-411.

Teorema

Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto c, è ivi continua.

Ip:

$\exists f(x)$

$\exists f'(c)$: pongo c+h=x x-h=x-c

$R = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ numero finito

Th

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Considero l'identità

$f(x) - f(c) = f(x) - f(c)$

$f(x) - f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c)$

$f(x) = f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c)$

Siccome questa è un'identità, il limite del primo membro è uguale al limite del secondo membro:

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c) + f(c) \right]$

Dove:

$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ è il rapporto incrementale della funzione calcolato a partire da c.

$f(c)$ è una costante, che non dipende da x.

Si ha:

$\lim_{\cancel{x \to c}} f(x) = f(c) + f'(c) \cdot 0$

Siccome $f'(c)$ è per ipotesi un numero finito, moltiplicato per zero è zero:

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

61

Funzione crescente in un punto pag 125

Si dice che una funzione $f(x)$ è crescente in un punto c se esiste un intorno completo di c tale che per ogni x appartenente all'intorno e al dominio escluso al più c, si ha che se x è minore di c allora $f(x)$ è minore di $f(c)$ e se x è maggiore di c allora $f(x)$ è maggiore di $f(c)$.

$$\exists H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\} \begin{cases} x < c \Rightarrow f(x) < f(c) \\ x > c \Rightarrow f(x) > f(c) \end{cases}$$

Funzione decrescente in un punto pag 125

Si dice che una funzione $f(x)$ è decrescente in un punto c se esiste un intorno completo di c tale che per ogni x appartenente all'intorno e al dominio escluso al più c, si ha che se x è minore di c allora $f(x)$ è maggiore di $f(c)$ e se x è maggiore di c allora $f(x)$ è minore di $f(c)$.

$$\exists H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\} \begin{cases} x < c \Rightarrow f(x) > f(c) \\ x > c \Rightarrow f(x) < f(c) \end{cases}$$

· Teorema pag 125-13

Se una funzione $f(x)$ ha in un punto c la derivata positiva, la funzione è crescente in c

Ip:

$\exists f'(c) > 0$

Ts:

$f(x)$

$\exists H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\}$

$f(x) < f(c)$ se $x < c$

$f(x) > f(c)$ se $x > c$

$f'(c) > 0$:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(x) > 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$\exists H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\}$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \begin{cases} x < c \Rightarrow f(x) < f(c) \\ x > c \Rightarrow f(x) > f(c) \end{cases}$$

In modo analogo si dimostra che se la derivata di una funzione in un punto è negativa, la funzione è decrescente in un intorno del punto

Teorema:

Se una funzione $f(x)$ è continua in un punto c allora al tendere a zero dell'incremento dato alla x a partire dal punto c tende a zero anche il corrispondente incremento subito dalla funzione

I_p:

$$\lim_{\substack{x \to c \\ (\Delta x \to 0 \,=\, x - c \to 0)}} f(x) = f(c)$$

T_s:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = 0$$

$\Delta f(x) \cdot \Delta y = f(x) - f(c)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x) - f(c)] = \lim_{\Delta x \to 0} f(x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(c) - f(c) = 0$$

Teorema

Se una variabile y è funzione di una variabile z e z è a sua volta funzione di x, allora y è funzione di x

$y = f(z)$ derivabile $\qquad z = f(x)$ derivabile

T_s

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Consideriamo il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Siccome ho supposto la funzione $f(z)$ e la funzione $f(x)$ derivabili, e se per un noto teorema (ad ogni funzione derivabile rispetto la derivabilità) anche continue e quindi quando tende a zero uno degli incrementi, tendono a zero anche gli altri incrementi.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

poiché $z = f(x)$ è funzione continua, poiché tende a 0 Δx tende a 0 anche Δz

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

[$\frac{dy}{dz}$ derivata di y rispetto a z, $\frac{dz}{dx}$ = derivata di z rispetto a x

Teorema:

Se una funzione $f(x)$ ha in un punto c la derivata prima uguale a zero e la derivata seconda positiva, la funzione ha in c un minimo relativo.

Ip:

$\exists\, f(x)$

$f'(c) = 0 \quad (1)$

$f''(c) > 0 \quad (2)$

Th:

$\exists\, H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\}$:

$f(x) > f(c)$

$f''(c) > 0$:

Dall'ipotesi (2) per un teorema precedente posso affermare che in c la funzione $f'(x)$ è crescente (ho considerato $f''(c)$ la derivata prima di $f'(x)$).

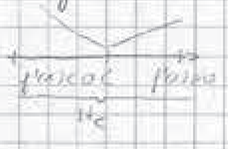
$f'(x)$ è crescente, cioè:

$\exists\, H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\}$:

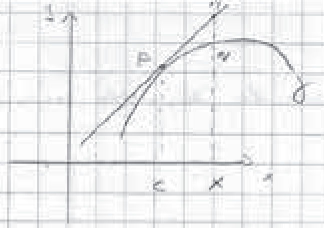
$$\left.\begin{array}{ll} x < c & f'(x) < f'(c) \\ x > c & f'(x) > f'(c) \end{array}\right\} (3)$$

Ma tenendo conto dell'ipotesi (1), la (3) diventa:

$$\begin{array}{ll} x < c & f'(x) < 0 \\ x > c & f'(x) > 0 \end{array}$$



Di conseguenza la $f(x)$ ha in c un minimo relativo.



Si dice che una curva f in un punto P (dove esiste la tangente alla curva) ha la concavità negativa se esiste un intorno completo H_c tale che per ogni x appartenente all'intorno e al dominio, escluso c, l'ordinata del punto M appartenente alla tangente in P e avente per ascissa x è maggiore di $f(x)$

Se in un punto P la derivata seconda è positiva la concavità è positiva

$P[c; f(c)]$

$y - f(c) = f'(c)(x-c)$

$N[x; f(x)]$

$M[x; f(c)+f'(c)(x-c)]$

Consideriamo la seguente funzione di x:

$$d(x) = \overline{NM} = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)$$

Deriviamo ripetutamente

$$d'(x) = f'(x) - f'(c) \qquad (1)$$

$$d''(x) = f''(x)$$

Siccome per ipotesi si ha

$$f''(c) > 0$$

Ma dalla (1) si ha anche

$$d'(c) = f'(c) - f'(c) = 0$$

Dunque la funzione $d(x)$, avendo nel punto c la derivata prima nulla e la derivata seconda positiva ha in c un minimo relativo cioè:

$$\exists H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\}$$

$$d(x) > d(c)$$

ma $d(c)$ è nullo, quindi la (3) diventa

Dunque ricordando come è stata definita la funzione $d(x)$ in tutto il suo intorno di c escluso c l'ordinata del punto M è maggiore dell'ordinata del corrispondente punto N della tangente in P e questo stabilisce la definizione di concavità positiva nel punto P.

In modo analogo si dimostra che se la derivata seconda è negativa la concavità è negativa

Teorema

un punto P di una curva f si dice di flesso se in quel punto la concavità cambia di segno:
se in P la concavità passa da negativa a positiva il flesso si dice ascendente,
se invece la concavità passa da positiva a negativa il flesso si dice discendente

Ordine di una curva

l'ordine di una curva è il numero massimo di punti che la curva può avere in comune con una retta.

Teorema di Rolle
Teorema di Lagrange } libro pag 406 a 408

Teorema
Teorema } pag 566

Integrale indefinito

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è la primitiva generalizzata della funzione $f(x)$ stessa.

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + k \quad \text{con } n \neq -1}$$

infatti:

$$D\, \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + k = x^n$$

Se poi $n = -1$:

$$\int x^{-1} dx = \lg|x| + k$$

Integrale di una costante moltiplicativa

$$\boxed{\int n\, f(x)\, dx = n \int f(x)\, dx}$$

infatti:

$$D \int n\, f(x)\, dx = n\, D \int f(x)\, dx = n\, f(x)$$

Somma di integrali

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx}$$

infatti:

$$D \int [f(x) \pm g(x)]\, dx = D \int f(x)\, dx \pm D \int g(x)\, dx = f(x) \pm g(x)$$

$$\boxed{\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{n+1} \cdot [f(x)]^{n+1} + C}$$

infatti:

$$D\, \frac{1}{n+1} \cdot [f(x)]^{n+1} + C = \frac{1}{\cancel{n+1}} [f(x)]^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot f'(x) = [f(x)]^n \cdot f'(x)$$

Se è $n = -1$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \lg|f(x)| + C$$, la verifica è immediata

51 Integrazione per parti.

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x)\, dx \qquad (1)$$

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = g(x)\, F(x) - \int g'(x)\, F(x)\, dx \qquad (2)$$

Per poter applicare la formula di integrazione per parti, occorre saper integrare almeno una delle due funzioni integrande. Se poi si sanno integrare entrambe, allora la scelta cade su una delle due. Nel caso (1) si è scelto la $g(x)$ quale funzione a rimanere invariato, esso è detto fattore finito, mentre ciò che rimane, cioè la $g(x)\, dx$ è il fattore differenziale. La $G(x)$ è una primitiva di $g(x)$ e la $f'(x)$ è la derivata di $f(x)$. Dal primo membro al secondo membro si passa ad un altro integrale se questo è per noi risolubile, allora anche l'integrale di partenza è risolubile, poiché la risolto finisce qui. Il caso (2) è simile al caso (1), solo che come funzione che rimane invariato, il fattore definito, si è preso la $g(x)$, quindi si ha che $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e $g'(x)$ è la derivata di $g(x)$.

Dimostrazione

Si hanno 2 funzioni: $u(x)$ e $v(x)$

$D[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$u(x) \cdot v'(x) = D[u(x) \cdot v(x)] - u'(x) \cdot v(x)$

pongo:

$u(x) = f(x)$

$v'(x) = g(x)$

$f(x)\, g(x) = D[f(x) \cdot G(x)] - f'(x) \cdot G(x) \qquad D[G(x)] = v'(x)$

Integriamo ambo i membri:

$\int [f(x)\, g(x)]\, dx = f(x)\, G(x) - \int f'(x)\, G(x)$

Trapezoide

Il trapezoide è un trapezio rettangolo che ha un arco di curva al posto del lato obliquo

Area di un dominio (secondo Peano-Giordano) (Vedi pag 65 a)

Si considera l'insieme dei poligoni contenuti nel dominio. Essi sono infiniti e l'insieme è superiormente limitato per cui esiste l'estremo superiore che è definito area interna ~~di un~~ del dominio.

Si considera l'insieme dei poligoni che contengono il dominio. Questo insieme è inferiormente limitato per cui esiste l'estremo inferiore che è definito area esterna del dominio.

Se l'area interna e l'area esterna coincidono, questo valore è l'area del dominio.

Quadratura del trapezoide

Considero i plurirettangoli inscritti e circoscritti al trapezoide.

L'area interna del trapezoide è l'estremo superiore se esiste dell'area dei plurirettangoli inscritti.

L'area esterna del trapezoide è l'estremo inferiore se esiste dell'area dei plurirettangoli circoscritti.

Come nel quadrare il cerchio non si perde la generalità della trattazione se consideriamo solo i poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio medesimo anziché tutti i poligoni contenenti e contenuti nel cerchio, così nel quadrare il trapezoide è lecito usare solo i plurirettangoli rispettivamente inscritti e circoscritti ad esso.

L'integrale definito:

Consideriamo la funzione $f(x)$ e supponiamo: $f(x) \geq 0 \;\forall x \in [a,b]$.

Consideriamo due rette orientate e facciamo l'ipotesi che la funzione sia limitata, che non va ~~a~~ a $\pm\infty$.

Quindi la funzione ha l'estremo superiore e inferiore. Secondo una legge qualunque dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli parziali e indichiamo con $\delta_1, \delta_2, \delta_n$ tali intervalli. I numeri $\delta_1, \delta_2, \delta_n$ per convenzione li assumiamo positivi se il verso che va da a a b coincide col verso positivo stabilito sulla retta. In caso contrario detti numeri saranno negativi. Indichiamo con

$m_1; m_2; \dots; m_n$

gli estremi inferiori della funzione rispettivamente in $\delta_1; \delta_2; \dots; \delta_n$.

Costruiamo poi il numero:

$$s_1 = m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + \dots + m_n \delta_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i$$

10) Di numeri del tipo «s» ne possiamo scrivere infiniti. Essi, che vengono chiamati somme per difetto sono tanti quante sono le possibili partizioni dell'intervallo [a, b] in intervalli parziali.

Se l'insieme

$$\{s\}$$

è superiormente limitato (e lo sarà senz'altro se la funzione è limitata nell'intervallo [a, b]), l'estremo superiore dell'insieme $\{s\}$ si chiama INTEGRALE DEFINITO PER DIFETTO della funzione nell'intervallo [a, b] e si indica:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

Indichiamo con

$$M_1 ; M_2 ; \ldots ; M_n$$

gli estremi superiori della funzione rispettivamente in $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$

Costruiamo il numero:

$$S_1 = M_1 \delta_1 + M_2 \delta_2 + \ldots + M_n \delta_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i$$

Di numeri del tipo «S» ne possiamo scrivere infiniti. Essi che vengono chiamati somme per eccesso sono tanti quante le possibili partizioni dell'intervallo [a, b] in intervalli parziali.

Se l'insieme

$$\{S\}$$

è inferiormente limitato il suo estremo inferiore si chiama INTEGRALE DEFINITO PER ECCESSO della funzione nell'intervallo [a, b] e si indica:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Definizione

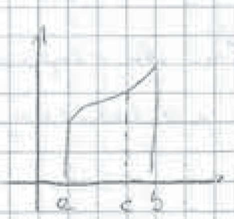
se l'integrale definito per difetto e l'integrale definito per eccesso della funzione in [a, b] coincidono, il loro comune valore si chiama INTEGRALE DEFINITO della funzione in [a, b]. (Secondo Mengoli-Cauchy)

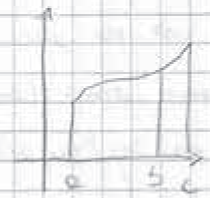
$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

Interpretazione dell'integrale definito in un Riferimento Cartesiano Ortogonale

Se nel riferimento cartesiano ortogonale consideriamo il grafico ~~della~~ di una funzione relativamente ad un intervallo $[a,b]$, nasce un trapezoide limitato dall'arco AB, dalle ordinate di A e B e dall'asse delle x.

È allora immediato il significato geometrico delle varie aree minuscole: ogni area minuscola è l'area di un plurirettangolo inscritto nel trapezoide. Si ha poi immediatamente che ogni area maiuscola è l'area di un plurirettangolo circoscritto al trapezoide. Ne segue che l'integral definito per difetto geometricamente è rappresentato dall'area interna del trapezoide mentre l'integral definito per eccesso coincide con l'area esterna del trapezoide e l'integrabilità della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ secondo Mengoli-Cauchy ha come corrispettivo geometrico la quadrabilità del trapezoide secondo Peano Giordano.





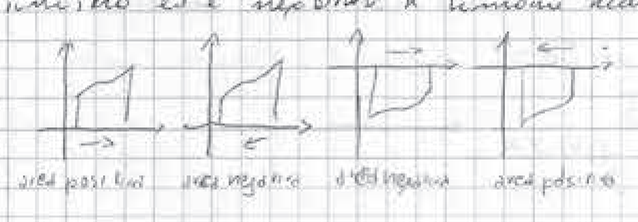
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Si è fatto una convenzione nel segno delle aree dei trapezoidi in modo da mantenere il significato geometrico dell'integral definito: l'area è positiva se rimane nella sinistra ed è negativa se rimane nella destra rispetto al verso di percorrenza.



Funzione integrale:

L'integral da a a x di una funzione in dx, si dice che è una funzione integrale della funzione integranda $f(x)$

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)$$

Ogni funzione integrale è una primitiva della funzione integranda. (teorema di Torricelli o fondamentale del calcolo integrale)

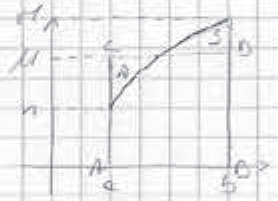
11Y Teorema del valore medio

Dato l'integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

esiste ed è unico un numero μ compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo maggiore della funzione relativamente all'intervallo $[a,b]$, tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a)$$



se $D=S$ si ha che l'area del rettangolo ABCD, che è $\mu(b-a)$, è uguale all'area del trapezoide.

Dal teorema del valor medio si ricava che:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$ μ è sempre compreso fra l'estremo inf. e sup.

Teorema di Torricelli o fondamentale del calcolo integrale

Se una funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti dove viene considerata, allora ogni sua funzione integrale è una primitiva della funzione, cioè

Si ha la funzione integrale:

$$\int_c^x f(x)\,dx$$ $\left[\int_c^x f(x)\right.$ è una funzione per l'x che è all'integrale, cioè: $\left.\int_c^x \text{per} \to f(x)\,dx\right]$

Si tratta di dimostrare che

$$D\int_c^x f(x)\,dx = f(x)$$

purché $f(x)$ sia continua.

$$\overset{*}{\lim_{h\to 0}} \left[\int_a^{c+h} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right]\cdot\frac{1}{h} = \overset{**}{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_a^c f(x)\,dx} + \int_c^{c+h} f(x)\,dx - \cancel{\int_a^c f(x)\,dx}\right].$$

* ho calcolato la derivata della funzione integrata basandomi sulla definizione di derivata.

** $\int_a^{c+h} = \int_a^c + \int_c^{c+h}$

Si ha:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\,dx.$$

Applico il teorema del valor medio (si noti che nella formula $b-a = h$, perché $b=c+h$ e $a=c$).

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot h\cdot \overset{***}{f}(c+\vartheta h) \quad \text{con } 0<\overset{\text{teta}}{\vartheta}<1$$

$$\lim_{h\to 0} f(c+\vartheta h) = f(c), \quad \text{con } c \text{ numero qualunque, quindi } c = x$$

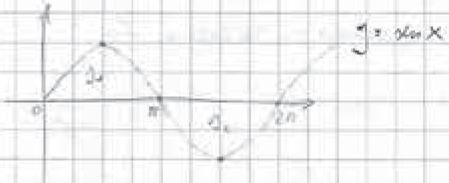
*** $f(c+\vartheta h)$ è μ, numero compreso fra c e $c+h$, infatti qualunque valore di ϑ compreso fra 0 e 1 rende $f(c+\vartheta h)$ compreso fra c e $c+h$.

Considerazioni sul calcolo delle aree:

- l'area delimitata da due curve è uguale alla differenza delle aree delle due curve calcolata nell'intervallo a, b in cui a e b sono ascisse dei punti di intersezione fra le due curve:

$$s = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x) \right] dx$$

-



Se calcoliamo l'integrale definito nell'intervallo $(0, 2\pi)$ della funzione sen x, questo è zero perché notiamo che pur essendo s_1 e s_2 uguali, come area, secondo le convenzioni fatte s_1 è positiva, s_2 è negativa per cui la somma è zero, mentre l'area effettiva è 2. Occorre quindi stabilire il grafico di una funzione prima di calcolare l'integrale definito in un certo intervallo.

Oscillazione: l'oscillazione di una funzione è la differenza fra l'estremo superiore e l'estremo inferiore.

12 V Teorema di Riemann sull'integrale definito

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(x)$ ammette l'integrale definito nell'intervallo $[a,b]$ è che:

1) la funzione sia in $[a,b]$ limitata

2) fissato un numero $\mathcal{E}$ positivo arbitrario è possibile in conseguenza determinare una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ in intervalli parziali $\delta_1\ \delta_2 \dots \delta_k \dots \delta_n$ tale che, dette $\Delta_1\ \Delta_2 \dots \Delta_k \dots \Delta_n$ le oscillazioni della funzione rispettivamente nel primo nel secondo nell'ennesimo intervallo la somma:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \Delta_k$$

sia minore di $\mathcal{E}$.

V. pag 78 esempio di funzione non integrabile.

Formula di Torricelli:

Essendo $F(x)$ una primitiva di una funzione $f(x)$, l'integrale definito nell'intervallo a, b della $f(x)$ è uguale al valore che la $F(x)$ assume in **b**, a cui viene sottratto il valore che la $F(x)$ assume in **a**.

Dimostrazione:

Ip: $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)+c$ Ts: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

$\int f(x)\,dx = F(x)+c$ dove c è una qualunque costante.

$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)+K$ dove K è una opportuna costante da determinare.

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a)+K$$

$$K = -F(a)$$

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Teorema di Cauchy:

se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili internamente ad esso, e se la derivata $\varphi'(x)$ non si annulla mai, esiste almeno un punto c interno all'intervallo, tale che

$$* \quad \frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Dimostrazione:

Ip: $\exists\ f(x), \varphi(x)$
continue in $[a,b]$
derivabili in (a,b)

$\varphi'(x) \neq 0 \ \forall x \ [a,b]$

Ts: *

osserviamo che $\varphi(b)-\varphi(a) \neq 0$ perché se così fosse allora verrebbero soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle, ma $\varphi'(x) \neq 0 \forall x$

Costruiamo la funzione $g(x)$:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left[\varphi(x)-\varphi(a)\right]$$

$g(a) = g(b) = 0$

$g(x)$ è continua

$g(x)$ è derivabile

Quindi per la $g(x)$ valgono le ipotesi del teorema di Rolle:

$\exists\, c : g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$$

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi'(c)$$

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)$$

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

13r Teorema di De L'Hospital:

Siano $f(x)$ e $\varphi(x)$ due funzioni continue e nulle nel punto $x=c$ e derivabili in un intorno H di c (escluso al più c). Inoltre in H sia $\varphi'(x)$ diverso da zero. In tali ipotesi, se esiste il $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ esiste allora anche il $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$$