

Teoria dei sistemi e controlli automatici - Dettaglio Videolezioni

Docenti video:

Alberto Isidori - Università "La Sapienza" di Roma (Roma - Italy)

Salvatore Monaco - Università "La Sapienza" di Roma (Roma - Italy)

Prof. Salvatore Monaco

Lezione n. 1: Definizione di Sistema

- Introduzione alla teoria dei sistemi
- teoria dei sistemi: le radici
- dal modello al sistema astratto
- definizione di sistema astratto
- sistema astratto orientato
- sistema astratto orientato dinamico
- sistema causale

Lezione n. 2: I Sistemi allo studio

- Introduzione
- rappresentazioni con lo stato
- rappresentazioni lineari e stazionarie
- rappresentazioni lineari e stazionarie: esempi
- rappresentazioni equivalenti
- sistemi a tempo continuo e tempo discreto
- schemi di simulazione
- sistemi campionati

Lezione n. 3: Rappresentazioni approssimate

- introduzione
- rappresentazioni con lo stato non lineari
- alcuni esempi
- approssimazioni lineari di sistemi non lineari
- discussione degli esempi trattati
- campionamento e tenuta di sistemi a tempo continuo

Lezione n. 4: Analisi nel tempo delle rappresentazioni lineari

- Introduzione
- dalla rappresentazione implicita a quella esplicita: caso generale
- caso generale: esponenziale di matrice
- dalla rappresentazione implicita a quella esplicita: caso generale
- decomposizione in evoluzione libera e forzata
- calcolo delle matrici $F(t)$, $H(t)$, $Y(t)$, $W(t)$
- la risposta impulsiva
- il problema della realizzazione

Lezione n. 5: La matrice di transizione

- La matrice di transizione e i cambiamenti di coordinate
- autovalori e autovettori - richiami
- Matrice di transizione: caso di autovalori reali e distinti
- Matrice di transizione: caso di autovalori reali e A semplice
- Matrice di transizione: caso di A semplice

Lezione n. 6: I modi naturali nei sistemi a tempo continuo

- Introduzione
- risposta in evoluzione libera
- modi aperiodici
- modi pseudoperiodici
- i modi nel regime forzato e in uscita
- modi naturali eccitabili
- modi naturali osservabili

Lezione n. 7: La trasformata di Laplace nello studio dei sistemi a tempo continuo

- Introduzione
- La trasformata di Laplace: definizione e proprietà
- il modello nel dominio complesso
- La struttura ed il calcolo delle soluzioni

La funzione di trasferimento

Lezione n. 8: Il regime permanente e il comportamento in frequenza

introduzione

la risposta a regime permanente: definizione e condizioni di esistenza

la risposta a regime permanente per ingressi periodici

la risposta armonica

il comportamento in frequenza

la risposta transitoria e parametri caratteristici

Lezione n. 9: Analisi nel dominio complesso dei sistemi a tempo continuo

Introduzione

Calcolo della risposta in evoluzione libera

calcolo della risposta ad ingressi canonici

la risposta a regime permanente ad ingressi polinomiali

la risposta indiciale

tempo di salita e sovraelongazione

legami con il comportamento in frequenza

Lezione n. 10: Le rappresentazioni grafiche della risposta armonica

Introduzione

funzione di trasferimento: rappresentazione poli zeri

forma di Bode

I diagrammi di Bode

termine costante

termine monomio

termine binomio

termine trinomio

Lezione n. 11: La "trasformata zeta" nello studio dei sistemi a tempo discreto

La trasformata Z e le proprietà

Il modello nel dominio complesso

analisi nel dominio della variabile complessa

Un esempio

La funzione di trasferimento

Lezione n. 12: La stabilità: definizioni e condizioni

introduzione

La stabilità interna

stato di equilibrio e stabilità

la stabilità del moto

le proprietà dei sistemi lineari

condizioni di stabilità per i sistemi lineari

la stabilità esterna

Lezione n. 13: La stabilità interna dei sistemi lineari

introduzione

sistemi a tempo continuo: condizioni di stabilità e stabilità asintotica

criterio di Routh

criterio di Routh: casi singolari

estensioni del criterio di Routh

sistemi a tempo discreto: condizioni di stabilità e stabilità asintotica

il metodo della trasformazione bilineare

il criterio di Jury

lo studio della stabilità mediante approssimazione lineare

Lezione n. 14: I sistemi interconnessi: connessioni elementari e proprietà

introduzione

connessioni elementari: calcolo della funzione di trasferimento

connessioni elementari: calcolo del modello interno

connessioni elementari: proprietà

un esempio

Prof. Alberto Isidori

Lezione n. 15: Esempi di schemi di controllo (I parte)

Lezione n. 16: Esempi di schemi di controllo (II parte)

Lezione n. 17: Esempi di schemi di controllo (III parte)

Lezione n. 18: Esempi di schemi di controllo (IV parte)

Lezione n. 19: Esempi di schemi di controllo (V parte)

Lezione n. 20: Introduzione all'analisi dei sistemi a retroazione

Lezione n. 21: Stabilità di sistemi a retroazione (I parte)

Lezione n. 22: Stabilità di sistemi a retroazione (II parte)

Lezione n. 23: Stabilità di sistemi a retroazione (III parte)

Lezione n. 24: Analisi della precisione (I parte)

Lezione n. 25: Analisi della precisione (II parte)

Lezione n. 26: Analisi della precisione (III parte)

Lezione n. 27: Analisi della risposta transitoria (I parte)

Lezione n. 28: Analisi della risposta transitoria (II parte)

Lezione n. 29: Funzioni di sensibilità

Lezione n. 30: Introduzione alla sintesi per tentativi

Lezione n. 31: Scelta della funzione anticipatrice

Lezione n. 32: Scelta della funzione attenuatrice

Lezione n. 33: Regolatori P.I.D.

TEORIA DEI SISTEMI E CONTROLLI AUTOMATICI

Lezione n. 1

Definizione di Sistema

Prof. Salvatore Monaco
44'16"

Introduzione alla teoria dei sistemi
Introduzione alla teoria dei sistemi
teoria dei sistemi: le radici
dal modello al sistema astratto
definizione di sistema astratto
sistema astratto orientato
sistema astratto orientato dinamico
sistema causale

Facendo una analisi semantica di "Elementi di Teoria dei Sistemi", si evince quanto segue.

Elemento deriva da elementum in latino che significa "principio, a rudimento": Ciascuna delle parti strutturali, o funzionalmente unitarie, o comunque considerate indivisibili in parti più semplici che entrano in modo essenziale nella costituzione di qualche cosa [da vocabolario IST. ENCICL. ITAL.].

Il corso tratta i rudimenti della teoria dei sistemi.

Teoria deriva dal greco: "delegazione di teori", il teoro è un componente di una delegazione inviata a consultare un oracolo o ad assistere ad una festa religiosa [da vocabolario IST. ENCICL. ITAL.].

Dunque l'insieme delle interpretazioni era una teoria.

Sistema deriva dal greco, "riunione, complesso": Qualsiasi oggetto di studio che, pur essendo costituito da diversi elementi reciprocamente interconnessi e interagenti tra loro o con l'ambiente esterno, reagisce o evolve come un tutto, con proprie leggi generali. Questa è l'accezione che daremo al termine sistema.

LA TEORIA DEI SISTEMI, in estrema sintesi, è definibile come "... un approccio unificante nello studio del comportamento dei fenomeni complessi."

IL CONTESTO E LE RADICI della teoria dei sistemi

IL CONTESTO storico collocato agli albori del 20° secolo. Il contesto è caratterizzato da quattro aspetti fondamentali.

- forte spinta verso teorie unitarie (Maxwell nel 1865 propone la teoria unificata dei fenomeni elettromagnetici, Einstein espone nel 1905 la teoria della relatività generale che interpreta le interazioni gravitazionali a cui segue il tentativo di unificare la teoria dei campi gravitazionali e quella dei campi elettromagnetici)
- disponibilità di nuovi metodi matematici di analisi (Poincarre)
- introduzione di nuovi metodi per descrivere fenomeni complessi (Boltzman)
- nascita della teoria della informazione (Shannon, Wiener)

La scoperta di forti analogie tra i processi naturali, del comportamento, i prodotti della tecnologia portano verso lo sviluppo di metodi di indagine da impiegare in diversi contesti ... naturalmente, verso l'uso del modello matematico.

È interessante andare a vedere come una spinta verso l'uso del modello, in particolare di quello matematico, ci viene data già agli albori di quella che si può considerare l'era moderna con Galileo Galilei e René Descartes.

Galilei e Descartes alla fine del 16° secolo ci dicono di usare il linguaggio matematico e come usarlo.

Galileo Galilei nel dialogo sui massimi sistemi scrive che "il libro della natura è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche senza i quali mezzi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto." Inoltre "Quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che difalchi gli impedimenti della materia; che se ciò saprà fare, io vi assicuro che le cose si risconteranno non meno aggiustatamente che i computi aritmetici.". Questo è un messaggio relativo alla valutazione della correttezza del modello matematico per cui dobbiamo eliminare gli impedimenti della materia come se la realtà tendesse a introdurre degli elementi di disturbo della verifica di un comportamento, dell'evoluzione di un dato fenomeno. Questo dimostra quanto Galilei credesse nel linguaggio matematico per la rappresentazione dei fenomeni fisici.

IL METODO CARTESIANO

Il metodo cartesiano ci dice come utilizzare il linguaggio matematico, con quattro regole fondamentali.

1. Non accettare mai nulla per vero senza conoscerlo con evidenza come tale: non comprendere cioè nei giudizi nulla che non si presenti alla ragione tanto chiaramente e distintamente da non lasciare alcun dubbio. Ovvero la qualità delle osservazioni, in chiave moderna.

2. Dividi ogni problema preso in esame in tante parti quanto più possibile per risolverlo più agevolmente. Ovvero la scomposizione in sotto-problemi, in chiave moderna.

3. Conduci ordinatamente i tuoi pensieri cominciando dalle cose semplici e più facili a conoscersi, per salire a poco a poco sino alla conoscenza più complessa. Ovvero l'approccio induttivo, in chiave moderna.

4. Fai enumerazioni tanto perfette di tutti i casi e rassegne tanto complete, da essere sicuro di non omettere nulla. Ovvero la possibilità di costruzione del modello, in chiave moderna.

Dal modello al sistema astratto

Modello = metafora; il modello è una rappresentazione per analogia come la metafora è una descrizione verbale per analogia. L'esempio è la costruzione di un modello in scala che è l'analogia, per forma, di quello che si vuole realizzare. Oppure abbiamo un secondo tipo di modello che è quello per funzione con cui voglio prendere in esame l'andamento di alcune variabili di un fenomeno osservato. Il modello matematico, che rappresenta la più alta forma di astrazione, è un insieme di variabili (logiche oppure numeriche) e relazioni tra di esse.

Una resistenza elettrica $v(t) = R \cdot i(t)$ è un esempio banale.

L'evoluzione di una popolazione di conigli e un modello che la rappresenta è un altro

esempio:

sia $p(t)$ il numero di individui e sia c il tasso di crescita, allora

$p'(t) = c \cdot p(t)$, $p'(t)$ è la derivata di $p(t)$ rispetto al tempo. La relazione ci dice che la variazione al tempo t della popolazione è proporzionale, secondo un coefficiente, alla popolazione in quell'istante di tempo.

L'uso del modello porta alla definizione di sistema astratto. Per dimostrare questo verranno illustrati due passi.

1. Fenomeni diversi possono essere rappresentati dallo stesso modello ma 2. è anche vero che uno stesso fenomeno può essere rappresentato da modelli diversi.

Analizziamo entrambi i punti.

1. Fenomeni diversi possono essere rappresentati dallo stesso modello

Considerando la relazione che c'è fra la resistenza intesa di corrente nella prima legge di ohm e la relazione che c'è fra la massa e l'accelerazione nella seconda legge della dinamica, rispettivamente $v(t) = R \cdot i(t)$ e $f(t) = m \cdot a(t)$, si nota che i due fenomeni diversi possono essere rappresentati dallo stesso modello che può essere descritto dalla relazione $x(t) = k \cdot y(t)$. Questo esprime istante per istante una relazione di proporzionalità. Analogamente può essere vista la situazione della crescita della popolazione di conigli con la dinamica di un freno a disco. Rappresentando la velocità angolare del disco in funzione di un'azione frenante, ovvero l'attrito generato sul disco, possiamo esprimere la variazione della velocità del disco secondo una relazione, per cui il momento di inerzia J per la derivata rispetto al tempo della velocità angolare è uguale all'inverso dell'azione frenante per la derivata rispetto al tempo della velocità angolare, $J \cdot \omega'(t) = -k \cdot \omega(t)$, in cui $\omega'(t)$ è la derivata prima di omega in funzione del tempo.

Quindi i due fenomeni (crescita dinamica di una popolazione di conigli e azione frenante) sono rappresentati con lo stesso modello: $a \cdot x'(t) = b \cdot x(t)$. La relazione è funzione di una sola variabile.

Nell'associare lo stesso modello a fenomeni diversi, i risultati dello studio di un fissato modello possono essere impiegati nei diversi contesti.

2. Uno stesso fenomeno può essere rappresentato da diversi modelli

Sempre prendendo in considerazione la crescita di conigli abbiamo la relazione $p'(t) = c \cdot p(t)$. Questa relazione rappresenta la variazione della popolazione nel tempo. Lo stesso vale per la relazione $p(t) = e^{c(t-t_0)} \cdot p(t_0)$. Infatti derivando entrambi i membri in funzione di t si ottiene la relazione iniziale. Quindi i due modelli sono equivalenti e rappresentano lo stesso modello. Il primo in modo implicito il secondo in modo esplicito. Il secondo è in modo esplicito in quanto è stato espresso in modo esplicito la variazione della popolazione a partire da un certo istante t_0 .

Quindi non è il modello un "equivalente astratto" di un dato fenomeno in quanto si possono avere più modelli di uno stesso fenomeno.

Un "equivalente astratto" di un dato fenomeno è la classi di equivalenza dei modelli, cioè l'insieme dei modelli che sono equivalenti tra di loro sicuramente rappresentano un certo fenomeno. I modelli equivalenti hanno un qualcosa in comune che l'evoluzione finale, ovvero i comportamenti.

Possiamo dire che la classe di equivalenza dei modelli coincide con l'insieme dei possibili comportamenti.

Ricordiamo che vogliamo poter studiare fenomeni complessi, che risultano essere l'aggregato di parti, appare naturale il termine "sistema astratto" per rappresentare la classe di equivalenza dei modelli, cioè l'insieme dei possibili comportamenti.

Per sistema si intende un aggregato rispetto ad un fissato punto di vista. L'aggregato può essere per forma, come un sistema montuoso, il sistema venoso è l'insieme delle vene; se pensiamo ad un aggregato per funzione abbiamo, ad esempio, il sistema circolatorio che è un aggregato di parti che concorrono tutte ad una stessa funzione, oppure il sistema monetario che è un aggregato di parti diverse tra di loro che concorrono tutte ad una stessa funzione.

Saranno considerati aggregati per funzione ovvero un aggregato di parti che concorrono per una funzione comune. Sarà questa l'accezione di sistema.

Il SISTEMA ASTRATTO associato ad un dato sistema fisico è la classe di equivalenza delle rappresentazioni dei possibili comportamenti, ovvero la classe di equivalenza dei modelli matematici. Quello che studieremo saranno non solo sistemi astratti ma anche sistemi orientati.

L'ingegneria studia fenomeni orientati in cui sono a priori definite relazioni causa-effetto. Questo perché l'ingegneria si occupa dello studio dei fenomeni con l'obiettivo di

intervenire sul fenomeno, quindi provocare il fenomeno, generare delle cause che saranno chiamate $u(t)$, per avere degli obiettivi, cioè per raggiungere degli obiettivi ed avere degli effetti, che saranno chiamati $y(t)$.

Tutte le ingegneria si occupa di analizzare i fenomeni per intervenire con fissati obiettivi.



Le grandezze di interesse sono naturalmente distinte in

INGRESSI: le cause $u(t)$

USCITE: gli effetti $y(t)$

Il SISTEMA ASTRATTO che è associato al fenomeno orientato è detto orientato, cioè sistema astratto orientato.

Il procedimento di costruzione del modello è condizionato da questa scelta. Infatti sono fissate delle uscite, si cerca di capire quali sono gli ingressi che fanno variare le uscite e poi, fissate le uscite e gli ingressi, si costruisce il modello.

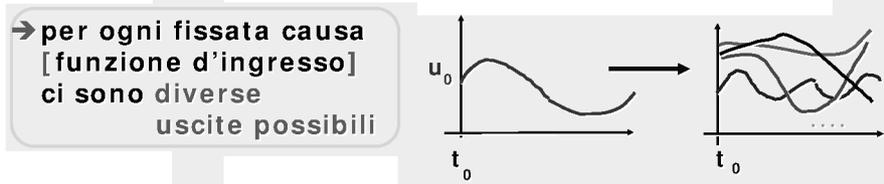


Un esempio è lo studio di come varia la posizione e l'assetto di un aereo. La posizione dell'assetto saranno le uscite, $y(t)$, ovvero un vettore a due componenti, y_1 e y_2 . Le uscite variano in funzione degli ingressi ed essi, $u(t)$, sono la configurazione alare, l'angolo del timone, la spinta dei motori. Questi tre variabili vanno a costituire un vettore di tre ingressi e a questo punto si deve capire quale sono le relazioni fra le tre variabili e quindi costruire il relativo modello.

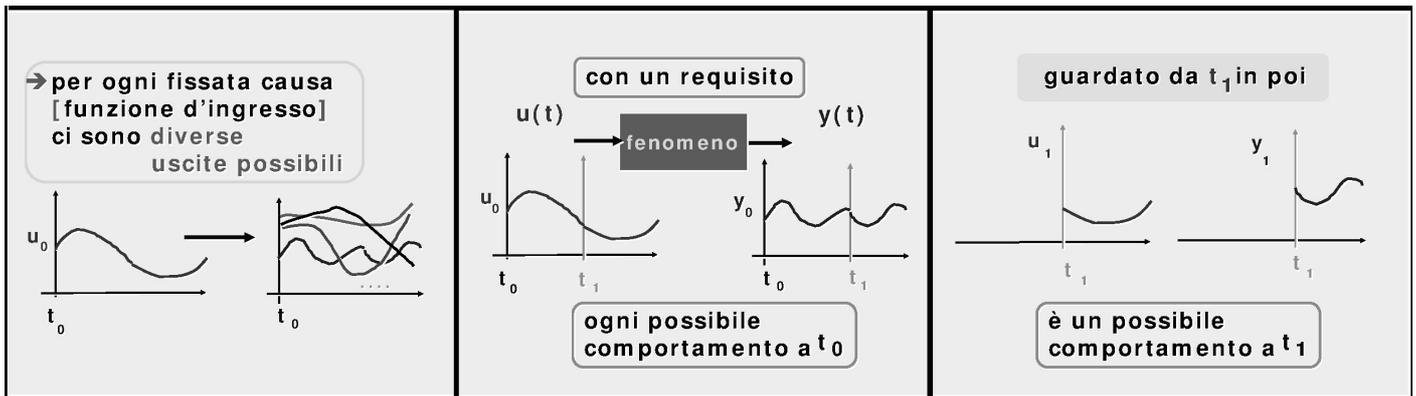
Ci possono essere fenomeni che non sono caratterizzati dalla presenza della causa, cioè l'evoluzione può essere il risultato di un comportamento associato ad un ingresso nullo e questo viene definito come un comportamento autonomo. Abbiamo un esempio di questo nell'evoluzione della popolazione dei conigli. Infatti $p'(t) = c \cdot p(t)$, abbiamo una sola variabile, la popolazione: è d'ingresso oppure di uscita? Chiaramente è una variabile di uscita. Possiamo supporre di avere una funzione d'ingresso che quantifica una immissione di popolazione, tale funzione di ingresso può essere nulla. Dunque il modello generale viene definito come $p'(t) = c \cdot p(t) + u(t)$, ma $u(t)$ può essere nulla.

IL SISTEMA ASTRATTO, ORIENTATO e DINAMICO

La dinamica è un aspetto connesso alla complessità, la teoria dei sistemi studia fenomeni dinamici. Il termine “dinamico” è l'opposto di statico oppure di istantaneo. Una definizione può essere: in un sistema dinamico, per ogni fissata causa [funzione d'ingresso], ci sono diverse uscite possibili.



Si noti come dall'ingresso u_0 all'istante t_0 ci siano diverse uscite possibili, in generale possono essere infinite. Abbiamo un requisito per il quale ogni possibile comportamento all'istante t_0 guardato da un istante t_1 in poi, è possibile comportamento all'istante t_1 .



La coppia u_1, y_1 è un possibile comportamento al tempo t_1 .

La coppia u_0, y_0 guardata da t_1 in poi, è un possibile comportamento al tempo t_1 .

Da tutto questo si deduce che la resistenza non è un sistema dinamico, perché la resistenza, ad un fissato valore dell'ingresso, corrisponde una ed una sola uscita. Viceversa, l'evoluzione della popolazione di conigli è un sistema dinamico.

IL SISTEMA ASTRATTO associato al fenomeno dinamico è detto DINAMICO.

IL SISTEMA CAUSALE

I fenomeni dinamici di interesse sono quelli causali: l'uscita al tempo t dipende dall'ingresso passato, al più dal suo valore al tempo t stesso, non dipende dal futuro.

Il SISTEMA ASTRATTO associato al fenomeno causale è detto CAUSALE.

Quindi, in sostanza, ad un dato fenomeno reale, orientato e dinamico, abbiamo associato un sistema astratto, orientato e dinamico. Lo studio prende le mosse da una sua descrizione ovvero da una sua rappresentazione.

Ricordiamo che il sistema è la classe di equivalenza dei modelli matematici, tecnicamente diremmo la classe di equivalenza delle rappresentazioni.

In questa lezione abbiamo dunque visto: il contesto e le radici, dal modello al sistema astratto, orientato, dinamico, causale.

La teoria dei sistemi propone metodi di analisi dei sistemi dinamici astratti orientati per classi di rappresentazioni, per classi di modelli equivalenti tra di loro.

> *quali metodi?*

> *per quali classi?*

□

Prof. Salvatore Monaco
45'17"

Introduzione
rappresentazioni con lo stato
rappresentazioni lineari e stazionarie
rappresentazioni lineari e stazionarie: esempi
rappresentazioni equivalenti
sistemi a tempo continuo e tempo discreto
schemi di simulazione
sistemi campionati

Introduzione

Abbiamo concluso la lezione precedente chiedendoci quali saranno i metodi che studieremo e quale sarà la classe dei sistemi che tratteremo. Abbiamo definito il sistema astratto come la classe di equivalenza dei modelli matematici che rappresentano un dato fenomeno, il sistema reale.

In questa lezione saranno precisati i sistemi che saranno trattati.

Le rappresentazioni con lo stato

Una rappresentazione di un sistema astratto è un modello matematico che coinvolge le variabili e le relazioni tra le variabili. Le variabili sono state divise in due classi: le variabili di ingresso e le variabili di uscita. In realtà le variabili usate per rappresentare un dato fenomeno non sono solo gli ingressi e le uscite, è spesso opportuno, necessario, impiegare variabili ausiliarie; le variabili ausiliarie saranno quelle che definiscono lo stato del sistema.

Facciamo un esempio per capire meglio il problema: una popolazione di farfalle e come si evolve nel tempo.

Evoluzione di una popolazione di farfalle.

Il ciclo di vita della farfalla si svolge in diverse fasi. Si utilizzano variabili ausiliarie per descrivere l'evoluzione della popolazione.

Si indicherà con x_i il numero di farfalle nelle diverse fasi, dal bruco alla crisalide ed alla crisalide alla farfalla. Quindi, x_1 sarà il numero di bruchi, x_2 sarà il numero di crisalidi, x_3 sarà numero di farfalle, ad un certo istante k . Si suppone che la permanenza nella stessa fase abbia una durata limitata è uguale per tutti, che è l'intervallo temporale di un mese. Possiamo dunque rappresentare l'evoluzione nelle diverse fasi con delle equazioni.

$x_1(k+1) = f x_3(k)$, il numero di bruchi al tempo $k + 1$ è uguale, secondo una costante di proporzionalità f al numero di farfalle al tempo k .

$x_2(k+1) = s_1 x_1(k)$, il numero di crisalidi di al tempo $k + 1$ è proporzionale al numero di bruchi al tempo k . Con $s_1 < 1$ si indica un certo numero di sopravvissuti.

$x_3(k+1) = s_2 x_2(k)$, il numero di farfalle al tempo $k + 1$ sarà proporzionale al numero di crisalidi al tempo k .

$y(k) = x_3(k)$, y è la variabile di uscita al tempo k , dato dal numero di farfalle al tempo k .

Abbiamo dunque ottenuto una rappresentazione matematica, ovvero una rappresentazione con lo stato che descrive come varia la popolazione di farfalle.

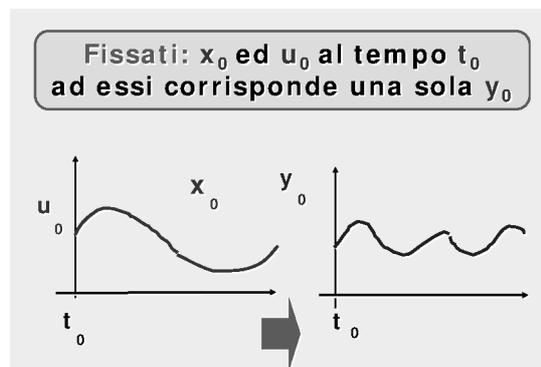
La relazione in termini di relazioni tra la sola variabile “numero di farfalle” è nella forma come di seguito riportata: $y(k+3) = s_1 s_2 f y(k)$, che è molto più complicata da concepire non considerando l'uso delle variabili ausiliarie.

Le variabili ausiliarie introdotte – la popolazione nelle classi – hanno lo scopo di mantenere le informazioni sulla storia passata.

Queste vengono chiamate “variabili di stato”.

Lo stato al tempo t ha in sé tutte le informazioni sul sistema, cioè quell'insieme di variabili che mi consente poi di caratterizzare in modo preciso il legame ingresso uscita, ovvero in modo univoco.

Infatti, fissati: x_0 ed u_0 al tempo t_0 ad essi, ora corrisponde una sola y_0 .



Questo vuol dire che, supponendo di trovarsi all'istante t_0 e di applicare un ingresso u_0 , dall'istante t_0 in poi corrispondono, in un sistema dinamico, più uscite. Il parametro x_0 è questo parametro fissato in più al tempo t_0 che fa sì che questa volta l'uscita corrispondente sia una soltanto. Una sola uscita tra quelle possibili che il sistema può generare al tempo t_0 . Lo stato ha quindi il significato anche di rendere univoco l'ingresso con l'uscita. Questo vale per ogni istante considerato, per cui, fissato un ingresso, l'uscita sarà una ed una sola.

LA TEORIA DEI SISTEMI

La teoria dei sistemi propone metodi di analisi dei sistemi dinamici astratti orientati, per classi di rappresentazioni. Queste classi di rappresentazioni saranno rappresentazioni con lo stato.

Esistono, sotto condizioni molto generali, rappresentazioni con lo stato di un sistema causale, dinamico, orientato. A questo corrisponde un teorema secondo il quale dato un fenomeno reale, che sia causale e orientato, e quindi mette in una relazione di causa ed effetto variabili di ingresso e variabili di uscita, esistono, sotto condizioni molto generali, rappresentazioni con lo stato di questo oggetto.

Queste rappresentazioni sono modelli matematici.

La classe delle rappresentazioni - i sistemi allo studio lineari e stazionari

Sistemi lineari e stazionari che studieremo possono essere a tempo continuo, t in \mathbb{R} (numeri reali), oppure a tempo discreto, k in \mathbb{Z} (numeri relativi, $-1, 0, +1$).

Essi ammettono rappresentazioni con lo stato, a dimensione finita, il cui oggetto su cui ci soffermiamo è del tipo:

$$x'(t) = A x(t) + B u(t), x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

Questa è la rappresentazione tipica dei sistemi a tempo continuo. L'oggetto matematico è di questo tipo. Questo oggetto rappresenta un legame tra le variabili u , ingressi, con u che è un vettore di dimensione p appartenente a \mathbb{R} , ovvero $u \in \mathbb{R}^p$ e le uscite y , $y \in \mathbb{R}^q$, cioè y è un vettore (istante per istante) di dimensione q di numeri reali. Il vettore x è un vettore (istante per istante) a dimensione n di numeri reali, ovvero $x \in \mathbb{R}^n$.

I numeri p, q, n sono numeri interi fissati. Il primo precisa il numero di ingressi, il secondo il numero di uscite, il terzo il numero di variabili di stato assunte per rappresentare il fenomeno, ovvero per descrivere il sistema.

Il modello matematico stabilisce un legame tra le variabili u e le y utilizzando delle variabili intermedie, le x . Le variabili y sono l'uscita, le variabili u sono gli ingressi, le variabili x sono lo stato, al tempo t .

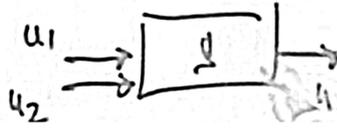
Fissate le sopra elencate variabili avremo delle matrici, A, B, C e D .

In dettaglio $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$, ad esempio:

$$p=2 \quad q=1 \quad n=2$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$y = (c_1 \quad c_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Per quanto riguarda i sistemi a tempo discreto abbiamo una rappresentazione analoga:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k), \quad x(k_0) = x_0$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

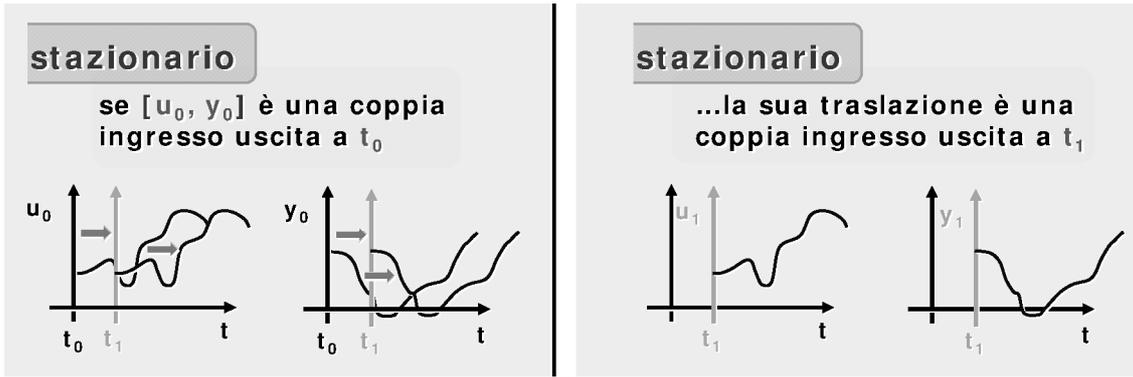
Fissato un x_0 e un tempo k_0 in poi, ad essa corrisponde una sola y . Le dimensioni vettoriali delle matrici sono le stesse del caso precedente. In dettaglio $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Rappresentazioni di questo tipo descrivono sistemi lineari. Lineare è un sistema che soddisfa la seguente condizione: è lineare l'insieme delle coppie ingresso e uscita ad ogni t_0 , (u_{01}, y_{01}) , (u_{02}, y_{02}) .

Questo dire che se al tempo t_0 abbiamo due coppie: la funzione u_{01} è una funzione di ingresso e ad essa corrisponde una uscita y_{01} , poi c'è un'altra coppia u_{02}, y_{02} , allora una qualsiasi combinazione lineare secondo due coefficienti arbitrari di queste coppie ingresso-uscita è ancora una coppia ingresso uscita al tempo t_0 .

Quindi, date le coppie (u_{01}, y_{01}) e (u_{02}, y_{02}) , la coppia $(\alpha_1 u_{01} + \alpha_2 u_{02}, \alpha_1 y_{01} + \alpha_2 y_{02})$ è una possibile coppia al tempo t_0 .

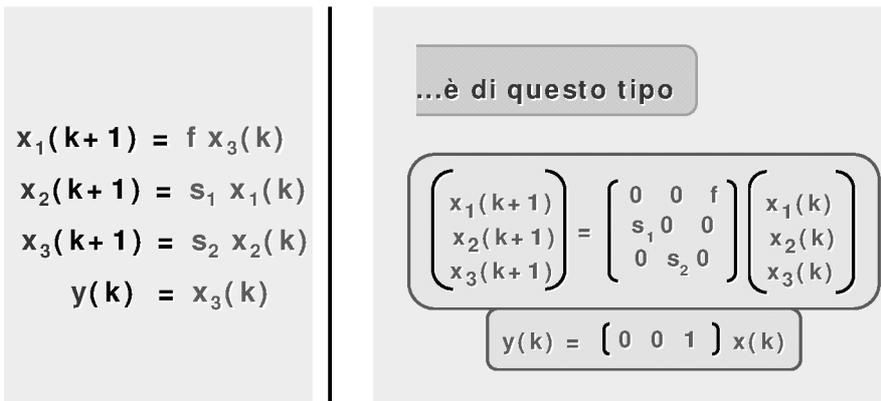
Sistemi stazionari: il sistema è stazionario se $[u_0, y_0]$ è una coppia ingresso uscita a t_0 , e la sua traslazione è una coppia ingresso uscita a t_1 .



L'insieme delle coppie ingresso-uscita al tempo t_1 è fatto di tutte e sole le coppie ottenute per traslazione di coppie ottenute al tempo t_0 .

Questo significa che, di fatto, il modo in cui si comporta il sistema non dipende dall'istante t_0 che stiamo considerando e questo si traduce nella indipendenza dei parametri dal tempo che poi consiste nella indipendenza nelle matrici A, B, C, D nel modello matematico.

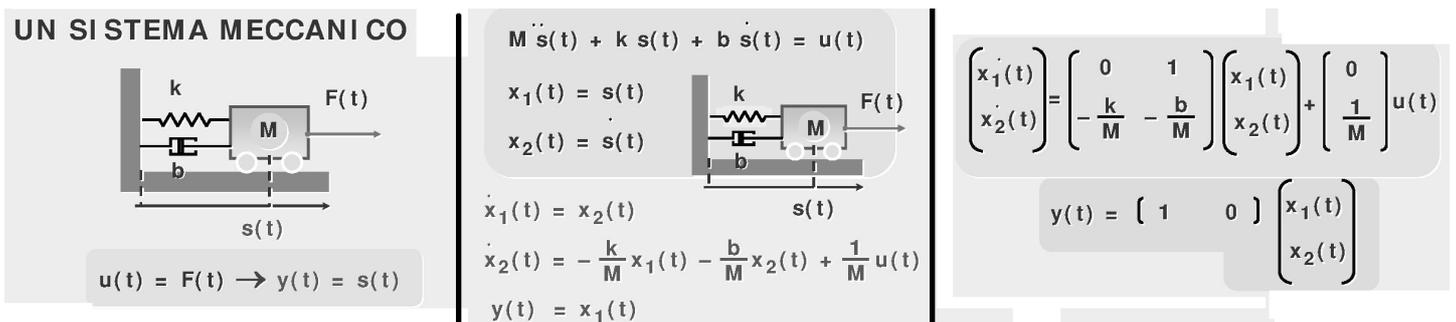
Esempi



Si nota come il sistema possa essere scritto come una matrice per un vettore.

In questo esempio non c'è un ingresso perché si tratta di un sistema che evolve autonomamente, è un sistema autonomo.

~



Dato un sistema meccanico, come in figura, vogliamo descrivere come varia il centro

di massa del carrello in funzione della molla di coefficiente k e dell'attenuatore b . Vogliamo trovare una rappresentazione matematica che collega l'ingresso (la $F(t)$) all'uscita ($s(t)$).

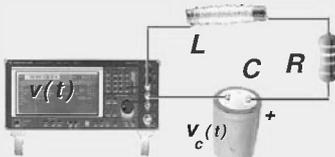
Il modello matematico si ricava dalla seconda legge della dinamica che esprime l'equilibrio delle forze agenti sulla massa M . La forza agente $u(t)$ è uguale alle forze di reazione.

La prima forza è la massa per l'accelerazione, la seconda è la forza resistente generata dalla molla proporzionale al coefficiente k secondo la sua compressione $s(t)$, la terza è la forza resistente generata dallo smorzatore, che è proporzionale alla derivata dello spostamento.

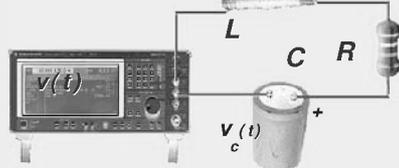
Sono definite due variabili di stato, $x_1(t)$ e $x_2(t)$; possiamo dunque scrivere un sistema di equazioni, fatte le debite sostituzioni. Il sistema può essere descritto con una serie di matrici.

~

UN SEMPLICE SISTEMA ELETTRICO



$u(t) = v(t) \rightarrow y(t) = v_c(t)$



$v(t) = v_c(t) + R i(t) + L \dot{i}(t)$
 $i(t) = C \dot{v}_c(t)$

$x_1(t) = v_c(t) \quad x_2(t) = i(t)$

$\dot{x}_1(t) = 1/C x_2(t)$
 $\dot{x}_2(t) = -1/L x_1(t) - R/L x_2(t) + 1/L u(t)$
 $y(t) = x_1(t)$

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t)$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$x_1(t) = i(t) \quad x_2(t) = v_c(t)$

$\dot{x}_1(t) = -R/L x_1(t) - 1/L x_2(t) + 1/L u(t)$
 $\dot{x}_2(t) = 1/C x_1(t)$
 $y(t) = C x_2(t)$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}$

In questo terzo esempio abbiamo un generatore di tensione, una induttanza, una resistenza e un condensatore. Vogliamo descrivere come varia la tensione sul condensatore al variare della tensione dell'alimentazione. Il primo passo è quello di fissare le equazioni che regolano il circuito elettrico. Poi definiamo due variabili ausiliarie, di stato, rispettivamente la tensione ai capi del condensatore e la corrente che circola nell'induttanza e in tutta la maglia. Fatto questo possiamo scrivere un sistema di tre equazioni. Otteniamo poi una rappresentazione con lo stato. Si noti come cambiando le due variabili di stato, la rappresentazione del modello matematico cambia. In alto un tipo di rappresentazione e in basso un altro tipo di rappresentazione, che sono diverse, infatti le matrici sono diverse. Questo ci porta al successivo argomento che sono le rappresentazioni equivalenti.

Le rappresentazioni equivalenti

Sono possibili diverse scelte di variabili di stato.

Un nuovo vettore, in generale $z(t)$, può essere fissato a partire da $x(t)$.

Se, ad esempio, $z(t) = T x(t)$, con T una matrice non singolare, che corrisponde ad una variazione di variabili di stato lineare, allora la rappresentazione rispetto alle nuove coordinate ha la forma seguente:

$$z'(t) = T A T^{-1} z(t) + T B u(t)$$

$$y(t) = C T^{-1} z(t) + D u(t)$$

Infatti abbiamo al lato la dimostrazione:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ z &= T x, \quad x = T^{-1} z \\ \dot{z} &= T A x + T B u \\ \rightarrow \dot{z} &= (T A T^{-1}) z + (T B) u \\ y &= C x + D u \\ \rightarrow y &= (C T^{-1}) z + D u \end{aligned}$$

Non tutte le rappresentazioni equivalenti sono lineari.

Sistemi a tempo discreto e continuo

Le rappresentazioni con lo stato che sono state introdotte sono dette **IMPLICITE** perché descrivono in modo implicito le evoluzioni. Cioè non dicono quale è l'espressione effettiva della $y(t)$ in funzione di $u(t)$ e x_0 , ovvero della u da un certo istante t_0 in poi e della x_0 al tempo t_0 .

Questo modello è un sistema di equazioni differenziali, nel caso a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

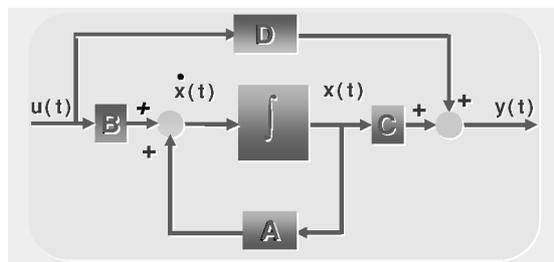
Questo modello al sistema di equazioni alle differenze prime, nel caso a tempo discreto

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

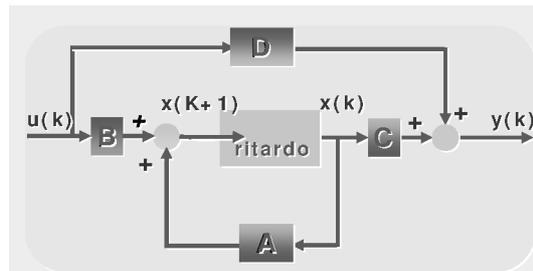
Queste ultime sono equazioni che forniscono una rappresentazione implicita dell'oggetto che vogliamo studiare.

Alle rappresentazioni implicite è associato uno schema detto di realizzazione o di simulazione. Abbiamo, per sistemi a tempo continuo, il seguente schema di realizzazione:



questo è lo schema che può essere utilizzato per realizzare un dispositivo che emula il sistema dato. L'emulatore può essere costituito fisicamente con dispositivi in commercio presso negozi di elettronica. L'emulatore deriva dal modello matematico.

Per i sistemi a tempo discreto valgono considerazioni analoghe, al posto dell'integratore sono inseriti elementi che generano un ritardo. Abbiamo, per sistemi a tempo discreto, il seguente schema di realizzazione:



questo è uno schema di realizzazione in tempo reale che emula il sistema fisico che è modellato dalle relative equazioni.

Le rappresentazioni a tempo discreto risultano sia da esigenze modellistiche sia da vincoli tecnologici quando si lavora su sistemi a tempo continuo.

□

Prof. Salvatore Monaco
40'54"

introduzione
rappresentazioni con lo stato non lineari
alcuni esempi
approssimazioni lineari di sistemi non lineari
discussione degli esempi trattati
campionamento e tenuta di sistemi a tempo continuo

Introduzione

Abbiamo visto nelle scorse lezioni che studieremo i sistemi lineari e stazionari che ammettono una rappresentazione lineare a tempo continuo o a tempo discreto.

In questa lezione tratteremo le rappresentazioni approssimate.

Nella costruzione di un modello matematico, le rappresentazioni possono derivare da ipotesi semplificative, nella realtà quando costruiamo un modello esso viene costruito sotto certe ipotesi semplificative.

Le ipotesi semplificative nella costruzione del modello danno luogo ad una approssimazione. Quello di cui ci occuperemo saranno le approssimazioni conseguenti a semplificazioni di un dato modello.

Assumeremo di avere un certo problema sul quale è stato costruito un certo modello e poi di approssimare questo modello. Ci occuperemo di due tipi di approssimazione: se il modello è non lineare sarà approssimato con uno lineare; se il modello è a tempo continuo ne saranno campionate le variabili con l'utilizzo di strumenti digitali che porteranno ad ulteriori approssimazioni.

Rappresentazioni con lo stato non lineari

L'oggetto matematico di una rappresentazione implicita, stazionaria a dimensione finita a tempo continuo è del tipo seguente:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(t_0) = x_0 \quad (\text{questo è un sistema di equazioni che caratterizza la parte dinamica})$$
$$y(t) = b h(x(t), u(t))$$

Con f ed h funzioni non lineari di x e u ; x è un vettore di stato a n componenti, u è il vettore degli ingressi. La y è legata alla x e alla u in modo istantaneo, anche h è una funzione non lineare.

A partire dallo stato x_0 al tempo t_0 , fissato u dal tempo t_0 in poi, lo stato evolve secondo la prima equazione e l'uscita evolve secondo la seconda equazione.

La rappresentazione a tempo discreto sarà del tipo seguente:

$$x(k + 1) = f(x(k), u(k)) \quad (\text{al posto derivata abbiamo l'incremento unitario nel tempo})$$

$$y(k) = h(x(k), u(k))$$

Con f ed h funzioni non lineari di x e u .

Se la funzione $f(x, u)$ è lineare in x e u e la funzione $h(x, u)$ è lineare in x e u allora avremo una rappresentazione lineare che descrive un sistema lineare e la forma sarà la seguente:

$$f(x, u) = A x + B u$$

$$h(x, u) = C x + D u$$

Se la f ha un'altra forma, con un ulteriore termine, $N x u$, con N una matrice quadrata, x un vettore ed u uno scalare (u è un numero Reale), la rappresentazione, cioè, è del tipo seguente:

$$f(x, u) = A x + B u + N x u$$

$$h(x, u) = C x + D u$$

allora la rappresentazione è bilineare e descrive un sistema bilineare. Questi sono modelli interessanti perché possono allargare molto la classe dei problemi analizzabili. In molti sistemi fisici compaiono variabili di questo tipo.

Se la funzione f ha questa ulteriore forma

$$f(x, u) = f(x) + g(x) u \quad (\text{questa è una struttura affine all'ingresso})$$

$$h(x, u) = h(x) + l(x) u$$

Allora la rappresentazione è detta affine rispetto all'ingresso e anche il sistema è detto affine rispetto all'ingresso.

Un esempio di sistema lineare a tempo discreto è una procedura per il calcolo della radice quadrata di un numero reale:

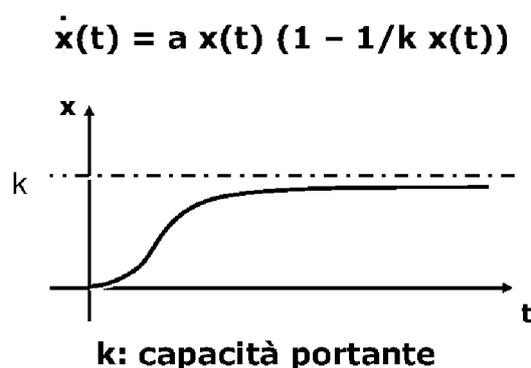
$$x(k + 1) = x(k) - [x_2(k) - a]/2x(k)$$

Si parte da una $x(0)$, poi $x(1)$ ecc, la procedura converge alla radice di a .
In corrispondenza della soluzione la dinamica si annulla.

$$x_e = \pm a^{1/2}$$

Un altro esempio è la cosiddetta **equazione logistica**, ad esempio quella dell'evoluzione di una popolazione. Vediamo ora l'evoluzione di una popolazione in presenza di risorse limitate come esempio. Se ci sono delle limitazioni sia la cosiddetta equazione logistica che è del tipo

$\dot{x}(t) = a x(t) (1 - 1/k x(t))$ che ha il termine $1/k x(t)$ in più



k è detta capacità portante ed è il limite massimo a cui tende la popolazione.

Questo fatto tiene conto della presenza di limitazioni, ad esempio di alimentazione, di spazio fisico, eccetera.

Su questa base può essere costruito un modello interessante, detto modello di interazione tra specie, con il modello preda e predatore.

Si assume che in assenza di predazione, la preda segua l'equazione logistica con capacità portante a/b .

La decimazione è proporzionale al prodotto delle densità fra le due specie.

È costante la probabilità di uccisione della preda.

Il predatore è limitato dal suo cibo ovvero la preda.

Sotto queste ipotesi dell'evoluzione nel tempo (omesso per migliore visione delle

relazioni) di queste due popolazioni, 1 preda e 2 predatore, avviene secondo le seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1 = ax_1 - bx_1^2 - cx_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = -ex_2 + c'x_1x_2$$

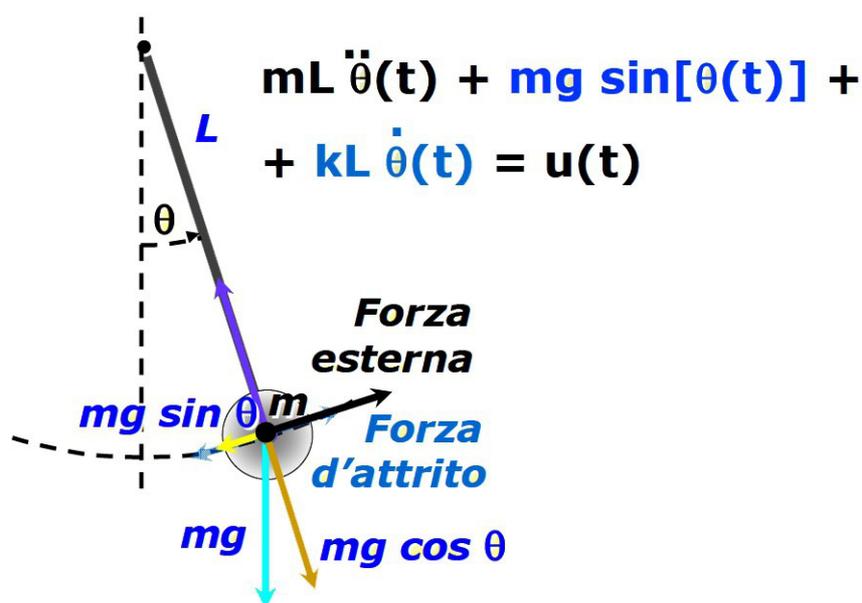
$$k = a/b$$

La prima equazione è l'equazione logistica con $k = a/b$, data da $ax_1 - bx_1^2$. L'incremento di preda è limitato dal termine cx_1x_2 , che è proporzionale al prodotto delle densità delle due specie secondo il fattore c . Maggiore è la probabilità che le due specie si incontrino e maggiore è la probabilità che venga decimata la preda.

La seconda equazione mostra come evolve il predatore. L'incremento del predatore è negativo, ovvero il predatore tende a estinguersi. Però la presenza di x_1 determina una crescita nella evoluzione della popolazione del predatore.

La dinamica del pendolo

supponiamo di avere un pendolo formato da una massa attaccata ad un'asta rigida. Si calcolano le oscillazioni in funzione delle forze in gioco, la massa del pendolo e la gravità, si immagina anche la presenza della forza di attrito e la presenza di una forza esterna; l'ambiente è considerato un sistema viscoso.



Abbiamo l'equazione che esprime l'equilibrio delle forze al generico tempo t .

La forza applicata esterna è $u(t)$ ed è uguale alle forze resistenti. Il primo termine delle

forze resistenti è la forza esercitata dalla accelerazione angolare, il secondo termine è la compensazione della parte del peso che è normale all'asta del pendolo, il terzo termine è la forza di attrito viscoso.

Vengono determinate due variabili di stato, x_1 e x_2 . Da ciò riferiamo un modello, come sotto riportato.

$$mL \ddot{\theta}(t) + mg \sin[\theta(t)] + kL \dot{\theta}(t) = u(t)$$

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta}(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{mL} u$$

Il modello è non lineare della presenza della funzione seno. Tale modello è in realtà del tipo seguente, dove u è moltiplicato per un vettore costante; lo stato ha dimensione 2, affine rispetto all'ingresso, la funzione di uscita è una funzione lineare; la funzione $f(x)$ è un vettore di funzioni:

$$\dot{x} = f(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{mL} \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 0) x$$

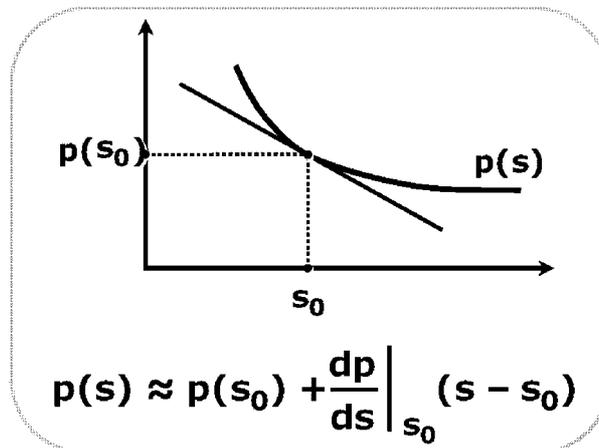
$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix}$$

APPROSSIMAZIONI LINEARI DI SISTEMI NON LINEARI

Tratteremo, in ordine:

- L'approssimazione lineare di una funzione non lineare
- L'approssimazione lineare di una dinamica non lineare

L'approssimazione lineare di una funzione non lineare



Le funzioni lineari nella variabile s sono tutte, e sole, le rette che passano per l'origine. Quindi la curva rappresentata è una funzione non lineare. La retta è rappresentata dal membro destro dell'equazione sopra, che è l'approssimazione lineare della curva, nel punto s_0 .

Se ora collochiamo l'asse nel punto s_0 , otteniamo quanto segue:

$$p(s) \approx p(s_0) + \frac{dp}{ds} \Big|_{s_0} (s - s_0)$$

$$y := p(s) - p(s_0) \quad z := (s - s_0)$$

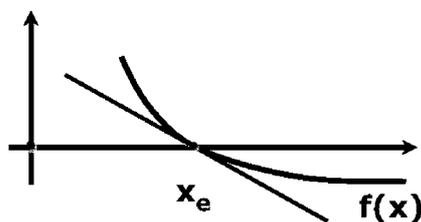
$$y = \frac{dp}{ds} \Big|_{s_0} z$$

ovvero otteniamo un numero per z .

L'approssimazione lineare di una dinamica non lineare

Siamo nella situazione come rappresentata in figura, in cui x_e è quella che si chiama una situazione di equilibrio.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$$



L'approssimazione lineare è data dalla seguente retta (notare che $f(x_e) = 0$):

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) + \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)$$

$$\dot{\mathbf{z}} \approx \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \mathbf{z} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_e) \mathbf{z}$$

E se \mathbf{f} è un vettore di funzioni quello che si ottiene è il cosiddetto Jacobiano di \mathbf{x} calcolato \mathbf{x}_e , moltiplicato per \mathbf{z} .

In questo caso, supposto \mathbf{f} un vettore di funzioni, $\mathbf{J}(\mathbf{x}_e)$ è una matrice del tipo

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_e} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)$$

La matrice Jacobiana è una matrice di costanti, quadrata.

viceversa, se \mathbf{f} non è vettore di funzioni allora abbiamo numero.

Approssimazione lineare di un sistema non lineare

Siano date due funzioni non lineari, f e h , entrambe in funzione di x e di u , cioè delle variabili di stato e di ingresso.

La funzione f è un vettore e potenzialmente lo è anche la funzione h .

Supponiamo che (x_e, u_e) sia una coppia di equilibrio, il cui significato è riportato subito sotto, $f(x_e, u_e) = 0$, il sistema sta fermo nel punto x_e .

Supponiamo inoltre di avere un certo valore y_e , tale per cui $h(x_e, u_e) = y_e$.

$$\begin{array}{c} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \\ \mathbf{(x}_e, \mathbf{u}_e) \text{ coppia di equilibrio} \\ \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) = \mathbf{y}_e \end{array}$$

Facciamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione f :

$$\begin{array}{l} \rightarrow \text{Sviluppo al primo ordine} \\ \text{della } f \\ \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) + \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \\ \left. + \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e) + \dots \end{array}$$

Dai calcoli otteniamo delle matrici di valori costanti, A e B

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}_e}} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{pmatrix}_{\substack{\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}_e}} = \mathbf{A}$$

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{\substack{x_e \\ u_e}} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial u_1 & \dots & \partial f_1 / \partial u_p \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial u_1 & \dots & \partial f_n / \partial u_p \end{pmatrix}_{\substack{x_e \\ u_e}} = \mathbf{B}$$

Facciamo la stessa cosa per la funzione h

→ **Sviluppo al primo ordine della h**

$$h(x, u) = h(x_e, u_e) + \left. \frac{dh}{dx} \right|_{x_e, u_e} (x - x_e) + \left. \frac{dh}{du} \right|_{x_e, u_e} (u - u_e) + \dots$$

$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_{\substack{x_e \\ u_e}} = \begin{pmatrix} \partial h_1 / \partial x_1 & \dots & \partial h_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_n / \partial x_1 & \dots & \partial h_n / \partial x_n \end{pmatrix}_{\substack{x_e \\ u_e}} = \mathbf{C}$$

$$\left. \frac{dh}{du} \right|_{\substack{x_e \\ u_e}} = \begin{pmatrix} \partial h_1 / \partial u_1 & \dots & \partial h_1 / \partial u_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_n / \partial u_1 & \dots & \partial h_n / \partial u_n \end{pmatrix}_{\substack{x_e \\ u_e}} = \mathbf{D}$$

Effettuando delle istituzioni otteniamo quanto segue:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_e$$

$$\dot{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}$$

Otteniamo dunque una prima equazione che è la variazione intorno al punto x_e .

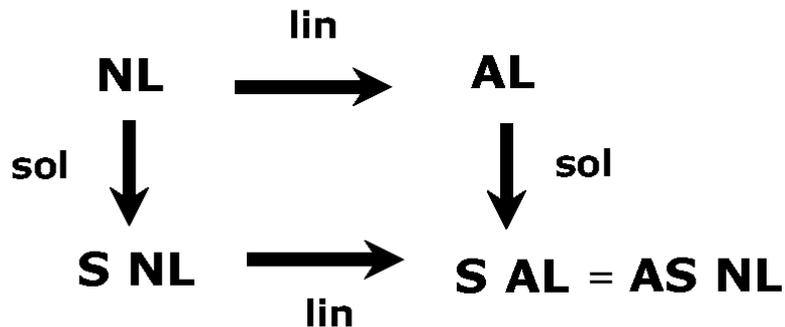
Otteniamo una seconda equazione.

In sostanza quello che otteniamo è una rappresentazione lineare.

Cioè, nel intorno della coppia di equilibrio (x_e, u_e) , l'evoluzione è rappresentata da una dinamica lineare.

Questo accade per il modello implicito, è dimostrabile che l'approssimazione sul modello implicito implica la stessa approssimazione sul modello esplicito, cioè sulla soluzione. Nel senso esposto dalla figura sotto:

La soluzione dell'approssimazione lineare coincide con l'approssimazione della soluzione del sistema non lineare



S NL = Soluzione Non Lineare.

Tutto questo si può far ricondurre agli esempi precedenti.

→ L'algoritmo per il calcolo della radice quadrata

$$x(k+1) = x(k) - [x^2(k) - a] / 2x(k)$$

$$x_e = \sqrt{a} \quad \text{è l'equilibrio}$$

$$J(x_e) = \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} \right) \Big|_{x = \pm \sqrt{a}} = 0$$

Lo Jacobiano è la derivata rispetto ad x . Il risultato uguale a zero rappresenta esattamente l'approssimazione lineare del comportamento dinamico non lineare.

→ L'equazione logistica

$$0 = a x_e (1 - 1/k x_e)$$

$$x_{e1} = 0 \quad \text{equilibrio}$$

$$x_{e2} = k$$

$$J(x_e) = (1 - 2 a x_e/k) = ..$$

Dall'equazione logistica calcoliamo gli stato di equilibrio ottenendo delle relazioni come sopra. Lo stato di equilibrio dove l'equazione logistica si annulla e si ottengono due soluzioni. Se facciamo la derivata dell'equazione logistica in funzione di X e la calcoliamo in x_e otteniamo l'espressione $J(x_e)$.

→ Il modello preda predatore

$$x_1 (a - b x_1 - c x_2) = 0$$

$$x_2 (-e + c' x_1) = 0$$

$$x_{1e} = 0 \quad x_{1e} = e/c'$$

$$x_{2e} = 0 \quad x_{2e} = (ac' - be)/(cc')$$

$$x_{2e} > 0 \text{ se } k = a/b > e/c'$$

Nel modello preda predatore uguagliando le relazioni a zero si trovano due stati di equilibrio. Sono entrambi possibili, il primo è l'assenza sia della preda che del predatore. Il secondo stato di equilibrio è possibile se i valori ottenuti sono positivi, quindi è possibile secondo certe ipotesi.

Sotto queste ipotesi possiamo calcolare lo Jacobiano, che ha l'espressione seguente:

$$\begin{pmatrix} a-2bx_1-cx_2 & -c'x_1 \\ c'x_2 & -e+c'x_1 \end{pmatrix}$$

↙ ↘

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ 0 & -e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -be/c' & -e \\ (ac' - be)/c & 0 \end{pmatrix}$$

Lo Jacobiano, calcolato nei due stati di equilibrio, sono riportati sotto ad esso. Otteniamo quindi due matrici, a sinistra la matrice costante A , che rappresenta lo Jacobiano calcolato nello stato di equilibrio $(0, 0)$; a destra la matrice che rappresenta lo Jacobiano calcolato nell'altro stato di equilibrio.

Le due matrici caratterizzano due sistemi dinamici lineari che approssimano il comportamento del sistema non lineare, una intorno allo stato $(0, 0)$, l'altra intorno all'altro stato di equilibrio.

IL PENDOLO

IL PENDOLO

$$f(x, u) = f(x) + B u$$

$$0 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL} \end{pmatrix} u$$

Le condizioni di equilibrio si trovano ponendo a zero l'equazione, come sopra riportato.

$$u_e = 0$$

$$x_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k\pi \end{pmatrix}$$



$$u_e = 0$$

$$x_{e2} = \begin{pmatrix} 0 \\ (2k+1)\pi \end{pmatrix}$$



Le soluzioni sono due, la prima è quella in cui il pendolo si trova in posizione verticale, ovvero tutte quelle con il peso verso il basso, tutti angoli pari di π greco. L'altra è data dalla posizione del pendolo verso l'alto, tutti angoli dispari di π greco, k costante positiva o negativa. Notare che $u_e = 0$ in entrambi i casi, il che significa che non c'è nessuna forza applicata.

Di seguito è riportato lo Jacobiano in entrambi i casi.

$$\begin{array}{c}
 J(x_e) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{M} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{M} \end{bmatrix} \\
 \\
 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Abbiamo quindi un sistema lineare che approssima intorno allo stato di equilibrio del pendolo in basso in un caso, del pendolo in alto nell'altro.

Le matrici sono dinamiche.

Studiando i sistemi dinamici lineari che approssimano le evoluzioni, quindi sistemi lineari approssimanti, possiamo trarre tante informazioni sul pendolo quando è sottoposto a perturbazioni.

La matrice degli ingressi, B, approssimante, è sempre la stessa.



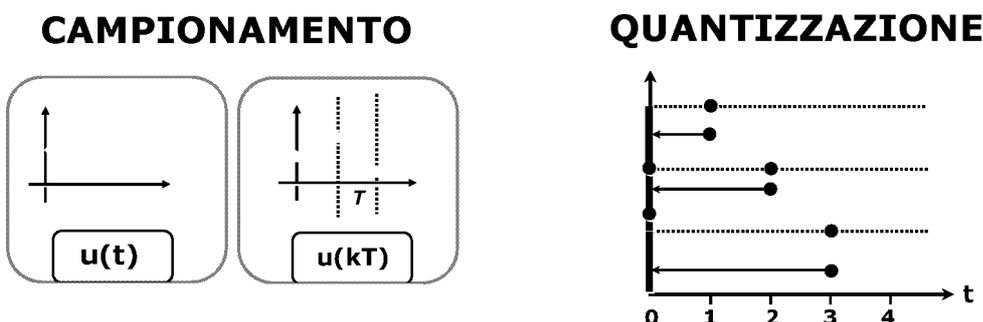
Campionamento e tenuta di sistemi a tempo continuo

Rappresentano un'altra fonte di approssimazione dei sistemi a tempo continuo.

Le attuali tecnologie digitali impongono il campionamento e la quantizzazione dei segnali e questo comporta una approssimazione nella simulazione se il modello con il quale abbiamo a che fare è un modello di un sistema reale.

Abbiamo quindi un sistema reale che a tempo continuo che evolve nel tempo perché sollecitato da ingressi di tipo continuo, le uscite sono variabili continue; quando esso viene simulato con dispositivi digitali dobbiamo campionare e quantizzare le variabili. Questo comporta una approssimazione.

CAMPIONAMENTO e QUANTIZZAZIONE



Campionamento: abbiamo un segnale continuo che viene rappresentato da stringhe di numeri che ne rappresentano il campionamento nei diversi istanti di tempo.

Quantizzazione: il valore campionato assume un valore proprio della rappresentazione scelta, dovuto alla capacità di memorizzazione del valore. Ad un valore campionato ne associamo un altro che discosta da quello campionato a causa della quantizzazione per cui i valori non possono essere continui. Ad esempio un valore campionato di 0,6 e uno di 0,7 possono assumere lo stesso valore 1. Il fenomeno della quantizzazione genera una ulteriore approssimazione.

- Inoltre, spesso, nel calcolo fatto in modo discreto nel tempo, si approssima la derivata con l'incremento (il rapporto incrementale). Si fa quella che si chiama l'approssimazione di Eulero.

→ Inoltre spesso nel calcolo, fatto in modo discreto nel tempo, si approssima la derivata con l'incremento

Approssimazione di Eulero

$$\dot{x}(kT) \approx \frac{x(kT+T) - x(kT)}{T}$$

Quindi invece di considerare le derivate prime si considerano gli incrementi, come sotto riportato.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$x(k+1) = f_a(x(k), u(k))$$

- La corrispondenza tra il comportamento del modello approssimato ed il sistema originale si ha solo localmente. Sia nel caso delle approssimazioni legate all'impiego dei dispositivi digitali, sia nel caso delle approssimazioni di cui abbiamo parlato all'inizio, quelle che riguardano la funzione dinamica che utilizziamo.

- Lo studio del modello approssimato consente di ottenere importanti risultati sul comportamento del sistema originale.

□

Prof. Salvatore Monaco
41'02"

- Introduzione: studio dei sistemi lineari
- Sistemi a tempo continuo (lineari)
 - Dal modello implicito al modello esplicito (dal modello differenziale alla sua rappresentazione esplicita, la soluzione in x e in y)
 - Le proprietà della risposta (in x e in y)
 - La risposta impulsiva (è una parte della risposta, che svolge un ruolo particolare)
 - Il problema della realizzazione

ANALISI NEL TEMPO DELLE RAPPRESENTAZIONI LINEARI

IL PUNTO DI PARTENZA Il punto iniziale della nostra analisi è la rappresentazione implicita di un sistema lineare.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

La rappresentazione implicita

È un sistema specifico che abbiamo ottenuto partendo da un sistema reale, che non ci interessa più, in quanto stiamo facendo una analisi matematica del problema.

DAL MODELLO IMPLICITO AL MODELLO ESPPLICITO

→ il caso elementare
 $p=q=n=1$

→ il caso generale

Partiamo quindi dalla rappresentazione implicita e vediamo come si va dal modello implicito al modello esplicito trattando due casi, il caso elementare e il caso generale. Nel primo caso abbiamo un solo ingresso, una sola uscita, una sola variabile di stato. Nel secondo caso, quello generale, abbiamo più ingressi, più uscite, più variabili di stato, rispettivamente p , q , n .

Dal modello implicito al modello esplicito - Il caso elementare

→ **il caso elementare**
p=n=q=1

Il caso elementare: $p = q = n = 1$.

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) \quad x(t_0) = x_0$$

L'equazione nel caso elementare è del tipo riportato a lato, con lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$.

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

Questa è una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

Dalla teoria delle equazioni differenziali la soluzione di tale equazione differenziale è la somma di due parti, una è l'equazione omogenea associata, che è $\dot{x}(t) = a x(t)$, l'altra è una soluzione particolare che è quella quando all'omogenea si aggiunge un termine del tipo $b u(t)$.

La soluzione dell'omogenea è:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0$$

Per il teorema dell'unicità deve soddisfare la condizione iniziale e deve soddisfare la derivata.

Nel primo caso, per $x = t_0$ abbiamo l'equivalenza $x(t_0) = x_0$ che è la condizione iniziale. Inoltre soddisfa anche la derivata rispetto al tempo, facile da calcolare. Quindi abbiamo dimostrato che $x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0$ è la soluzione dell'omogenea.

Inoltre, una soluzione particolare è data dall'integrale, come riportato nelle figure.

Dunque è dimostrato che se $\dot{x}(t) = a x(t)$ è la rappresentazione implicita, allora

$x(t_0) = x_0$ soddisfa la condizione iniziale

$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$ ne è la rappresentazione esplicita, come di seguito ulteriormente indicato.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a e^{a(t-t_0)} x_0 + \\ &+ \int_{t_0}^t a e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + b u(t) = \\ &= a x(t) + b u(t) \end{aligned}$$

soddisfa l'equazione

$$y(t) = c x(t) + d u(t)$$

A lato l'uscita, della quale possiamo scrivere subito la soluzione.

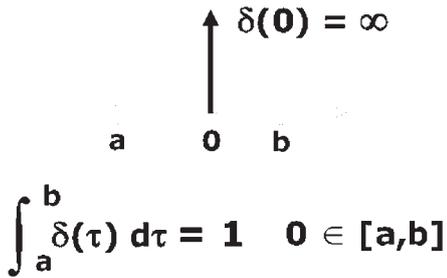
$$= c e^{a(t-t_0)} x_0 +$$

Per riprodurla in modo più sintetico devono essere introdotti alcuni elementi concettuali.

$$+ \int_{t_0}^t c e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + d u(t)$$

$\delta(t)$ impulso di Dirac

L'impulso di Dirac, $\delta(t)$.

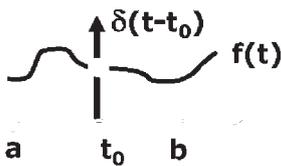


$$\int_a^b \delta(\tau) d\tau = 1 \quad 0 \in [a,b]$$

L'impulso di Dirac è un oggetto matematico molto complesso. Semplificando, possiamo dire, che è una funzione definita soltanto nell'istante in cui si annulla l'argomento e in tale istante ha il valore infinito, per $t = 0$, $\delta(0) = \infty$, zero altrove.

Ha una importante proprietà, come mostrata dall'integrale a lato.

proprietà



$$\int_a^b f(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = f(t_0)$$

Ne consegue una proprietà: data una funzione $f(t)$, con un certo andamento in un intervallo $a-b$, e dato in t_0 un impulso di Dirac, allora l'integrale nell'intervallo della funzione moltiplicata per l'impulso è uguale al valore della funzione nel punto di applicazione dell'impulso di Dirac, ovvero nel punto in cui è centrata la δ di Dirac.

Si ottiene dunque l'estrazione del valore della funzione in quel punto.

$$u(t) = \int_{t_0}^t u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Applicando questa proprietà possiamo scrivere la relazione a lato e quindi di riscrivere la funzione di uscita y .

$$y(t) = c e^{a(t-t_0)} x_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^t (c e^{a(t-\tau)} b + d \delta(t-\tau)) u(\tau) d\tau$$

Dal modello implicito al modello esplicito - Il caso generale

Abbiamo più ingressi, più uscite, più variabili di stato, rispettivamente p, q, n.

Per quanto riguarda la soluzione, troveremo delle espressioni che sono formalmente identiche a quelle precedenti, dove al posto dei coefficienti a, b, c, d, compariranno le matrici A, B, C, D.

L'ESPONENZIALE DI MATRICE

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots$$

una proprietà

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= A \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots \right) = \\ &= A e^{At} \quad (= e^{At} A) \end{aligned}$$

Per analizzare il caso generale occorre introdurre l'esponenziale di matrice.

L'esponenziale di matrice è definito come da figura a lato, per analogia rispetto alla funzione esponenziale classica (e^{at}) considerata nello sviluppo in serie di Taylor, come sotto riportato.

$$e^{At} := I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots$$

$$\uparrow$$

$$e^{at} = 1 + ta + \frac{t^2}{2!} a^2 + \frac{t^3}{3!} a^3 + \dots$$

È inoltre valida, anche per l'esponenziale di matrice, la derivata in modo analogo alla funzione esponenziale.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

la soluzione $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

A questo punto possiamo andare a calcolare la soluzione, $\mathbf{x}(t)$ del caso generale.

La soluzione è un vettore a n dimensioni, in cui l'esponenziale è una matrice nxn che moltiplica un vettore a n componenti

(\mathbf{x}_0) e quindi è un vettore nx1, come la soluzione $\mathbf{x}(t)$; l'integrale contiene un esponenziale di matrice dimensionalmente uguale a quello precedente e cioè nxn, un vettore B di dimensione nxp, un vettore px1, e nell'integrale, complessivamente abbiamo un vettore nx1.

$x(t_0) = x_0$ soddisfa la condizione iniziale

$$\dot{x}(t) = A e^{A(t-t_0)} x_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^t A e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + B u(t) =$$
$$= A x(t) + B u(t)$$

soddisfa l'equazione

Per dimostrare che è la soluzione si verifica che $x(t_0) = x_0$ soddisfa la condizione iniziale.

Poi si calcola la derivata di x rispetto al tempo e si trova che soddisfa l'equazione.

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) =$$

$$= C e^{A(t-t_0)} x_0 +$$
$$+ \int_{t_0}^t (C e^{A(t-\tau)} B + D \delta(t-\tau)) u(\tau) d\tau$$

Per quanto riguarda l'uscita, possiamo pre-moltiplicare per C e otteniamo due termini più $D u(t)$; poi applichiamo la relazione che riguarda l'impulso di Dirac e otteniamo una nuova scrittura che è l'espressione finale.

LE PROPRIETÀ DELLA RISPOSTA

→ risposta libera e forzata

→ Φ , H , Ψ e W

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

→ una proprietà peculiare dei sistemi lineari

Analizzando le proprietà delle espressioni trovate, la prima proprietà importante è una scomposizione della risposta nello stato in uscita in risposta libera e risposta forzata.

Inoltre sarà opportuno introdurre una simbologia alla quale faremo riferimento nel seguito.

La risposta nello stato è la somma di due parti, l'evoluzione libera e l'evoluzione forzata. La risposta in uscita è la somma delle parti, risposta in evoluzione libera e in evoluzione forzata. Questa è una proprietà peculiare dei sistemi lineari.

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

\downarrow $x_e(t)$ \downarrow $x_f(t)$

A lato la rappresentazione e la relativa evoluzione libera e quella forzata.

Si dice risposta in evoluzione libera perché questa è la risposta che si ha nell'evoluzione dello stato. Si ottiene quando l'ingresso u è identicamente nullo. Questo partendo da uno stato x_0 diverso da

zero e un ingresso u da t_0 a infinito identicamente nullo. È la risposta del sistema in evoluzione libera, quando non c'è ingresso, quando non c'è forzamento (l'ingresso in termini ingegneristici si chiama forzamento). Essa è una funzione lineare di x_0 . Ovvero è una funzione lineare dello stato iniziale, ottenuta come una matrice per x_0 .

La seconda parte, la risposta forzata, è quella che si ottiene quando si parte da uno stato iniziale $x_0 = 0$ e si applica un ingresso u da t_0 a infinito che è una funzione diversa da zero. In questo caso la risposta dello stato è uguale alla seconda parte, quella che sottiene all'integrale. È la risposta in presenza di un forzamento a partire da uno stato iniziale nullo.

Nei sistemi lineari lo stato e l'ingresso non si combinano per dare una risposta, ma danno vita: lo stato iniziale ad una risposta, l'ingresso ad un'altra parte della risposta. Questi due parti si combinano nel modo più semplice nel senso della

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t (\quad) u(\tau) d\tau$$

\downarrow $y_e(t)$ \downarrow $y_f(t)$

somma delle due componenti.

La stessa proprietà vale anche per l'uscita: è una funzione data da una somma di componenti, un primo componente è una matrice per x_0 , lo stato iniziale,

la seconda è la risposta forzata.

$x_l(t)$ e $y_l(t)$

sono funzioni lineari di $x(t_0)$

$x_f(t)$ e $y_f(t)$

sono funzionali lineari di $u(t)$ sull'intervallo $[t_0, t]$

(connessione con causalità)

In sostanza x_l e y_l sono funzioni lineari di $x(t_0)$, mentre x_f e y_f sono funzionali lineari di $u(t)$, cioè dell'ingresso, sull'intervallo $[t_0, t]$.

Si dice funzionale una funzione che dipende da un'altra funzione.

È causale perché la x al tempo t non dipende da quanto vale la u per istante di tempo superiori a t , questo perché l'integrale è esteso tra t_0 e t .

La risposta impulsiva

È di fatto la risposta ad un impulso, la risposta ad un ingresso che è diverso da zero soltanto in un certo istante t_0 e che dà un impulso (una percossa).

$$y_f(t) = \int_{t_0}^t \underbrace{\left(C e^{\frac{A(t-\tau)}{B} + D \delta(t-\tau)} \right)}_{\substack{\text{se } u \text{ è impulsivo} \\ \delta(\tau-t_0) \rightarrow \underline{\underline{W(t-t_0)}}}} u(\tau) d\tau$$

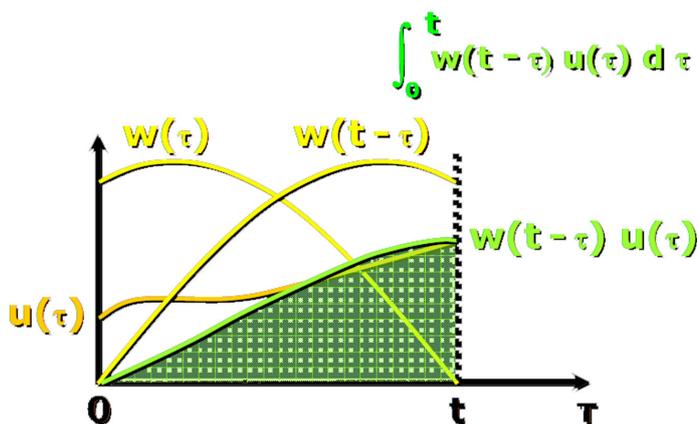
$$y_f(t) = \int_{t_0}^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

Da questo deriva che la y_f è un integrale di un oggetto che è esso stesso una risposta, con l'ingresso. È un integrale particolare la cui forma mostrata in figura e si chiama integrale di convoluzione, cioè la risposta forzata di un sistema lineare.

$$y_f(t) = \int_{t_0}^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

integrale di convoluzione

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE



Da queste considerazioni risulta che i sistemi lineari, per quanto riguarda in particolare la parte forzata, godono di una proprietà molto particolare e cioè che esiste dunque una risposta, risposta all'impulso, che consente di calcolare tutte le altre risposte forzate.

Cioè se è stata calcolata la risposta all'ingresso di tipo impulsivo, allora posso calcolare tutte le altre risposte forzate, facendo l'integrale di convoluzione di quella risposta con l'ingresso nuovo di cui voglio conoscere l'andamento della risposta forzata.

Questo implicitamente può essere formulato come la risposta impulsiva sia un modello matematico del comportamento forzato.

Cioè per calcolare un comportamento forzato si può fare l'integrale di convoluzione con la risposta impulsiva e questa è una proprietà molto speciale dei sistemi lineari.

Il calcolo della risposta impulsiva, eventualmente per via sperimentale, dà un modello del comportamento forzato ($x_0 = 0$), che si ottiene quando lo stato iniziale è nullo.

Questo vuol dire che se ho un sistema fisico che è a riposo e voglio calcolare un modello matematico del comportamento forzato di questo oggetto fisico allora prendo questo sistema, gli do un ingresso impulsivo (una percossa), osservo l'uscita, e l'uscita che ottengo sarà la risposta all'impulso, traduco la risposta in termini matematici e ottengo la $W(t)$. La $W(t)$ è un oggetto matematico che posso usare per calcolare una qualsiasi altra risposta senza applicarla direttamente al sistema.

Per calcolare ogni altra risposta basta dunque eseguire l'integrale di convoluzione con ingresso.

Il problema della realizzazione

Dalle ultime considerazioni fatte abbiamo inteso che il modello matematico della risposta forzata può essere ottenuto anche per via sperimentale, oppure può essere ottenuto in qualche modo senza immaginare di essere partiti dal modello implicito. È dunque interessante porsi il problema inverso.

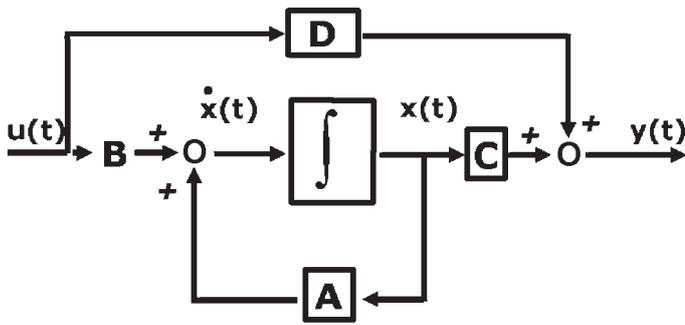
Il passaggio dalla rappresentazione implicita (quello che è stato fatto in questa lezione) a quella esplicita significa calcolare la soluzione.

Nell'ingegneria ha interesse anche il passaggio inverso: dalla $W(t)$, calcolata per via sperimentale o altro, ad una rappresentazione implicita.

Alla rappresentazione implicita può essere associato uno schema, come raffigurato.

Questo schema rappresenta di per sé un sistema, un oggetto fisico, che può essere implementato in termini di calcolo, oppure in termini fisici, che consente di emulare il comportamento dell'oggetto fisico in quanto è un dispositivo, di cal-

schema associato alla rappresentazione implicita



colo o fisico, che consente di calcolare l'evoluzione nello stato ($x(t)$) e l'evoluzione nell'uscita ($y(t)$) al variare dell'ingresso ($u(t)$).

È in sostanza un emulatore in tempo reale del sistema fisico. Si può quindi immaginare che, dato sistema fisico, si possa calcolare la risposta impulsiva

dando un impulso all'ingresso osservando l'uscita, poi modellare la $W(t)$ e costruire una rappresentazione implicita del sistema che ha quella risposta impulsiva e quindi metterlo in piedi uno schema del tipo raffigurato a lato, comprando degli integratori, dei sommatore, o altro, e realizzare un emulatore fisico del sistema dato. A questo punto si applica una $u(t)$ e si guarda la relativa $y(t)$.

Quindi si può prevedere quello che succederebbe sul sistema perché abbiamo un altro oggetto che si comporta allo stesso modo.

La rappresentazione implicita e lo schema di realizzazione ad esso associato danno una procedura per calcolare la risposta in tempo reale.

Questo è uno schema che, al contrario di quanto accadeva utilizzando l'integrale di convoluzione, consente di produrre in tempo reale la $x(t)$ e la $y(t)$ a partire dalla $u(t)$.

Avere una rappresentazione implicita significa poter realizzare (fisicamente o per via sperimentale) un emulatore del sistema fisico allo studio.

Si può quindi costruire un dispositivo che emula un dato fenomeno, un dato processo, un dato oggetto fisico, oppure semplicemente un modello matematico (che vedremo avere un suo rilievo).

Il concetto si chiama problema della realizzazione perché permette di arrivare ad una realizzazione fisica.

Sistemi a tempo discreto

Il punto di partenza

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad x(k_0) = x_0$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

la rappresentazione implicita

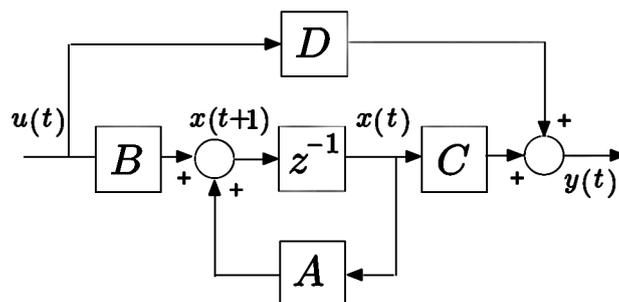
$$x(k) = A^{(k-k_0)} x_0 + \sum_{\tau=k_0}^{k-1} A^{k-\tau-1} B u(\tau)$$

$$y(k) = C A^{(k-k_0)} x_0 + \sum_{\tau=k_0}^{k-1} C A^{k-\tau-1} B u(\tau) + D u(k)$$

$\Phi(k) = A^k$	$H(k) = A^{k-1} B$
$\Psi(k) = C A^k$	$W(k) = \begin{cases} C A^{k-1} B & k > 0 \\ D & k = 0 \end{cases}$

Le proprietà e le considerazioni sulle proprietà sono le stesse già fatte nel caso dei sistemi a tempo continuo

Nei sistemi a tempo discreto, lo schema, detto di realizzazione, o di simulazione, è il seguente:



□

Prof. Salvatore Monaco
42'04"

- La matrice di transizione e i cambiamenti di coordinate
- Autovalori e autovettori - richiami
- Matrice di transizione: caso di autovalori reali e distinti
- Matrice di transizione: caso di autovalori reali e A semplice
- Matrice di transizione: caso di A semplice

LA MATRICE DI TRANSIZIONE

Obiettivo della lezione è quello di vedere come si fa a calcolare la matrice di transizione.

Nella scorsa lezione abbiamo visto che il calcolo delle soluzioni, nell'evoluzione dello stato e in uscita, in x e in y , passa attraverso il calcolo di e^{At} , la matrice di transizione.

Occorre fare una premessa: se $D = TAT^{-1}$, in cui A è la matrice dinamica del nostro sistema, e sappiamo calcolare e^{Dt} , cioè sappiamo calcolare l'esponenziale della matrice D , allora sappiamo calcolare anche l'esponenziale della matrice A , ovvero risulta

$$e^{At} = e^{T^{-1}Dt} = T^{-1}e^{Dt}T$$

La dimostrazione è semplice.

$$\begin{aligned}
 A &= T^{-1}DT \\
 e^{At} &= I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots \\
 &= I + tT^{-1}DT + \frac{t^2}{2} \underbrace{T^{-1}DT}_{A} \underbrace{T^{-1}DT}_{A} + \dots \\
 &= I + tT^{-1}DT + \frac{t^2}{2} T^{-1}D^2T + \dots
 \end{aligned}$$

Andando avanti nei conti possiamo dire che in generale $(T^{-1}DT)^k = T^{-1}D^kT$.

Otteniamo quindi per e^{At} l'espressione $e^{At} = I + tT^{-1}DT + \dots$, se sostituiamo la matrice identità con $T^{-1}T$ e mettiamo in evidenza a sinistra T^{-1} e a destra T , otteniamo l'espressione finale, che è quello che volevamo.

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= T^{-1} \left(I + tD + \frac{t^2}{2!} D^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} D^k + \dots \right) T \\
 &= T^{-1} e^{DT} T
 \end{aligned}$$

Quindi se sappiamo calcolare l'esponenziale di una matrice D sappiamo anche calcolare l'esponenziale della matrice A legata a D da una relazione del tipo $D = TAT^{-1}$ (che corrisponde ad una trasformazione di coordinate).

A questo punto il problema del calcolo dell'esponenziale di una matrice A diventa calcolare una matrice T , a seguito di una trasformazione di coordinate, per metterla in una forma della quale sappiamo calcolare l'esponenziale.

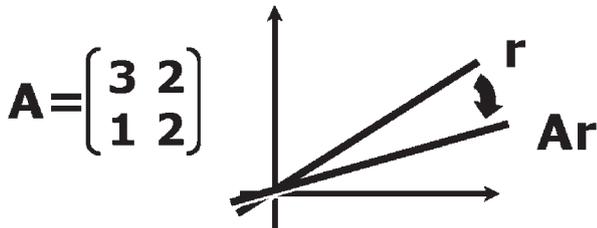
$D = TAT^{-1}$ e A rappresentano lo stesso operatore lineare in basi diverse.

Precisamente A nelle coordinate x e TAT^{-1} nelle coordinate $z = Tx$, in cui A è la forma dell'operatore nelle coordinate x , TAT^{-1} è la rappresentazione dello stesso operatore ma nelle coordinate $z = Tx$; z saranno le nuove variabili di stato.

Il calcolo di e^{At} può essere ricondotto al calcolo delle coordinate rispetto alle quali l'operatore assume la forma più "semplice".

Richiami su autovalori e autovettori

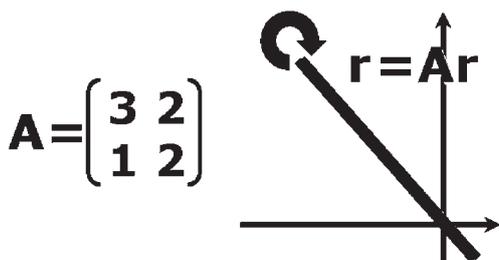
Un operatore lineare A trasforma rette passanti per l'origine in rette passanti per l'origine



Un operatore lineare A trasforma retta passante per l'origine in rette passanti per l'origine.

La retta r è la retta generata vettore che ha tutti 1, applicando l'operatore A a tutti i punti di r otteniamo un'altra retta che sarà la retta Ar. Ad esempio, se prendiamo il punto (1, 1) esso sarà trasformato nel punto (5, 3). L'operatore A trasforma rette in rette.

Dato A, esistono rette che vengono trasformate in se stesse?



A lato ci facciamo una domanda, la cui risposta è nella immagine sottostante.

Esiste una retta che viene trasformata in se stessa

Esiste un numero λ ed un vettore u tali che

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}$$

autovettore autovalore

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = d(\lambda) = 0$$

con

$$d(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

ed n è la dimensione di A

A lato l'espressione di risoluzione dell'equazione, nelle incognite λ e u. Poiché u è un vettore, si noti come a destra λ moltiplichi il vettore unità I.

Affinché l'equazione $(A - \lambda I)u = 0$ abbia soluzione nel vettore u, la matrice $A - \lambda I$ deve essere singolare.

Si calcola quindi il determinante, in funzione di λ , e lo si uguaglia a zero (si ottiene un polinomio di grado n, stessa dimensione della matrice A; tale polinomio è detto polinomio caratteristico associato alla matrice A).

ne un polinomio di grado n, stessa dimensione della matrice A; tale polinomio è detto polinomio caratteristico associato alla matrice A).

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = d(\lambda) = 0$$

per il teorema fondamentale
dell'algebra
esistono n soluzioni

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$
numeri reali e coppie
di complessi coniugati

A lato un esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = d(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$d(\lambda) = (\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 4$$

In corrispondenza
di ciascuno dei λ_i possiamo
risolvere

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

Questa è l'equazione omogenea nell'in-
cognita \mathbf{u} .

$$\begin{aligned} & \lambda_2 = 4 \\ & \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \\ & \lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \\ & (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dall'esempio abbiamo 2 autovalori, dai
quali calcoliamo due autovettori.

Supponiamo che
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
 siano reali e distinti

Per ogni autovalore λ_k esiste
 un autovettore u_k soluzione di

$$(A - \lambda_k I) u_k = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \rightarrow & u_1 \\ & \vdots & \\ \lambda_n & \rightarrow & u_n \end{array}$$

→ gli autovettori u_1, \dots, u_n
 sono linearmente indipendenti
 fra di loro

$$\left| \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \right| \neq 0$$

→ si scelga una trasformazione
 di coordinate $z = Tx$ con

$$T^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \right)$$

→ ciò che equivale a scegliere
 come nuova base
 gli autovettori u_1, \dots, u_n

Poiché gli autovettori sono indipendenti
 allora posso eseguire una trasforma-
 zione di coordinate, nello spazio di stato,
 $z = Tx$ con T^{-1} come riportata, matrice $n \times n$
 non singolare.

Come diventa l'operatore
 in questa nuova base?

$$TAT^{-1} = \left[? \right]$$

$$A \left(\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \right) \left[? \right]$$

Come diventa l'operatore questa base?
 Cioè come diventa la matrice dinamica A
 in questa nuova base?

La matrice diventa TAT^{-1} . Per calcolarla
 si moltiplicano entrambi i membri per T^{-1} .

A sinistra rimane AT^{-1} , a destra T^{-1} per
 quello che vogliamo determinare.

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \uparrow \mathbf{u}_1 & \dots & \uparrow \mathbf{u}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow \mathbf{u}_1 & \dots & \uparrow \mathbf{u}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_n = \lambda_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

Posto $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{v}'_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{v}'_n \rightarrow \end{pmatrix}$

$$\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \Lambda \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \Lambda \mathbf{T}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \uparrow \mathbf{u}_1 & \dots & \uparrow \mathbf{u}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{v}'_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{v}'_n \rightarrow \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \uparrow \mathbf{u}_1 & \dots & \uparrow \mathbf{u}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{v}'_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{v}'_n \rightarrow \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}'_k$$

Forma spettrale di A

Si fanno i prodotti per colonne,

quindi $\mathbf{A} \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$ e siccome \mathbf{u}_1 è la prima colonna della prima delle due matrici al secondo membro, questo impone necessariamente che la prima colonna della matrice di cui voglio scoprire i coefficienti necessariamente non possa essere fatta che come λ_1 e tutti zeri. Questo perché quando applicherò tale matrice per il primo vettore \mathbf{u}_1 (della matrice a sinistra, nel secondo membro) possa ottenere $\lambda_1 \mathbf{u}_1$.

Tale procedura si ripete in modo analogo.

Quello che si ottiene è che la matrice $\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$ è la matrice diagonale con tutti gli autovalori sulla diagonale.

A tale matrice viene assegnato il nome identificativo di lambda maiuscola, Λ .

La matrice \mathbf{T} è composta dalle \mathbf{V}'_i , che sono vettori riga; è l'inversa della matrice degli autovettori e \mathbf{V}'_i sono le righe dell'inversa della \mathbf{T}^{-1} , matrice degli autovettori.

Si moltiplicano ambo i membri, a sinistra per \mathbf{T}^{-1} e a destra per \mathbf{T} , per far rimanere \mathbf{A} al primo membro, si ottiene \mathbf{A} come da figura a lato.

Si scopre come \mathbf{A} abbia una forma particolare.

Il prodotto produce il risultato a lato, detto forma spettrale di \mathbf{A} .

\mathbf{A} è combinazione lineare degli autovalori λ_k con gli \mathbf{u}_k e i \mathbf{v}'_k ; \mathbf{u}_k è un auto-

vettore, v'_k è il vettore riga dell'inversa di T^{-1} , costruita con gli autovettori.

A è una matrice quadrata di rango unitario.

$$e^{At} = T^{-1} e^{\Lambda t} T$$

ma

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Una forma molto simile vale per l'esponenziale della matrice, in quanto e^{At} è esprimibile nella forma riportata a lato.

Sapendo calcolare $e^{\Lambda t}$, per calcolare e^{At} basta pre-moltiplicarla per T^{-1} e post-moltiplicarla per T .

Ma l'esponenziale di una matrice diagonale, in questo caso $e^{\Lambda t}$, ha la forma riportata a lato, cioè è la matrice diagonale degli esponenziali.

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{v}'_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{v}'_n \rightarrow \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} \mathbf{u}_k \mathbf{v}'_k$$

Forma spettrale di e^{At}

Pre-moltiplicando e post-moltiplicando, rispettivamente per T^{-1} e T , ottengo l'espressione a lato.

Facendo la moltiplicazione ottengo una forma esprimibile dalla sommatoria riportata, tale sommatoria è la forma spettrale di e^{At} .

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \quad \mathbf{T} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{T} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^t + 2e^{4t} & -2e^t + 2e^{4t} \\ -e^t + e^{4t} & 2e^t + e^{4t} \end{pmatrix}$$

Il risultato che si ottiene è una matrice in cui ogni elemento è combinazione lineare di leggi esponenziali associate agli autovalori che stanno lungo la diagonale di $\mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}t}$. Pre-moltiplicando e post-moltiplicando è come fare una combinazione lineare delle funzioni.

Supponiamo che A abbia autovalori reali ma non necessariamente distinti

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \rightarrow \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \rightarrow \mu_m \end{array} \quad \mu_k \text{ è la molteplicità algebrica dell'autovalore}$$

$$\mu_1 + \dots + \mu_m = n$$

Supponiamo che l'equazione

$$(A - \lambda_k I) u_k = 0$$

ammetta, per ogni λ_k , μ_k soluzioni indipendenti

$$u_{k,1}, \dots, u_{k,\mu_k}$$

(A semplice)

molteplicità algebrica di soluzioni indipendenti tra di loro.

Questo è il caso di A semplice (o regolare), ci sono quindi autovalori coincidenti, ma in corrispondenza di ogni autovalore posso trovare tanti autovettori quanta è la molteplicità dell'autovalore.

Posto

$$U_k = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ u_{k,1} & \dots & u_{k,\mu_k} \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

e

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ U_1 & \dots & U_m \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Tutti i vettori che otteniamo sono indipendenti, quindi possiamo assumere questa operazione come una trasformazione di coordinate e la chiamiamo TAT^{-1} , fatta come mostrato in figura.

La matrice TAT^{-1} è ancora diagonale.

Il caso di A semplice con autovalori reali

Supponiamo che A abbia autovalori reali, ma che ci possano essere autovalori coincidenti.

La somma delle molteplicità deve essere uguale al numero degli zeri del polinomio.

u_k sono gli autovettori.

Dunque A semplice se ci sono autovalori coincidenti, ma in corrispondenza degli autovalori posso trovare tanti autovettori quanta è la corrispondenza dell'autovalore.

Ci sono tante soluzioni quanta è la molteplicità algebrica di soluzioni indipendenti tra di loro.

In questo caso poniamo U_k la matrice fatta dall'aggregato degli autovettori associati a ciascun autovalore, e indichiamo con T^{-1} la matrice ottenuta aggregando le U_k .

\rightarrow si verifica

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 \end{array} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{array}{c|c} \lambda_m & 0 \\ \hline 0 & \lambda_m \end{array} \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale ci sono gli autovalori tante volte quanta è la molteplicità algebrica.

Senza perdita di generalità si può pensare che gli autovalori siano distinti e che ciascuno sia associato a un diverso autovettore.

Anche in questo caso

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k'$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k'$$

Rifacendo i calcoli, otteniamo anche in questo caso una forma spettrale per A e lo stesso per $e^{\mathbf{A}t}$.

Abbiamo una differenza rispetto a prima che consiste nel fatto che alcuni dei termini che contengono λ possono essere coincidenti.

→ potendo essere alcuni coincidenti

$n = 3$

λ_1	λ_1	λ_2	
└──┬──		└──┬──	
$\mu_1 = 2$		$\mu_2 = 1$	
↓			
u_{11}	u_{12}	u_2	
} ↓	} ↓	} ↓	
u_1	u_2	u_3	$T^{-1} = (u_1 \ u_2 \ u_3)$
			$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Esempio a lato.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A lato un esempio, per un caso elementare.

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = d(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -1$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per semplicità di notazione
si assuma $n=3$

$$d(\lambda) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\lambda \rightarrow \mathbf{u} \text{ reale}$$

$$\alpha + j\omega \rightarrow ?$$

$$\alpha - j\omega \rightarrow ?$$

Il caso di \mathbf{A} semplice

Gli autovalori non sono più necessariamente reali.

Supporremo di avere una matrice di dimensione 3 e di avere tre autovalori distinti.

Abbiamo il polinomio caratteristico funzione di λ e lo uguagliamo a zero.

Risolviamo l'equazione caratteristica e si suppone che ci sia un'autovalore reale a questo corrisponde un'autovettore reale,

e che ci sia una coppia di autovalori complessi (il numero complesso e il suo coniugato). Dobbiamo dunque stabilire, in termini di autovettori, cosa corrisponde alla coppia di autovalori complessi.

$$(\mathbf{A} - (\alpha + j\omega) \mathbf{I}) (\mathbf{u}_a + j\mathbf{u}_b) = \mathbf{0}$$

e

$$(\mathbf{A} - (\alpha - j\omega) \mathbf{I}) (\mathbf{u}_a - j\mathbf{u}_b) = \mathbf{0}$$

→ Ad autovalori complessi coniugati sono associati autovettori complessi coniugati

Le equazioni da risolvere sono due, una per il numero complesso e una per il suo coniugato.

$$(\mathbf{A} - (\alpha + j\omega) \mathbf{I}) (\mathbf{u}_a + j\mathbf{u}_b) = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - (\alpha - j\omega) \mathbf{I}) (\mathbf{u}_a - j\mathbf{u}_b) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Ad autovalori complessi coniugati sono associati autovettori complessi coniugati.

Risolvere le due equazioni equivale a risolvere l'equazione matriciale come visualizzato in figura.

Per risolvere l'equazione, si spezza in due parti, quella reale e quella immaginaria.

$$(\mathbf{A} - (\alpha + j\omega) \mathbf{I}) (\mathbf{u}_a + j\mathbf{u}_b) = \underline{0} + j\underline{0}$$

$$A u_a - \alpha u_a + \omega u_b = 0 \quad \text{parte reale}$$

$$A u_b - \omega u_a - \alpha u_b = 0 \quad \text{parte immaginaria}$$



$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

A lato è riportato lo sviluppo.

Posto $T^{-1} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}$$

Se ora prendiamo una T^{-1} fatta come a lato e facciamo TAT^{-1} , il che equivale ad andare a vedere com'è fatta quella matrice che si ottiene quando a sinistra ho AT^{-1} e a destra ho T^{-1} che moltiplica questa matrice, otteniamo quello che è riportato sotto.

$$A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u} \\ \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \omega & \alpha \\ 0 & -\omega & \alpha \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{T^{-1} \Lambda_R T t} = T^{-1} e^{\Lambda_R t} T =$$

$$\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\alpha & \omega \end{pmatrix} t \\ 0 & e^{\dots} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{v}' \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{v}'_a \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{v}'_b \rightarrow \end{pmatrix}$$

ma

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\alpha & \omega \end{pmatrix} t} =$$

$$e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

e quindi

$$e^{At} =$$

$$\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos \omega t & e^{\alpha t} \text{sen} \omega t \\ 0 & -e^{\alpha t} \text{sen} \omega t & e^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{v}' \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{v}'_a \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{v}'_b \rightarrow \end{pmatrix}$$

$$e^{At} =$$

$$e^{\lambda t} \mathbf{u} \mathbf{v}' + e^{\lambda t} \mathbf{u}_a [\cos(\omega t) \mathbf{v}'_a + \text{sen}(\omega t) \mathbf{v}'_b] + e^{\lambda t} \mathbf{u}_b [\cos(\omega t) \mathbf{v}'_b - \text{sen}(\omega t) \mathbf{v}'_a]$$

In generale
per A semplice

$$\lambda_1 \rightarrow \mathbf{u}_1$$

⋮

$$\lambda_m \rightarrow \mathbf{u}_m$$

$$\lambda_1, \lambda_1^* \rightarrow \mathbf{u}_{a1}, \mathbf{u}_{b1}$$

⋮

$$\lambda_v, \lambda_v^* \rightarrow \mathbf{u}_{av}, \mathbf{u}_{bv}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_m & \mathbf{u}_{a1} & \mathbf{u}_{b1} & \dots & \mathbf{u}_{av} & \mathbf{u}_{bv} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & \alpha_i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_m & \\ \hline & & & \mathbf{0} \\ & & & \\ \mathbf{0} & & & \Lambda_1 \\ & & & \ddots \\ & & & \Lambda_v \end{pmatrix}$$

Quindi una forma diagonale associata agli autovalori reali è una forma diversa di matrici 2×2 ancora diagonale con parte reale e con parte immaginaria.

Questi calcoli sulla matrice di trasposizione, sull'esponenziale della matrice A , nel caso di A semplice, sono alla base del calcolo della risposta in evoluzione libera e quindi di quelli che sono i modi fondamentali del comportamento di un sistema dinamico lineare.

Il caso di A non semplice, il caso più generale, sarà affrontato nello studio nel dominio complesso.

□

Prof. Salvatore Monaco
41'15"

- Introduzione
- Risposta in evoluzione libera
 - Modi aperiodici (associati agli autovalori reali)
 - Modi pseudo periodici (associati alle coppie di autovalori complessi e coniugati)
- I modi nel regime forzato e in uscita
- Modi naturali eccitabili
- Modi naturali osservabili

Introduzione

Vedremo come sono fatte le evoluzioni nello stato e in uscita nei sistemi lineari stazionari a tempo continuo.

Assumeremo A semplice. Il caso generale verrà esaminato nel contesto dell'analisi nel dominio di Laplace.

La risposta in evoluzione libera - modi aperiodici e pseudoperiodici

Vogliamo studiare quale è l'andamento nello spazio di stato delle soluzioni dell'equazione differenziale, o dei sistemi di equazioni differenziali, quando al tempo 0 parte dallo stato x_0 .

$\dot{x} = Ax$	$x(0) = x_0$
ha come soluzione $X_1(t) = e^{At} x_0$	

La soluzione, la risposta in evoluzione libera, è riportata a lato, ovvero la matrice di transizione moltiplicata per x_0 .



Senza perdita di generalità si assuma $n=3$

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow u \\ \alpha + j\omega &\rightarrow u_a + ju_b \\ \alpha - j\omega &\rightarrow u_a - ju_b \end{aligned}$$

Per non mettere pedici ed apici, si assume $n = 3$, nel ricordare il calcolo di e^{At} , la matrice di transizione.

C'è un'autovalore reale e una coppia di autovalori complessi e coniugati, u è l'autovettore associato a λ , gli altri due, $u_a + ju_b$ e $u_a - ju_b$, sono gli autovettori associati alla coppia di autovalori complessi e coniugati.

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \leftarrow & \mathbf{v}' & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{v}'_a & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{v}'_b & \rightarrow \end{pmatrix}$$

nelle coordinate $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha & \omega \\ \mathbf{0} & -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \Lambda_R$$

forma diagonale a coefficienti reali

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{e}^{\mathbf{T}^{-1} \Lambda_R \mathbf{T} t} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^{\Lambda_R t} \mathbf{T}$$

$$\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{\lambda t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t \\ \mathbf{0} & \mathbf{e} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow & \mathbf{v}' & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{v}'_a & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{v}'_b & \rightarrow \end{pmatrix}$$

ma

$$\mathbf{e}^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t} =$$

$$\mathbf{e}^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \text{sen } \omega t \\ -\text{sen } \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} =$$

$$\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}_a & \mathbf{u}_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{\lambda t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{\alpha t} \cos \omega t & \mathbf{e}^{\alpha t} \text{sen } \omega t \\ \mathbf{0} & -\mathbf{e}^{\alpha t} \text{sen } \omega t & \mathbf{e}^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow & \mathbf{v}' & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{v}'_a & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{v}'_b & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Date le due matrici \mathbf{T}^{-1} e \mathbf{T} costruite come a lato, se ci mettiamo nelle coordinate $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, in cui l'operatore è rappresentato dalla matrice \mathbf{TAT}^{-1} , la matrice è diagonale, in qualche modo a blocchi; in alto l'autovalore reale, poi un blocco di dimensione 2 associato alla coppia complessa coniugata fatto da parte reale e parte immaginaria, meno parte immaginaria negativa e parte reale.

Questa è quella che chiameremo la forma diagonale a coefficienti reali.

A questo punto passiamo a $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$, che ha una rappresentazione come a lato riportato.

Essa viene riscritta come riportato.

$$e^{At} = e^{\lambda t} u v' +$$

$$e^{\alpha t} u_a [\cos \omega t v'_a + \text{sen } \omega t v'_b] +$$

$$+ e^{\alpha t} u_b [\cos \omega t v'_b - \text{sen } \omega t v'_a]$$

Questo è il risultato finale.

Sulla base di questo vediamo l'evoluzione libera nello stato.

**L'evoluzione libera
nello stato risulta
allora**

$$X_i(t) = e^{At} x_0$$

si ottiene

$$x_i(t) = e^{At} x_0 = c e^{\lambda t} u +$$

$$e^{\alpha t} u_a [\cos \omega t c_a + \text{sen } \omega t c_b] + e^{\alpha t} u_b [\cos \omega t c_b - \text{sen } \omega t c_a]$$

ESPRESSIONE DELL'EVOLUZIONE LIBERA NEL TEMPO

$$e^{\lambda t} \mu v' x_0 +$$

coeff. c

$$e^{\alpha t} \mu_a (\cos \omega t v'_a + \text{sen } \omega t v'_b) x_0 +$$

$$e^{\alpha t} \mu_b (\cos \omega t v'_b - \text{sen } \omega t v'_a) x_0$$

$$\parallel$$

$$e^{At} x_0$$

altri 2 coefficienti:

$$v'_a x_0 = c_a$$

$$v'_b x_0 = c_b$$

la notazione v'_a
indica v_a trasposto.

v'_a e v'_b sono vettori riga,
 x_0 è un vettore colonna,
il loro prodotto è un coefficiente.

x_0 , fattore moltiplicativo, applicato
dopo aver scritto tutta l'uguaglianza

dove $\mathbf{v}' \mathbf{x}_0 = \mathbf{c}$

$$\mathbf{v}'_a \mathbf{x}_0 = \mathbf{c}_a \quad \mathbf{v}'_b \mathbf{x}_0 = \mathbf{c}_b$$

\mathbf{c} , \mathbf{c}_a e \mathbf{c}_b sono
le componenti di \mathbf{x}_0 nella
base $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b)$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{c} \mathbf{u} + \mathbf{c}_a \mathbf{u}_a + \mathbf{c}_b \mathbf{u}_b$$

A lato ulteriori semplificazioni dell'espressione dell'evoluzione libera nel tempo, quanto risulta che \mathbf{c} , \mathbf{c}_a , \mathbf{c}_b , sono le componenti di \mathbf{x}_0 nella base $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b)$. Cioè nella nuova base in cui ci siamo messi in quanto abbiamo fatto una trasformazione di coordinate con una T^{-1} che aveva proprio delle colonne \mathbf{u} , \mathbf{u}_a e \mathbf{u}_b . Quindi significa che abbiamo assunto quelli come nuovi vettori di base.

L'espressione $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{c} \mathbf{u} + \mathbf{c}_a \mathbf{u}_a + \mathbf{c}_b \mathbf{u}_b$ si ottiene ponendo $t = t_0$ nella espressione scritta a mano, nella pagina precedente.

Ponendo

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}$$

$$c_a/m = \text{sen } \varphi$$

$$c_b/m = \text{cos } \varphi$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{c} e^{\lambda t} \mathbf{u} + m e^{\alpha t} [\text{sen}(\omega t + \varphi) \mathbf{u}_a + \text{cos}(\omega t + \varphi) \mathbf{u}_b]$$

A lato ulteriori posizioni, che permettono di ottenere una nuova espressione

$$e^{\lambda t} \mathbf{c} \mathbf{u} + m e^{\alpha t} \mathbf{u}_a \left(\text{cos } \omega t \frac{c_a}{m} + \text{sen } \omega t \frac{c_b}{m} \right) +$$

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}$$

$$c_a/m = \text{sen } \varphi$$

$$c_b/m = \text{cos } \varphi$$

$$m e^{\alpha t} \mathbf{u}_a (\text{cos } \omega t \text{sen } \varphi + \text{sen } \omega t \text{cos } \varphi)$$

Per le formule di prostaferesi, l'espressione in parentesi è il $\text{sen}(\omega t + \varphi)$.

L'evoluzione libera nello stato è fondamentalmente la somma di due termini: il primo caratterizzato da una legge di moto di tipo esponenziale, che avviene nella direzione del vettore u , moltiplicato per un coefficiente c che rappresenta la componente iniziale dello stato x_0 lungo il vettore u ; il secondo caratterizzato da una legge di tipo esponenziale che moltiplica una legge di tipo seno e coseno che avviene in due direzioni (i due vettori u_a e u_b che non sono allineati e individuano un piano) dello spazio.

In sostanza abbiamo che la risposta in evoluzione libera è combinazione lineare di due termini:

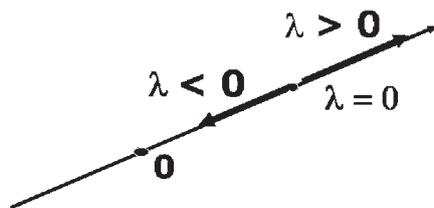
- . Uno associato all'autovalore reale, chiamato modo aperiodico. Questo evolve nella direzione dell'autovettore
- . Uno associato alla coppia di complessi, chiamato modo pseudo-periodico. Questo evolve nel piano dato da u_a e u_b .

Siamo nel caso $n = 3$, per supposizione, per cui c'è un autovalore reale e una coppia di complessi coniugati.

Di seguito una analisi di come sono fatti i due modi.

MODO APERIODICO MODO APERIODICO

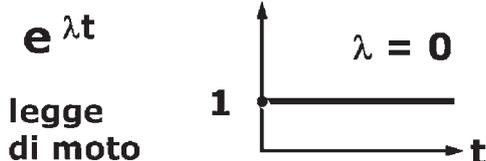
λ reale $e^{\lambda t} u$



$\lambda = 0$, si rimane fermi in 1.

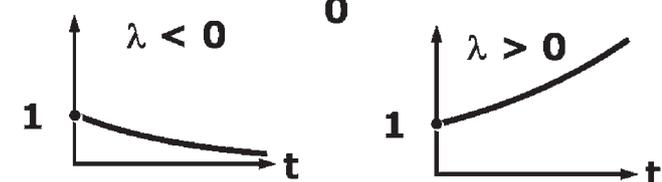
$\lambda < 0$, l'evoluzione parte un certo punto e tende verso lo zero.

$\lambda > 0$, abbiamo una legge esponenziale che cresce nel tempo, l'evoluzione parte da 1 e si allontana.



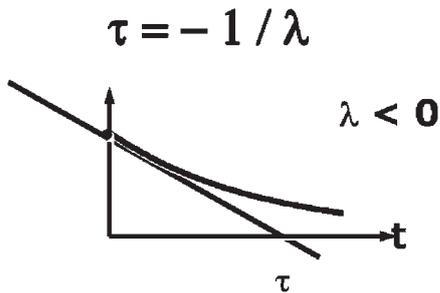
A lato le relative leggi di moto.

Il moto può essere costante, tendente a zero o tendente all'infinito.



La legge di moto del modo naturale è $e^{\lambda t}$.

Parametro caratteristico LA COSTANTE DI TEMPO



Quello che caratterizza il modo naturale aperiodico è l'autovalore λ . Un parametro che viene assunto a caratterizzare la legge temporale, al posto di λ , è un parametro caratteristico detto "la costante di tempo", lettera τ (tau). Essa è definita come l'inverso dell'opposto dell'autovalore λ (cioè $-1/\lambda$). Al lato la rappresentazione grafica.

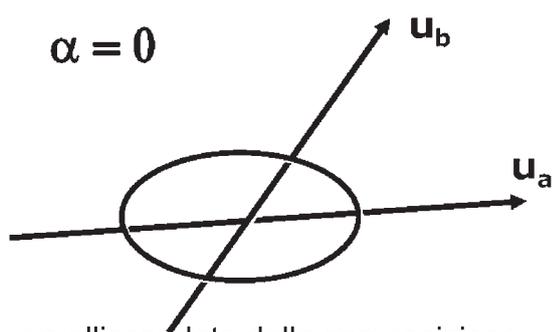
Per $\lambda < 0$, τ (tau) è l'ampiezza del segmento che è sotteso dalla tangente nel punto iniziale ($t = 0$) della legge esponenziale. La derivata della legge esponenziale ci permette di calcolare il coefficiente angolare della retta.

Il parametro τ è positivo quando l'autovalore reale è negativo, questo ha un significato fisico. Il significato fisico consiste nell'andare a vedere l'ampiezza dell'evoluzione nel punto in cui τ incontra l'asse temporale, cioè a quale valore corrisponde sull'asse delle y, che è $1/e$, se è 1 il punto che la curva incontra sull'asse y. In sostanza τ è il tempo necessario affinché l'evoluzione si riduca di un fattore e rispetto al valore iniziale

MODO PSEUDO-PERIODICO MODO PSEUDO-PERIODICO

$$\lambda = \alpha \pm j \omega$$

$$e^{\alpha t} [\text{sen}(\omega t + \varphi) u_a + \text{cos}(\omega t + \varphi) u_b]$$



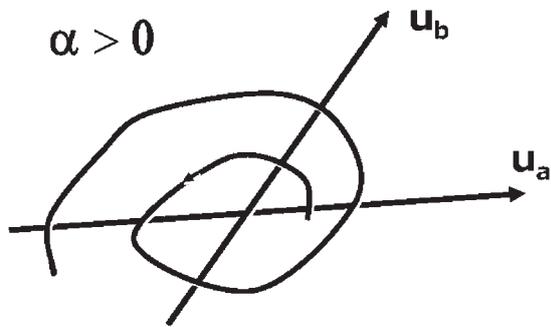
è una ellisse, data dalla composizione di una legge di tipo seno e coseno

Il modo pseudo-periodico è associato a una coppia di complessi coniugati.

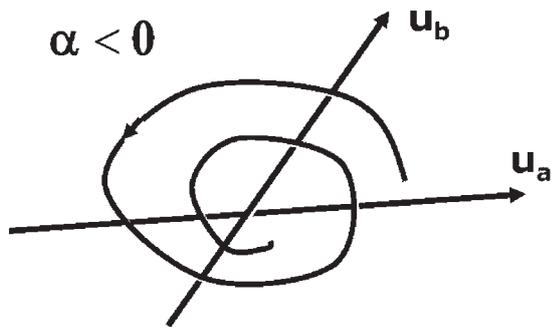
Al lato la relativa formula. È una legge di moto di tipo seno e coseno che avviene nel piano u_a, u_b , e precisamente nella direzione u_a con una legge di tipo sinusoidale e nella direzione u_b con una legge di tipo cosinusoidale. C'è uno sfasamento iniziale, c'è un iniluppo esponenziale.

A lato quello la rappresentazione grafica di quello che avviene nel piano individuato dai due vettori u_a e u_b .

A lato l'andamento per $\alpha = 0$; si ricorda che α è la parte reale.

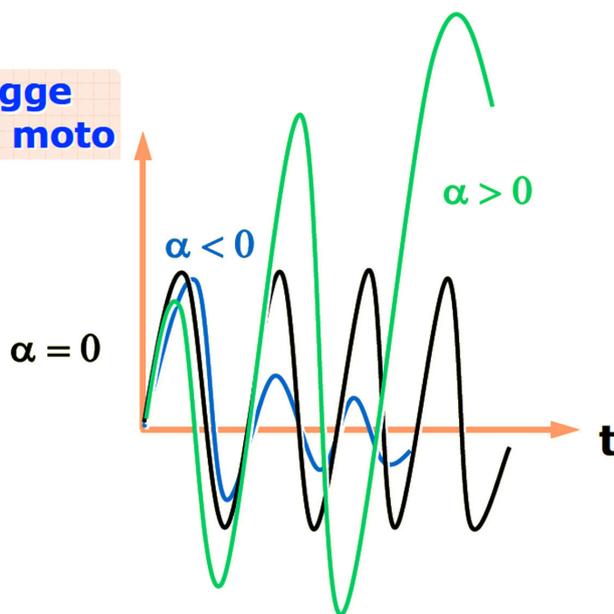


Per $\alpha > 0$, abbiamo un inviluppo, avendo un esponenziale crescente. E' una spirale che diverge.



Per $\alpha < 0$, abbiamo un inviluppo, che è una spirale che converge verso lo zero.

legge di moto



A lato le leggi di moto, per i valori che può assumere α .

$\alpha < 0$, moto oscillante tendente a zero.

$\alpha > 0$, moto oscillante tendente a infinito.

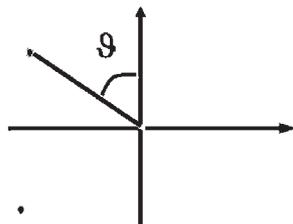
$\alpha = 0$, moto oscillante costante.

PARAMETRI CARATTERISTICI

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\zeta = -\alpha / \omega_n$$

$$\zeta = \text{sen } \vartheta$$



PARAMETRI CARATTERISTICI

Per caratterizzare la legge di moto, ovvero per mettere in luce quali sono le caratteristiche salienti del modo naturale, invece dei parametri α e ω , si usano altri due parametri, lo smorzamento e la pulsazione naturale.

La pulsazione naturale è ω_n ed è definita come a lato riportato. E' il modulo di λ .

Lo smorzamento è definito come $\xi = -\alpha / \omega_n$, esso ha un reale significato fisico nel caso in cui $\alpha < 0$.

Quando $\alpha > 0$, abbiamo una legge di moto tendente ad estinguersi, e tale parametro tiene conto della velocità con cui tale estinzione avviene.

Si noti dalla figura precedente, come lo smorzamento sia $\xi = \sin \theta$, con θ l'angolo definito come in figura.

Smorzamento è un parametro che varia tra -1 e +1. Quando vale +1 i due zeri sono coincidenti e sull'asse negativo delle ascisse, quando vale -1 i due zeri sono coincidenti e sull'asse positivo delle ascisse. Nel secondo quadrante assume un valore compreso tra 0 e -1, nel primo quadrante assume un valore compreso tra -1 e 0.

In generale per A semplice

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \rightarrow \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \rightarrow \mathbf{u}_m \\ \lambda_1, \lambda_1^* \rightarrow \mathbf{u}_{a1}, \mathbf{u}_{b1} \\ \vdots \\ \lambda_v, \lambda_v^* \rightarrow \mathbf{u}_{av}, \mathbf{u}_{bv} \end{array}$$

La risposta in evoluzione libera è combinazione lineare di modi naturali.

La risposta in evoluzione libera è combinazione lineare di modi naturali

⇒ **(m) modi aperiodici**

⇒ **(v) modi pseudo-periodici**

Ci sono m modi naturali associati agli autovalori reali, v modi naturali associati alle v coppie di autovalori complessi coniugati.

I modi aperiodici sono evoluzioni, con legge di moto esponenziale, lungo gli autovettori \mathbf{u} associati agli autovalori reali.

I modi pseudoperiodici sono evoluzioni, con legge di moto pseudo-periodiche, nel piano $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b$, associate a ciascuna coppia di autovalori complessi.

OSSERVAZIONE

In presenza di autovalori coincidenti si hanno modi naturali caratterizzati dalla stessa legge temporale, ma in diversi autospazi

Se si hanno autovalori coincidenti reali abbiamo modi naturali aperiodici che hanno la stessa legge temporale ma avvengono lungo autovettori distinti.

Se ci sono coppie di autovalori complessi coniugati coincidenti allora abbiamo leggi di moto coincidenti ma che avvengono in autospazi di dimensione 2 u_a e u_b diversi tra di loro.

Diremo dunque che i modi sono distinti perché sono evoluzioni che avvengono in particolari sottospazi dello spazio di stato.

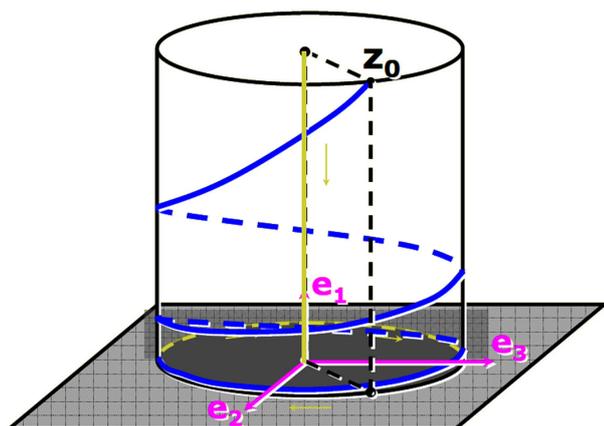
Di seguito un esempio.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

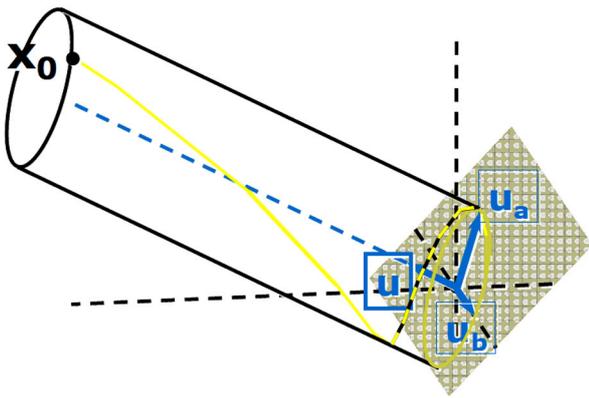
$$\lambda = -3 \quad \alpha \pm j\omega = \pm 3j$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nello spazio z



nello spazio x



I modi nel regime forzato ed in uscita

I modi nel regime forzato ed in uscita

Evoluzione forzata nello stato

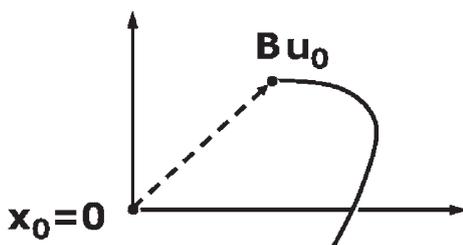
L'evoluzione forzata nello stato è integrale di convoluzione della matrice della risposta impulsiva nello stato elevato ad AtB con u .

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$u(t) = \delta(t) u_0$$

Si suppone di prendere un ingresso $u(t)$ di tipo impulsivo, in cui u_0 può essere un vettore, nel caso di più componenti, oppure uno scalare nel caso di un sistema ad un solo ingresso.

$$x_f(t) = e^{At} B u_0$$



Il caso generale a lato, con l'uscita. L'uscita ha tale valore perché, quando applichiamo questo ingresso, per la definizione di impulso, in uscita abbiamo la funzione integranda calcolata nell'istante in cui è centrato l'impulso. In questo caso in $\tau = 0$.

Quando applichiamo l'ingresso di tipo impulsivo e siamo nello stato 0, perché stiamo considerando la risposta forzata nello stato, il sistema è come se transitasse istantaneamente dallo stato iniziale nullo allo stato Bu_0 , dopodiché

avviene una evoluzione libera, cioè il sistema evolve in evoluzione libera a partire dallo stato Bu_0 .

Abbiamo un'espressione che è formalmente analoga alla risposta in evoluzione libera, cioè e^{At} moltiplicato per un vettore.

$$\text{se } \mathbf{u}_0 = [\mathbf{0} \dots \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \dots \mathbf{0}]'$$

↑
k-esimo elemento

Nel caso ci trovassimo nella condizione come a lato riportato, abbiamo una uscita $x_f(t)$ del tipo riportato sotto.

$$\mathbf{x}_f(t) = e^{At} \mathbf{B} \mathbf{u}_0 = e^{At} \mathbf{b}_k = \mathbf{h}_k(t)$$

↑
k-esima colonna di B

Il modo naturale j-mo è detto eccitabile se la sua legge temporale compare in $H(t)$

Diremo che il modo naturale j-mo è detto eccitabile se la sua legge temporale compare in $H(t)$, se compare in una qualche colonna di $H(T)$, questo equivale a dire che eccitabile con un ingresso di tipo impulsivo.

$$e^{At} \mathbf{B} = \sum e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_j' \mathbf{B}$$

↑
 $\mathbf{v}_j' \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$

Al lato la condizione affinché questo accada.

In modo naturale j-mo è detto osservabile se la sua legge temporale compare in $\Psi(t)$

Analogamente, diremo che il modo naturale j-mo è detto osservabile se la sua legge temporale compare in $\Psi(t)$.

$$\mathbf{C} e^{At} = \sum e^{\lambda_i t} \mathbf{C} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i'$$

↑
 $\mathbf{C} \mathbf{u}_j \neq \mathbf{0}$

Stiamo pensando all'evoluzione libera in uscita che è caratterizzata da $\mathbf{C} e^{At} \mathbf{x}_0$.

L'espressione della $\Psi(t)$ è $\mathbf{C} e^{At}$.

A lato la condizione necessaria e sufficiente

Il modo naturale j-mo è detto eccitabile ed osservabile se la sua legge temporale compare in $W(t)$

Il modo naturale j-mo è detto eccitabile e osservabile se la sua legge temporale compare in $W(t)$.

$$\mathbf{C} e^{At} \mathbf{B} = \sum e^{\lambda_i t} \mathbf{C} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i' \mathbf{B}$$

↑
 $\mathbf{v}_j' \mathbf{B} \neq \mathbf{0} \quad \& \quad \mathbf{C} \mathbf{u}_j \neq \mathbf{0}$

Ma $W(t) = \mathbf{C} e^{At} \mathbf{B}$, e le condizioni sono riportate di seguito.

Questo ci chiarisce una cosa, che di fatto dentro la matrice di transizione dello stato nell'evoluzione libera ci sono tutti i modi naturali.

Nella risposta forzata dello stato compaiono soltanto le leggi esponenziali associate ai modi naturali che abbiamo definito essere eccitabili. Quindi compaiono solo quelle leggi esponenziali per le quali risulta $W_j B$ diverso da zero.

Nella risposta in evoluzione libera in uscita compaiono soltanto le leggi esponenziali associati ai modi naturali che abbiamo definito osservabili, quelle cioè per le quali risulta $C u_j$ diverso da zero.

Nella risposta impulsiva in uscita, e quindi nella risposta forzata nello stato, a caratterizzarla abbiamo soltanto le leggi esponenziali che compaiono nella W che sono quelle che sono simultaneamente eccitabili e osservabili.

In questo senso abbiamo meno informazioni nella risposta impulsiva, nella matrice che caratterizza il comportamento forzato che abbiamo detto essere un modello del comportamento forzato. Però, in questo senso, è un modello parziale perché ha informazioni soltanto sui modi che sono simultaneamente eccitabili e osservabili.

ABBIAMO VISTO

1

La risposta in evoluzione libera è composta di modi naturali evoluzioni in particolari sottospazi

2

Il modello risposta impulsiva è parziale poiché contiene "informazioni" solo sui modi eccitabili ed osservabili

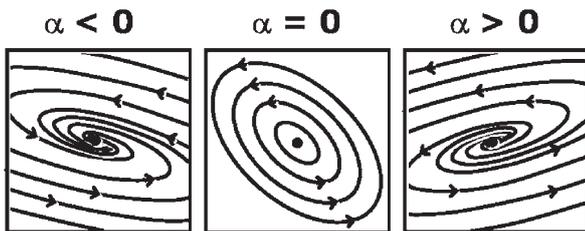


$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \uparrow & & & & & & & & & \\ \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_m & \mathbf{u}_{a1} & \mathbf{u}_{b1} & \dots & \mathbf{u}_{av} & \mathbf{u}_{bv} & & \\ \downarrow & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_l(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 =$$

= Σ modi aperiodici +
 Σ modi pseudoperiodici

$$\mathbf{x}(t) = m e^{\alpha t} [\text{sen}(\omega t + \varphi) \mathbf{u}_a + \text{cos}(\omega t + \varphi) \mathbf{u}_b]$$



Evoluzione libera nello stato n=3

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 = & e^{\lambda t} \mathbf{u} \mathbf{v}' \mathbf{x}_0 + \\ & e^{\alpha t} \mathbf{u}_a \text{cos } \omega t \mathbf{v}_a' \mathbf{x}_0 + \\ & e^{\alpha t} \mathbf{u}_a \text{sen } \omega t \mathbf{v}_b' \mathbf{x}_0 + \\ & e^{\alpha t} \mathbf{u}_b \text{cos } \omega t \mathbf{v}_b' \mathbf{x}_0 - \\ & e^{\alpha t} \mathbf{u}_b \text{sen } \omega t \mathbf{v}_a' \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

□

Prof. Salvatore Monaco
49'55"

- Introduzione
- La trasformata di Laplace: definizione e proprietà
- Il modello nel dominio complesso
- La struttura ed il calcolo delle soluzioni
- La funzione di trasferimento

Introduzione

La lezione è dedicata all'introduzione dell'uso della trasformata di Laplace dell'analisi dei sistemi a tempo continuo.

Stiamo studiando sistemi che operano su funzioni che sono definite nel tempo, sviluppando l'analisi del dominio del tempo. È possibile condurre lo studio anche nel dominio della variabile complessa e questo grazie all'uso di una operazione di trasformazione che prende funzioni del tempo e li trasforma nel dominio della variabile complessa. L'analisi dei sistemi che tratteremo sarà diversa da quella ottenuta dal punto di vista frequenziale.

LA TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

$t \in [0, \infty)$

$$\exists \alpha \text{ reale: } \operatorname{Re}(s) \geq \alpha$$

LA TRASFORMATA DI LAPLACE

La trasformata di Laplace è una funzione del tempo definita da zero a infinito.

La sua definizione è riportata al lato, s è un numero complesso.

Integrando fra zero di infinito la variabile di integrazione scompare e quello che rimane è una funzione di variabile complessa, indicata con $F(s)$.

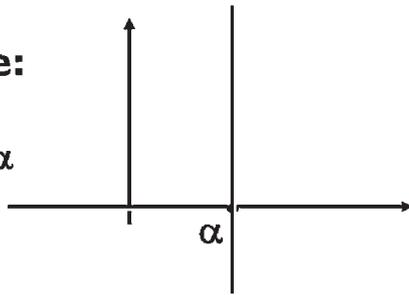
Quindi $f(t)$ è la funzione nel dominio del tempo, $F(s)$ è la funzione nel dominio della variabile complessa.

Esiste un α reale tale che per tutti gli s che hanno la parte reale maggiore di α , la funzione $f(t)$ è integrabile. Questa relazione definisce nel piano complesso un semipiano, in questo semipiano la trasformata di Laplace è ben definita.

F(s) è ben definita per una vasta classe di funzioni nel tempo

∃ α reale:

$$\text{Re}(s) \geq \alpha$$



F(s) è ben definita per una vasta classe di funzioni nel tempo, nel senso che esiste un α reale tale che per tutti gli s che hanno la parte reale maggiore di α, cioè per tutti gli s che si trovano a destra di α la F(s) è ben definita, cioè l'integrale è calcolabile. In effetti quello che conta è la parte reale. Se la f(t) è integrabile nell'intervallo da zero a infinito allora α può anche essere minore di zero. Se la f(t) non tende a zero nel tempo, α deve essere un numero positivo. Comunque è sempre definito, sono pochissime le funzioni che non possono essere trasformate secondo Laplace, per le quali cioè non esiste una convergenza nel dominio complesso.

PROPRIETÀ

→ linearità

$$\mathcal{L}(\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

→ teorema della derivazione

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s F(s) - f(0)$$

PROPRIETÀ della Trasformata di Laplace
Linearità, collegata alla linearità dell'operazione di integrazione.

Si dimostra che l'ascissa di convergenza della combinazione lineare è la più grande delle ascisse di convergenza di f_1 e f_2 .

Teorema della derivazione, riguarda la trasformata di Laplace della derivata di una funzione.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (f(t) e^{-st}) dt = 0 - f(0) = -f(0) \quad \text{A lato la dimostrazione.} \\ & = \int_0^{\infty} (f'(t) e^{-st} + f(t) (-s e^{-st})) dt \\ & = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt - s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ & = \mathcal{L}(f'(t)) - s F(s) \end{aligned}$$

Il modello nel dominio complesso

Il modello nel dominio complesso

Sulla base di queste due proprietà possiamo procedere al calcolo del modello nel dominio complesso.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

↓ trasformata

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

↓

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} B U(s)$$

Abbiamo un sistema, il cui modello implicito nel dominio del tempo è definito un sistema di equazioni differenziali alle derivate totali, lineare, stazionario. \dot{x} , x e u sono funzione del tempo, A e B sono matrici di coefficienti.

$\dot{x} = Ax + Bu$ è l'equazione d'ingresso/stato; partiamo dallo stato al tempo zero, $x(0) = x_0$. Questo si ottiene come da sotto descritto.

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = \mathcal{L}(Ax(t) + Bu(t))$$

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$\cancel{(sI - A)} \cancel{(sI - A)} X(s) = \overset{(sI - A)^{-1}}{\vee} (x_0 + BU(s))$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} B U(s)$$

Abbiamo, in sostanza, la $X(s)$ in funzione di x_0 e di $U(s)$, dove $U(s)$ è la trasformata di Laplace dell'ingresso.

$$(sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} B U(s)$$

L'espressione trovata deve essere confrontata con l'espressione in forma esplicita della $x(t)$, perché proprio l'espressione dell'evoluzione nel tempo della x ci dice come varia la x in funzione di x_0 e dell'ingresso u da zero in poi.

$$e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

dal confronto

$$\mathcal{L}(e^{At}) = (sI - A)^{-1} = \Phi(s)$$



$$\mathcal{L}(e^{At} B) = (sI - A)^{-1} B = H(s)$$



$$(sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} B U(s)$$

$$e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

dal confronto

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau\right) = (sI - A)^{-1} B U(s) = H(s)U(s)$$

**è una proprietà generale:
la trasformata
di una convoluzione è uguale
al prodotto delle trasformate**

L'integrale di convoluzione è uguale, nel dominio della variabile complessa, al prodotto delle trasformate delle due funzioni.

Questa è una grande semplificazione, ed è il teorema della convoluzione.

Come sottoprodotto dei calcoli che abbiamo fatto abbiamo ottenuto una serie di risultati parziali che ci consentono di effettuare delle operazioni di trasformazione.

Sappiamo anche trasformare

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

A lato la trasformata di Laplace di una funzione esponenziale.

e antitrasformare

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at} \delta_{-1}(t)$$

Nell'antitrasformata dobbiamo evidenziare che la funzione è definita da zero in poi.

A tale scopo si utilizza la funzione gradino che vale uno da zero in poi.

funzioni esponenziali

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

 **trasformata**

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1} x_0}_{\text{parte in evoluzione libera}} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1} B + D) U(s)}_{\text{parte che dipende dall'ingresso}} \\
 &= \underbrace{\Psi(s) x_0}_{\text{parte in evoluzione libera}} + \underbrace{W(s) U(s)}_{\text{parte in evoluzione forzata}}
 \end{aligned}$$

La trasformata della funzione di uscita. Al primo membro, la trasformata della funzione $y(t)$ è $Y(s)$.

Al secondo membro avremmo $CX(s) + DU(s)$. Mettendo al posto della $X(s)$ l'espressione calcolata in precedenza otteniamo quanto a lato riportato.

Nella espressione finale vengono rinominate delle parti.

$W(s)$ è la trasformata di Laplace della matrice della risposta impulsiva nel tempo. Ritroviamo nella espressione finale il teorema di convoluzione perché nella risposta nel dominio del tempo avevamo l'integrale di convoluzione tra la $w(t)$ e la $u(t)$.

$$X(s) = \Phi(s) x_0 + H(s)U(s)$$

In sostanza abbiamo quanto riportato a lato.

$$Y(s) = \Psi(s) x_0 + W(s)U(s)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad H(s) = \Phi(s) B$$

$$\Psi(s) = C \Phi(s) \quad W(s) = C \Phi(s) B + D$$

$W(s)$ = funzione di trasferimento

La trasformata di Laplace della risposta impulsiva si chiama funzione di trasferimento.

Nel caso di sistemi a più ingressi e a più uscite la $W(t)$ è una matrice, la $W(s)$ è una matrice, la matrice delle risposte impulsive e la matrice delle funzioni di trasferimento.

**È possibile calcolare
la risposta
nello stato ed in uscita
facendo i calcoli nel dominio
complesso**

È possibile calcolare la risposta dello stato ed in uscita facendo i calcoli nel dominio complesso.

Abbiamo un sistema definito nel tempo, le matrici A , B , C e D ; calcoliamo le matrici $(sI - A)^{-1}$, $H(s)$, $\Psi(s)$ e $W(s)$, calcoliamo l'espressione della risposta forzata e libera

nello stato e in uscita nel dominio della variabile complessa e poi dobbiamo tornare indietro, antitrasformando le espressioni trovate per calcolarle nel dominio nel tempo. Il dominio complesso rappresenta un dominio alternativo in cui si può andare a fare i calcoli per passare dal modello implicito al modello esplicito.

LA STRUTTURA ED IL CALCOLO DELLA SOLUZIONE

→ $\Phi(s)$

Struttura e calcolo di $\Phi(s)$, matrice di transizione dello stato nel dominio complesso.

→ il calcolo della soluzione

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (sI - A)^{-1} \\ &= \frac{\left((sI - A)^a \right)^T}{d(s)} \leftarrow \text{polinomio caratteristico} \\ &= \frac{E(s)}{m(s)} \leftarrow \text{polinomio minimo} \end{aligned}$$

fattore di $d(s)$ che ha per zeri tutti gli autovalori

$\Phi(s)$ è l'inverso di una matrice che ha s sulla diagonale principale, i coefficienti della matrice A cambiati di segno.

Il risultato finale ha al denominatore il cosiddetto polinomio minimo. Il risultato finale ha in $E(s)$ una matrice $n \times n$ i cui elementi sono polinomi in s di grado massimo $n - 1$; $m(s)$ è un polinomio di grado massimo n .

semplice esempio:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} I - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\left(\begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{pmatrix} \right)^T}{|sI - A|}$$

operazione di "aggiunta"

L'aggiunta è la matrice dei complementi algebrici, che sono i termini che si calcolano dalla matrice data equivalenti ai determinanti della matrice che si ottiene quando l'elemento di posto ij è cancellato insieme a tutti gli elementi che appartengono alla colonna e alla riga di cui quell'elemento è intersezione.

$$\frac{\begin{pmatrix} s-a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & s-a_{11} \end{pmatrix}^T}{|sI-A|} \longrightarrow d(s)$$

A lato le caratteristiche dei gradi dei polinomi.

Gli μ_i si chiamano molteplicità algebriche, gli m_i si chiamano molteplicità geometriche.

Il determinante $|sI - A|$, denominato $d(s)$, è un polinomio del tipo: $s^2 + a_1s + a_0$

I polinomi dell'aggiunta trasposta hanno un grado al più $n - 1$, in questo caso 1.

A conti fatti otteniamo $E(s) / m(s)$.

$$d(s) = (s-\lambda_1)^{\mu_1} \dots (s-\lambda_n)^{\mu_n}$$

$$\mu_1 + \dots + \mu_n = n$$



$$m(s) = (s-\lambda_1)^{m_1} \dots (s-\lambda_n)^{m_n}$$

$$\boxed{m_i \leq \mu_i}$$

$\Phi(s)$ è una matrice di funzioni razionali strettamente proprie

Quello che si ottiene, $E(s) / m(s)$, è l'espressione complessiva della $\Phi(s)$. Essa è una matrice di funzioni razionali strettamente proprie.

È cioè una matrice i cui elementi sono rapporti di polinomi in cui il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore.

$m(s)$ ha zeri semplici, λ

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^m \frac{R_i}{s-\lambda_i}$$

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^m R_i e^{\lambda_i t}$$

A semplice

Se $m(s)$ ha zeri semplici, allora possiamo scrivere le espressioni come a lato riportate, grazie a quanto riportato sotto.

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{\lambda_i t}) = \frac{1}{s-\lambda_i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R_i}{s-\lambda_i}\right) = R_i \cdot e^{\lambda_i t} \underbrace{\delta_{-1}(t)}$$

$$R_i \quad n \times n \quad \rho(R_i) = \mu_i$$

ciò equivale a dire che

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^m R_i e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i'$$

ed $m=n$ se $\mu_i = 1$

~~~~~

**Presenza di zeri complessi  
in  $m(s)$**

$n=3 \quad \lambda, \alpha + j\omega, \alpha - j\omega$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{R}{s-\lambda} + \frac{R_a + jR_b}{s-\alpha-j\omega} + \frac{R_a - jR_b}{s-\alpha+j\omega}$$

$$R_c = R_a + jR_b$$

$$= \frac{R}{s-\lambda} + \frac{2R_a(s-\alpha) - 2R_b\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$R = u v'$$

$$R_a = \frac{1}{2} (u_a v'_a + u_b v'_b)$$

$$R_b = \frac{1}{2} (u_b v'_a - u_a v'_b)$$

$$R x_0 = c u$$

$$\frac{2R_a(s-\alpha) - 2R_b\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} x_0 =$$

$$\frac{m((s-\alpha) \text{sen}\varphi + \omega \text{cos}\varphi) u_a}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} +$$

$$+ \frac{m((s-\alpha) \text{cos}\varphi - \omega \text{sen}\varphi) u_b}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

...

$$u(t) = \text{sen}(\omega t)$$

...

$$U(s) = \omega / (s^2 + \omega^2)$$

$$u(t) = \text{cos}(\omega t)$$

...

$$U(s) = s / (s^2 + \omega^2)$$

~~~~~

$$\mathcal{L} [e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$$



$$\begin{aligned} \mathcal{L} [e^{\alpha t} \text{cos}(\omega t) \delta_{-1}(t)] \\ = (s - \alpha) / ((s - \alpha)^2 + \omega^2) \end{aligned}$$

~~~~~

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}$$

$$c_a/m = \text{sen } \varphi \quad c_b/m = \text{cos } \varphi$$



$$\begin{aligned} x(t) = e^{At} x_0 = c e^{\lambda t} u + \\ m e^{\alpha t} [\text{sen}(\omega t + \varphi) u_a + \\ \text{cos}(\omega t + \varphi) u_b] \end{aligned}$$

## Calcolo delle soluzioni

$(A, B, C, D, x_0)$

$$X_1(s) = \Phi(s) x_0 = (sI - A)^{-1}$$

$$\Downarrow$$
$$X_1(t)$$

$$Y_1(s) = \Psi(s) x_0 = C \Phi(s)$$

$$\Downarrow$$
$$Y_1(t)$$

$$u_{[0, \infty)} \quad \Downarrow \quad U(s)$$

$$X_f(s) = H(s) U(s) = \Phi(s) B U(s)$$

$$\Downarrow$$
$$X_f(t)$$

$$Y_f(s) = W(s) U(s) = (C \Phi(s) B + D) U(s)$$

$$\Downarrow$$
$$Y_f(t)$$

# La funzione di trasferimento

$$W(s) = C \Phi(s) B + D$$

- È la trasformata di Laplace della risposta impulsiva
- È un modello del comportamento forzato
- È una matrice di funzioni razionali proprie (strettamente proprie se  $D=0$ )
- Il polinomio a denominatore comune ha come zeri gli autovalori di  $A$  associati ai modi eccitabili ed osservabili

# Ammette, al pari di $W(t)$ , un'interpretazione sperimentale ?

(La risposta sarà sì, nella prossima lezione).



$$\tau = -\frac{1}{\lambda}$$



$$\frac{R}{s - \lambda} \quad \rightarrow \quad \frac{R\tau}{1 + \tau s}$$

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \quad \zeta = -\frac{\alpha}{\omega_n}$$



$$\frac{2R_a(s - \alpha) - 2R_b\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$



$$\frac{2R_a}{\omega_n} \left( \frac{s}{\omega_n} + \zeta \right) - \frac{2R_b}{\omega_n} \sqrt{1 - \zeta^2}$$

---


$$1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

□

## Lezione n. 8 IL REGIME PERMANENTE E IL COMPORTAMENTO IN FREQUENZA

Prof. Salvatore Monaco  
49'07"

- Introduzione
- La risposta a regime permanente: definizione e condizioni di esistenza
- La risposta a regime permanente per ingressi periodici
- La risposta armonica
- Il comportamento in frequenza
- La risposta transitoria e parametri caratteristici

### Introduzione

La lezione di oggi è incentrata a dare una risposta alla domanda fatta nella scorsa lezione e cioè, al pari della  $W(t)$ , la funzione di trasferimento ammette una rappresentazione in termini sperimentali?

### La risposta in regime permanente

Il concetto di risposta in regime permanente viene fuori da alcune considerazioni. La prima è il domandarsi come si comporta un sistema dinamico in presenza di una sollecitazione persistente avente precise caratteristiche. Quello che succede è che molto spesso la risposta tende ad assumere andamenti dello stesso tipo dell'ingresso. Questo tipo di risposta sarà chiamata la risposta a regime permanente.

$y_r(t)$ , la funzione della risposta a regime permanente.

$\forall \varepsilon \quad \forall x_0 \quad \exists T_a(x_0) : t \geq T_a(x_0)$  Definiamo la funzione  $y_r(t)$  quella funzione verso la quale tende ad assestarsi la risposta indipendentemente dallo stato iniziale.

$|y_r(t) - y(t)| < \varepsilon$   
↑                      ↙  
Esiste?            Come calcolarla?

Diremo quindi che la funzione  $y_r(t)$  è la risposta a regime permanente se verso quella funzione del tempo tende ad assestarsi la risposta effettiva al crescere del tempo e questo assestamento della funzione non dipende dallo stato iniziale.

Per una definizione formale di questa funzione dobbiamo fare riferimento a quella di limite, nel senso di limite delle funzioni.

Comunque preso un  $\varepsilon$  e un qualsiasi stato iniziale  $x_0$  esiste un tempo di assestamento che dipende dallo stato iniziale tale che per tutti istanti di tempo maggiori o uguali nel tempo di assestamento risulta che lo scostamento tra la risposta a regime, cioè  $y_r(t)$ , e la risposta effettiva è minore di  $\varepsilon$ . Lo scostamento può essere uno scalare oppure una norma a seconda del tipo di funzioni. Sarà uno scalare

per funzioni scalari.

Questa definizione significa che la  $y(t)$  sta tendendo all'andamento di  $y_r(t)$ . Quindi  $y_r(t)$  è l'andamento limite verso il quale la risposta tende ad assestarsi al crescere del tempo.

A questo punto si pongono due questioni, la prima è l'esistenza della funzione a regime permanente e, se si, come calcolarla.

- Perché esista e sia indipendente da  $x_0$  è necessario che l'evoluzione libera in uscita tenda a zero per ogni  $x_0$ .
- Inoltre l'evoluzione nello stato dovrà essere limitata. Ciò accade sicuramente se la seguente condizione è soddisfatta

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0$$

Affinché questa funzione esista sia indipendente da  $x_0$  è necessario che l'evoluzione libera in uscita tenda a zero per ogni  $x_0$ .

Inoltre l'evoluzione nello stato dovrà essere limitata. Questa è una condizione fisica che dobbiamo richiedere, perché se l'evoluzione nello stato non è limitata, la funzione andrà naturalmente verso valori

infiniti e quindi porterà a delle saturazioni e, in uscita, non potremo più avere la possibilità di osservare il comportamento.

Ciò accade sicuramente se la condizione  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  è soddisfatta.

In questo caso accadono due cose, l'evoluzione libera nello stato e nell'uscita tende a zero, inoltre l'evoluzione nello stato è sicuramente limitata.

Quindi ci poniamo nella condizione per cui la parte reale degli autovalori sia strettamente negativa.

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \left[ C e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau \right]$$

ma

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} C e^{A(t-t_0)} x_0 = 0$$



$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

Definiamo risposta a regime permanente come il limite esplicitato a lato. Ovvero il limite per  $t_0$  che tende a  $-\infty$  della risposta effettiva, la risposta dalla quale immagino di partire dall'istante  $t_0$  allo stato iniziale  $x_0$ .

L'espressione della risposta contiene la parte in evoluzione libera a sinistra e la parte in evoluzione forzata a destra.

Usiamo una definizione di questo tipo in quanto sfruttiamo la stazionarietà del sistema.

Dovremmo andare a vedere che cosa accade quando il tempo fa all'infinito. Ma facendo il limite che tende all'infinito non è detto che questo limite sia definito, il limite è calcolabile se solo se è pari ad un valore. In realtà non vogliamo

calcolare quella funzione che tende a assestarsi verso la risposta. Per fare questo ci ricordiamo che il sistema è stazionario e immaginiamo di iniziare l'esperimento sempre prima, quindi di portare il tempo di inizio di applicazione dell'ingresso a  $-\infty$  e di restare ad osservare al tempo  $t$ . In questo modo otterremo una funzione del tempo avendo però atteso un tempo sufficientemente lungo, al limite infinito, che è quel tempo necessario affinché l'assestamento della risposta su questo andamento che si vuole calcolare sia raggiunto e che quindi la risposta coincida effettivamente con l'andamento.

La parte in evoluzione libera tende a zero. Questo perché lo sviluppo della parte dell'evoluzione libera è una sommatoria di termini che contengono un esponenziale con gli autovalori a parte reale negativa e questo rende tutti i termini tendenti a zero. La  $Ce^{At}$  tende a zero, indipendentemente da  $x_0$ . La parte in evoluzione libera tende a zero ed al tempo  $t$  si è estinta.

Quindi la funzione  $y_r(t)$  è definita come il limite che tende a  $-\infty$  della parte in evoluzione forzata.

$$t - \tau = \xi$$



$$y_r(t) = \int_0^{\infty} W(\xi) u(t - \xi) d\xi$$

**Esiste per opportune funzioni di ingresso  $u_{[0, \infty)}$**

La differenza con lo sviluppo è che il limite superiore dell'integrale è  $+\infty$ , questo è vero nel caso in cui le funzioni  $W$  e  $u$ , come supponiamo siano, sono delle funzioni continue, o meglio assolutamente continue. È senz'altro vero se la funzione  $u$  è una funzione regolare.

Per calcolarla effettuiamo una sostituzione, come riportata a lato e, sotto, lo sviluppo.

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$t - \tau = \xi \quad \tau = t - \xi$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0-t}^0 W(\xi) u(t-\xi) d\xi$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_0^{t-t_0} W(\xi) u(t-\xi) d\xi$$

L'espressione formale della funzione  $y_r(t)$  è dunque:

La funzione esiste per opportune funzioni di ingresso  $u_{[0, \infty)}$ .

$$y_r(t) = \int_0^{\infty} W(\xi) u(t - \xi) d\xi$$

Vediamo ora quali sono le funzioni per cui essa esiste e come possiamo calcolarle.

il caso scalare  $p = q = 1$

$$u(t) = e^{st}$$

$$y_r(t) = \int_0^{\infty} W(\xi) e^{s(t-\xi)} d\xi =$$

$$= e^{st} \int_0^{\infty} W(\xi) e^{-s\xi} d\xi = e^{st} W(s)$$

è dello stesso tipo  
dell'ingresso

Per fare questo ci poniamo nel caso scalare in cui abbiamo un ingresso ed una uscita.

Viceversa questa considerazione varrebbe per ogni elemento della matrice della funzione di trasferimento.

Si considera un ingresso  $u(t) = e^{st}$ , con  $s$  un numero complesso. Facendo le opportune sostituzioni e calcoli si ottiene come a lato.

Nell'integrale abbiamo la trasformata di Laplace calcolata in  $s$  (il numero complesso che definisce l'ingresso dato).  $W(s)$  è la funzione di trasferimento calcolata nel punto  $s$ , che caratterizza l'ingresso.

Abbiamo dunque una risposta a regime che è dello stesso tipo dell'ingresso.

Poiché  $s$  è un numero complesso l'interpretazione fisica non ha ancora un significato fisico pregnante, ma lo avrà.

## LA RISPOSTA A INGRESSI PERIODICI

### LA RISPOSTA A INGRESSI PERIODICI

$$u(t) = \text{sen } \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

linearità

$$y_r(t) = \frac{e^{j\omega t} W(j\omega) - e^{-j\omega t} W(-j\omega)}{2j}$$

Andando a vedere com'è fatta la risposta a ingressi periodici abbiamo:

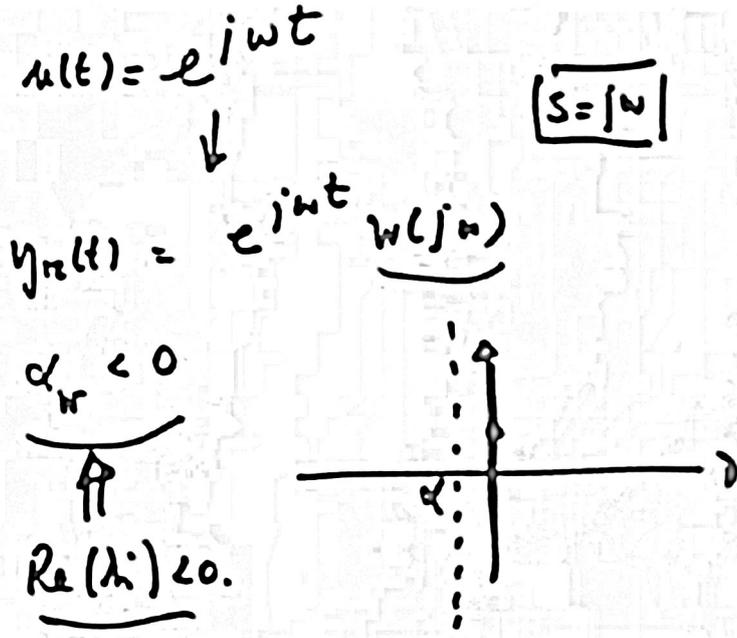
$$\text{sen } \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$y_r(t) = \frac{y_{z_1}(t) - y_{z_2}(t)}{2j}$$

$$= \frac{e^{j\omega t} W(j\omega) - e^{-j\omega t} W(-j\omega)}{2j}$$

Dobbiamo ora tener conto di alcune proprietà che ha la funzione  $W(j\omega)$ .

Quando l'ingresso  $u(t)$  è  $e^{j\omega t}$ , in uscita a regime permanente,  $y_r$ , abbiamo  $e^{j\omega t}W(j\omega)$ .



Affinché  $W(j\omega)$  sia definita, deve essere definita la trasformata di Laplace nel punto  $j\omega$ .

L'aver posto  $s = j\omega$  significa essersi messi sull'asse immaginario, in ordinata, quindi siamo in un punto di questo asse. Affinché  $W(j\omega)$  sia definita deve appartenere alla regione di convergenza, cioè deve risultare l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace della funzione  $W$  a sinistra dell'asse immaginario,  $\alpha_w < 0$ .

Questo accade sicuramente in quanto gli autovalori hanno tutti parte reale negativa,  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ . Questo si riflette nel fatto che la  $W(t)$  è una combinazione lineare di leggi di  $e^{\lambda_i t}$ .

Quindi sono funzioni naturalmente sommabili, tenderà a zero con andamenti esponenziali, perché i  $\lambda_i$  hanno parte reale negativa e quindi si può dimostrare che l'ascissa di convergenza è senz'altro negativa.

La convergenza  $\alpha_w$  coincide con il valore massimo della parte reale dei  $\lambda_i$ , poiché i valori sono tutti negativi il valore massimo è quello più vicino a zero.

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{j\omega t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} (\underbrace{\cos \omega t}_{\text{Re}} - j \underbrace{\sin \omega t}_{\text{Im}}) w(t) dt$$

$\text{Re}(W(j\omega))$  è pari  
 $\text{Im}(W(j\omega))$  è dispari

Dato l'integrale che identifica la funzione  $W(j\omega)$ , se al posto dell'esponenziale mettiamo il coseno ed il seno in base alla funzione di Eulero.

Poiché la funzione coseno è una funzione pari e la funzione seno è una funzione dispari, la parte reale della funzione  $W(j\omega)$  è una funzione pari e la parte immaginaria è una funzione dispari.

Questo comporta che il modulo della fase sia una funzione pari e la fase una funzione dispari.

In pratica, il modulo non cambia quando al posto di  $\omega$  metto meno  $-\omega$ , la fase diventa l'opposto quando al posto di  $\omega$  metto meno  $-\omega$ .

$$y_r(t) = \frac{e^{j\omega t} W(j\omega) - e^{-j\omega t} W(-j\omega)}{2j}$$

$M(\omega) = |W(j\omega)|$        $\phi(\omega) = \angle W(j\omega)$       A lato M per rappresentare il modulo e  $\Phi$  per rappresentare la fase.

$$M(\omega) = M(-\omega) \quad \phi(\omega) = -\phi(-\omega)$$

$$y_r(t) = M(\omega) \text{ sen } (\omega t + \phi(\omega))$$

Possiamo rappresentare  $W(j\omega)$  nella sua espressione esponenziale, ricavando  $W(-j\omega)$  nella sua espressione esponenziale.

Applicando altri calcoli, si ottiene la  $y_r(t)$  come sopra, ovvero  $y_r(t) = M(\omega) \text{ sen } (\omega t + \Phi(\omega))$ .

Questa ( $y_r(t) = M(\omega) \text{ sen } (\omega t + \Phi(\omega))$ ) è una funzione importante perché quando ingresso c'è  $u(t) = \text{sen}(\omega t)$ , in uscita ancora la funzione seno, modificata in modulo ( $M(\omega)$ ) e fase ( $\Phi(\omega)$ ) di una quantità che sono proprio il modulo della  $W$ , in  $s = j\omega$ , e la fase della  $W$ , in  $s = j\omega$ .

Dunque  $y_r(t) = M(\omega) \text{ sen } (\omega t + \Phi(\omega))$  è la risposta in regime permanente.

$$W(j\omega) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

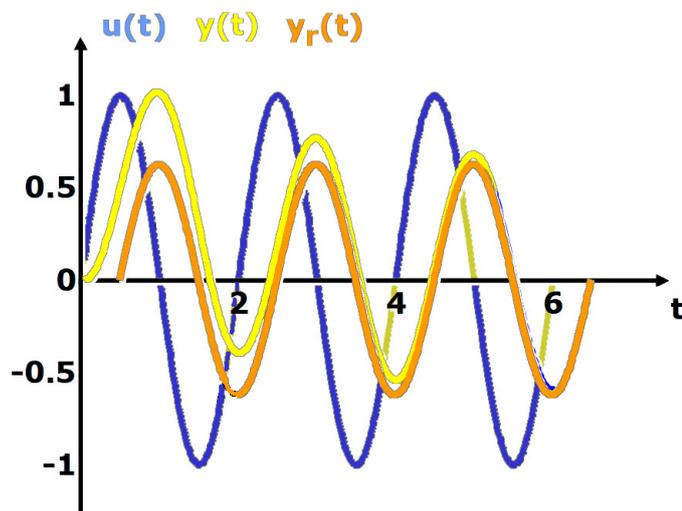
$$W(-j\omega) = M(\omega) e^{-j\phi(\omega)}$$

$$y_r(t) = M(\omega) \text{ sen } (\omega t + \phi(\omega))$$


---


$$\uparrow$$

$$u(t) = \text{sen } \omega t$$



Abbiamo un ingresso che è una funzione sinusoidale. Effettuando una simulazione otteniamo una uscita che, dopo i primi istanti, ha sempre un andamento sinusoidale, ed ha la stessa pulsazione, perché del tipo  $\sin(\omega t)$ , modificata in modulo e in ampiezza, è ritardata in fase, ovvero sfasata di una certa quantità, che dipende da  $\omega$ .

La funzione di uscita tende ad assestarsi intorno alla funzione  $y_r(t)$  che è la risposta a regime.

La modifica in ampiezza e la modifica in fase sono pari al modulo e alla fase della funzione di trasferimento calcolata per  $s = j\omega$  dove  $\omega$  è la pulsazione della funzione d'ingresso.

Quindi un segnale periodico dato in ingresso di un sistema lineare, a regime, dopo un po' di tempo tende ad assumere un andamento che è coincidente con una funzione che è dello stesso tipo, con lo stesso periodo del tipo  $\sin(\omega t)$ , si è in ingresso c'era  $\sin(\omega t)$ . Essa è modificata in ampiezza e fase di una quantità che dipende dal modulo dalla fase della funzione di trasferimento calcolata in  $s = j\omega$ .

Questo accade dopo un certo periodo di tempo, che dipende dal sistema; dipende dalla rapidità con la quale la risposta tende ad avvicinarsi alla risposta in regime permanente.

In realtà è dimostrabile che il tempo di assestamento è legato alla più grande delle parte reale degli autovalori. Parlando in termini di costanti di tempo, dopo 3, 4 volte la più grande delle costanti di tempo, di fatto, quella che si osserva è la risposta a regime permanente.

# La risposta armonica

$W(j\omega)$   
risposta armonica

nel transitare attraverso  
un sistema dinamico lineare  
stazionario un segnale periodico  
puro di pulsazione  $\omega$   
viene modificato

in modulo

e fase

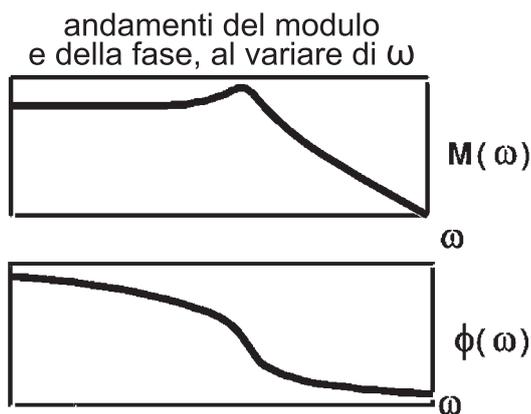
$$M(\omega) = |W(j\omega)| \quad \phi(\omega) = \angle W(j\omega)$$

Si chiama risposta armonica la funzione  $W(s)$  calcolata in  $s = j\omega$ .

Non è una risposta fisica ma è la funzione di trasferimento calcolata sull'asse immaginario. La funzione è ben definita quando gli autovalori hanno parte reale negativa perché l'ascissa di convergenza è negativa.

La  $W(j\omega)$  ha un significato fisico, perché il suo modulo e la sua fase,  $\omega$  per  $\omega$ , informano su come viene modificato un segnale periodico puro che transita attraverso un sistema dinamico e se ne guarda la risposta a regime permanente.

Nel transitare attraverso un sistema dinamico lineare stazionario, un segnale periodico puro, di pulsazione  $\omega$ , viene modificato in modulo e in fase, nelle quantità come mostrato in figura.



è questo il significato fisico della  $W(s)$  quando esiste  $y_r(t)$

Nel tracciare dei diagrammi al variare di  $\omega$  del modulo della risposta armonica e della fase della risposta armonica, tali diagrammi danno una informazione di come, al variare di  $\omega$ , viene modificato un segnale periodico puro che transita attraverso il sistema.

È questo il significato fisico della  $W(s)$ , per  $s = j\omega$ , quando esiste la risposta a regime permanente, con il sistema che ha autovalori a parte reale negativa.

Quando il sistema ha autovalori a parte reale negativa il significato fisico della  $W(s)$  è questo: la  $W(s)$ , per  $s = j\omega$ , definisce una funzione detta risposta armonica che fornisce la modifica in modulo e fase che subisce un segnale periodico quando transita attraverso il sistema.

# Il comportamento in frequenza

## IL COMPORTAMENTO IN FREQUENZA

*Interpretazione ulteriore del concetto*

Quando esiste  $y_r(t)$   
i grafici di  $M(\omega)$  e  $\phi(\omega)$   
rendono conto  
del comportamento dinamico  
(in  $t$ ) del sistema

Quando esiste  $y_r(t)$  i grafici di  $M(\omega)$  e  $\Phi(\omega)$  rendono conto del comportamento dinamico (in  $t$ ) del sistema.

$$(M(\omega), \Phi(\omega)) \rightarrow W(j\omega) \rightarrow W(s) \rightarrow W(t)$$

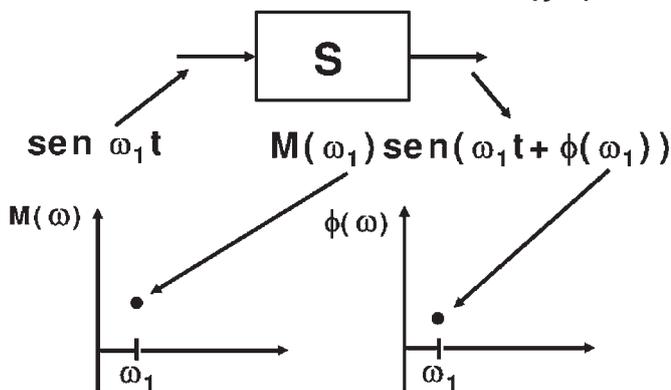
$$(M(\omega), \phi(\omega)) \rightleftharpoons W(j\omega) \rightleftharpoons W(s) \rightleftharpoons W(t)$$

sono un modello  
della risposta forzata

Quindi, sull'asse delle  $\omega$ , i grafici di  $M(\omega)$  e  $\Phi(\omega)$  hanno in sé le informazioni relative al comportamento nel tempo. Questo perché, avendo  $M(\omega)$  e  $\Phi(\omega)$  in funzione di  $\omega$ , equivale ad

avere  $W(j\omega)$  in funzione di  $\omega$ , il che equivale ad avere la  $W(s)$  perché basta sostituire  $j\omega$  con  $s$ , e questo equivale ad avere  $W(t)$  perché basta farne l'antitrasformata. Quindi nell'andamento complessivo di modulo e fase della risposta armonica ci sono le informazioni sul comportamento dinamico, ovviamente forzato, del sistema e quindi sul funzionamento del sistema nel tempo. Quindi modulo e fase sono anche un modello della risposta forzata.

### IDENTIFICAZIONE della $W(j\omega)$



### IDENTIFICAZIONE della $W(j\omega)$

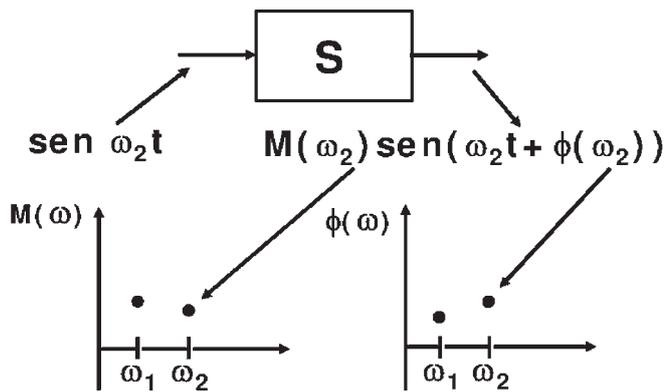
La procedura di identificazione della  $W(j\omega)$ , riportata a lato, diventa una procedura di identificazione della  $W(t)$ . Dato un sistema  $S$  identifichiamo il modulo e la fase attraverso una serie di esperimenti tramite l'applicazione di un ingresso,  $\sin(\omega_1 t)$ , ed andando a osservare, dopo un tempo sufficientemente

lungo, la risposta a regime permanente, possiamo ricavare subito l'informazione di  $M(\omega_1)$  e  $\phi(\omega_1)$  mettendoci alla frequenza  $\omega_1$  e riportando i valori di modulo fase in corrispondenza di tale frequenza.

Facciamo questo per un ulteriore ingresso,  $\sin(\omega_2 t)$ , con la relativa risposta a regime permanente e idem per un ulteriore ingresso,  $\sin(\omega_3 t)$ .

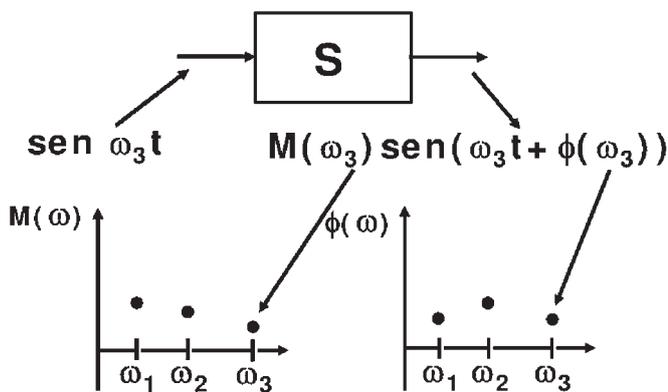
Facciamo questo per un numero finito di frequenze, poi interpoliamo questi dati con delle curve che rappresenteranno modulo e fase di una funzione che nel do-

### IDENTIFICAZIONE della $W(j\omega)$

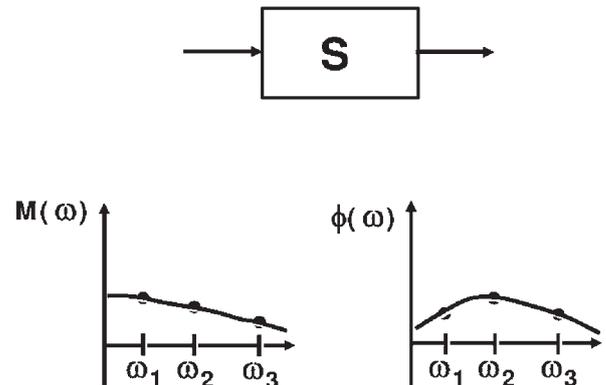


minio della variabile complessa è rappresentata dal rapporto di polinomi. Quello che otteniamo sono il modulo e la fase della risposta armonica, da queste la  $W(s)$  e di conseguenza la  $W(t)$ .

### IDENTIFICAZIONE della $W(j\omega)$



### IDENTIFICAZIONE della $W(j\omega)$



Quello che si è fatto è quello di fare più misure della risposta armonica in regime permanente rispetto ad ingressi periodici calcolando valori della risposta armonica, questo porta il calcolo della funzione di trasferimento e la risposta impulsiva del sistema.

**I grafici di  $M(\omega)$  e  $\phi(\omega)$ , che rappresentano il comportamento in frequenza a regime permanente, hanno tutte le informazioni sul comportamento dinamico forzato**

**Puntualmente, in ogni  $\omega$ , l'informazione sul comportamento a regime; globalmente, dalla forma complessiva, l'informazione sul comportamento dinamico anche nel tempo**

**Si noti che**

$$\omega \rightarrow \infty \quad W(j\omega) \rightarrow 0$$

**al più la  $W(j\omega)$  tende ad un valore costante se  $D$  non è nullo**

$$W(j\omega) \rightarrow \text{cost} \neq 0$$

**se  $D \neq 0$**

$D=0 \Rightarrow$  Il sistema è puramente dinamico, non c'è un legame diretto ingresso- uscita; grado del numeratore < grado del denominatore

Notare che  $j\omega$  è un rapporto di polinomi.

Se il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore (questo accade quando  $D = 0$ ), quando il legame diretto ingresso-uscita non c'è, al crescere di  $\omega$  il modulo va a zero.

## LA RISPOSTA TRANSITORIA

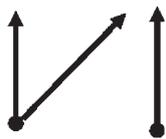
quando esiste  $y_r(t)$

$$y_t(t) = y(t) - y_r(t)$$

una diversa scomposizione della risposta

$$y(t) = y_t(t) + y_r(t)$$

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$



$$y(t) = y_t(t) + y_r(t)$$

La risposta transitoria è un concetto conseguente al concetto di regime permanente.

Quando esiste la risposta a regime permanente, la risposta complessiva si compone di due parti, transitorio e permanente,  $y_t(t)$  e  $y_r(t)$ , quest'ultima la risposta a regime che permane.

Questo mi consente di definire la risposta al transitorio come una differenza.

~~~~~

A lato una diversa scomposizione, importantissima.

La risposta nel tempo, $y(t)$, è data da due parti, la risposta in evoluzione libera più la risposta in evoluzione forzata, $y_l(t)$ e $y_f(t)$. Libera quando lo stato iniziale è diverso da zero e l'ingresso è nullo, forzata quando lo stato iniziale è

nullo e l'ingresso diverso da zero.

Abbiamo visto ora che quando esiste il regime permanente la risposta può essere scritta in una ulteriore forma, somma di due parti, parte del transitorio e parte della risposta a regime.

Ci rendiamo conto che la parte della risposta a regime è una parte della risposta forzata, mentre nel transitorio è inclusa la risposta in evoluzione libera e quella parte della risposta forzata che non è inclusa nel transitorio.

Su questo tipo di scomposizione si fondano le ipotesi di progetto dei sistemi dinamici.

Se $y_t(t) = 0$ abbiamo un sistema istantaneo

$$y(t) = K u(t) \rightarrow W(s) = K \rightarrow W(i\omega) = K$$

$$M(\omega) = K \quad \phi(\omega) = 0$$

Infatti

$$\text{sen } \omega t \rightarrow K \text{ sen } \omega t$$

Se $y_t(t) = 0$, abbiamo un sistema istantaneo, come dimostrato.

In $y(t) = K u(t)$, il sistema è istantaneo (che non è oggetto di studio in questo corso), la y è legata alla u da una relazione 1 a 1. $W(s)$ è la sua funzione di trasferimento ed è costante, lo è anche il modulo, mentre la fase è zero. Quando entra $\text{sen}(\omega t)$ la risposta, che è anche la risposta a regime, è $K \text{sen}(\omega t)$.

Un SISTEMA ISTANTANEO è caratterizzato da modulo pari a K, costante, e da fase nulla.

Un SISTEMA DINAMICO è caratterizzato da un certo modulo e da una certa fase.

Un SISTEMA ISTANTANEO

è caratterizzato in frequenza da

$$|W(j\omega)| = K$$

$$\angle W(j\omega) = 0$$

Un SISTEMA DINAMICO

è caratterizzato in frequenza da

$$|W(j\omega)| = M(\omega)$$

$$\angle W(j\omega) = \phi(\omega)$$

→...intuitivamente...

→ un sistema dinamico è caratterizzato da guadagno variabile in frequenza

→ un andamento "quasi" costante fino a valori elevati di ω fa pensare ad un sistema rapido nella risposta

Intuitivamente possiamo dire che un sistema dinamico è caratterizzato da un guadagno variabile in frequenza, il guadagno è rappresentato dal modulo della risposta armonica.

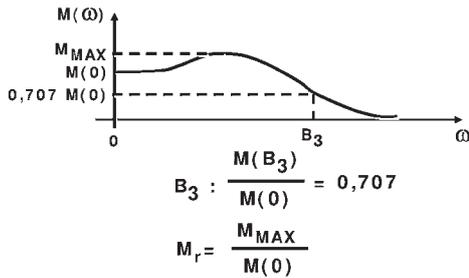
Possiamo anche dire che un andamento "quasi" costante fino a valori elevati di ω fa pensare ad un sistema rapido nella risposta. Questo perché un sistema che ha modulo costante pari a K nella risposta armonica, è un sistema istantaneo, quindi è molto rapido nella risposta.

UN ESEMPIO



quale è più veloce?
quello sotto

PARAMETRI CARATTERISTICI



B_3

è collegata alla rapidità di risposta

M_r

tiene conto di una particolare reattività a sollecitazioni in un certo intervallo di frequenze

PARAMETRI CARATTERISTICI, definiti sul modulo della risposta armonica.

Abbiamo la rappresentazione di un sistema dinamico, nel quale per $\omega = 0$, avremo un certo valore del modulo. Il modulo può aumentare in un certo intervallo di valori di ω , poi tendere a zero come in tutti i sistemi dinamici e fisici.

L'aumento nell'intervallo rende conto del fatto che un segnale periodico che passa viene in qualche modo aumentato rispetto al valore iniziale, rispetto ad un segnale che ha una frequenza minore.

Su questo diagramma possiamo introdurre due parametri caratteristici, uno è il cosiddetto parametro B_3 , la banda passante a 3 dB. Questo parametro rappresenta la prima frequenza in corrispondenza della quale il modulo viene attenuato di un fattore

0,707 rispetto al valore del modulo in zero.

Questo vuol dire che fino a B_3 tutti i segnali periodici vengono in qualche modo attenuati al più di un fattore a 0,707, rispetto all'attivazione del segnale in frequenza zero. Questa frequenza B_3 tiene conto di tutti i segnali periodici che, quando transitano attraverso il sistema, non vengono attenuati troppo, ma passano abbastanza bene. Mettendoci ad una frequenza più alta, maggiore di B_3 , l'attenuazione è molto elevata, perché il modulo è molto piccolo. Quindi alimentando il sistema ad una frequenza maggiore di B_3 , in uscita avremo un segnale molto attenuato, che, al limite, non riesce più a passare. È come se il sistema bloccasse il segnale in uscita; in uscita a regime non si osserva nulla.

Quindi B_3 è la banda passante a 3 dB, ed è collegata alla rapidità di risposta.

Il secondo parametro caratteristico è il modulo alla risonanza, M_r , che il rapporto fra il modulo massimo e il modulo a frequenza zero.

Notare che il fatto che il modulo vada a zero al crescere di ω , della frequenza, vuol dire che non c'è legame diretto tra ingresso e uscita, questa è una caratteristica di tutti i sistemi fisici.

□

Prof. Salvatore Monaco
41'25"

- Introduzione
- Calcolo della risposta in evoluzione libera
- Calcolo della risposta ad ingressi canonici
 - La risposta a regime permanente ad ingressi polinomiali
 - La risposta indiciale
 - Tempo di salita e sovraelongazione
- Legami con il comportamento in frequenza

Introduzione

La lezione di oggi è dedicata a continuare l'analisi dei sistemi lineari stazionari a tempo continuo nel dominio della variabile di Laplace.

Il calcolo della risposta

$$\mathbf{x}_l(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}_l(s)]$$

La risposta in evoluzione libera nel tempo è calcolabile come l'antitrasformata della risposta in evoluzione libera nel dominio della variabile di Laplace.

$$\mathbf{X}_l(s) = \Phi(s) \mathbf{x}_0$$

Nel dominio della variabile di Laplace, la risposta in evoluzione libera è $X_l(s) = \Phi(s)x_0$.

$\Phi(s)$ è la matrice di transizione in s ed è uguale a $(sI-A)^{-1}$.

PRESENZA DI ZERI COMPLESSI IN $m(s)$

$$n=3 \quad \lambda, \alpha + j\omega, \alpha - j\omega$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\mathbf{R}}{s-\lambda} + \frac{\mathbf{R}_a + j\mathbf{R}_b}{s-\alpha-j\omega} + \frac{\mathbf{R}_a - j\mathbf{R}_b}{s-\alpha+j\omega}$$

$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_a + j\mathbf{R}_b$
 \mathbf{R}_c è il residuo complesso associato al primo autovalore

$\mathbf{R}_a + j\mathbf{R}_b$
 matrice residua 3x3 di numeri complessi associata all'autovalore $\alpha + j\omega$

$\mathbf{R}_a - j\mathbf{R}_b$, la coniugata di $\mathbf{R}_a + j\mathbf{R}_b$

PRESENZA DI ZERI COMPLESSI IN $m(s)$

Con riferimento alla situazione che stiamo studiando, semplificata per non appesantire la trattazione con indici e con pedici, abbiamo la matrice A semplice, con $n = 3$ e quindi supponiamo di avere un'autovalore reale e una coppia di autovalori complessi coniugati, $(sI-A)^{-1}$ può essere scritta come riportato a lato.

$$R x_0 = c u$$

Moltiplicando a destra per x_0 , uno stato iniziale, otteniamo $Rx_0 = cu$

$$\frac{2R_a(s - \alpha) - 2R_b \omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} x_0 =$$

$$\frac{m((s - \alpha) \operatorname{sen}\varphi + \omega \operatorname{cos}\varphi) u_a}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} +$$

$$+ \frac{m((s - \alpha) \operatorname{cos}\varphi - \omega \operatorname{sen}\varphi) u_b}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

L'espressione finale ottenuta deve essere antitrasformata per restituirci l'espressione che abbiamo calcolato nel dominio del tempo.

$$x_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_f(s)]$$

La risposta forzata nel tempo $x_f(t)$

La risposta forzata è l'antitrasformata della risposta forzata nel dominio della variabile di Laplace.

$$X_f(s) = H(s) U(s)$$

La risposta forzata nel dominio della variabile di Laplace è $H(s) U(s)$, ovvero la trasformata di Laplace della matrice delle risposte impulsive nello stato moltiplicata

per la trasformata dell'ingresso.

Questa è una semplificazione fondamentale quando si studiano i sistemi.

L'integrale di convoluzione diventa un prodotto di matrice per vettore.

Occorre dunque calcolare la trasformata dell'ingresso, cioè, data una funzione del tempo, dovremo calcolare la trasformata dell'ingresso.

La matrice $H(s)$ è $(sI - A)^{-1}B$.

$$U(s) = ?$$

→ tabelle

→ come composizione di funzioni semplici

Poi dobbiamo calcolare le trasformate dell'ingresso, $U(s)$.

Per calcolare le trasformate dell'ingresso si può ricorrere a delle tabelle, molto spesso si può fare riferimento al fatto che l'operazione di trasformazione è una operazione lineare e quindi se, come spesso accade, partiamo da funzioni nel tempo che sono combinazioni lineari di funzioni di cui conosco la trasformata,

$$u(t) = \sum_k f_k(t) \quad U(s) = \sum_k F_k(s)$$

allora la trasformata di Laplace della funzione iniziale, dell'ingresso $u(t)$, è uguale alla stessa combinazione lineare delle trasformate delle singole funzioni. Nell'esempio la combinazione lineare è una sommatoria.

~~~~~

## Trasformate di funzioni semplici

$$u(t) = \delta(t) \quad \implies \quad U(s) = 1$$

$$u(t) = \delta_{-1}(t) \quad \implies \quad U(s) = 1/s$$

$$u(t) = \text{sen}(\omega t) \delta_{-1}(t) \\ \rightarrow U(s) = \omega / (s^2 + \omega^2)$$

$$u(t) = \text{cos}(\omega t) \delta_{-1}(t) \\ \rightarrow U(s) = s / (s^2 + \omega^2)$$

Le trasformate di funzioni semplici  
*considerazioni*

La trasformata dell'impulso  $\delta(t)$  è uguale a 1.

La trasformata della funzione gradino unitario  $\delta_{-1}(t)$  è uguale a  $1/s$  [calcolo vd. 06'31"].

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \dots = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(\text{sen} \omega t) = \left( \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right)$$

$$\frac{\mathcal{L}(e^{j\omega t}) - \mathcal{L}(e^{-j\omega t})}{2j}$$

due proprietà importanti  
utili per il calcolo di molte altre funzioni

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$$

da cui possiamo dedurre

$$u(t) = e^{\alpha t} \delta_{-1}(t) \rightarrow U(s) = 1/(s - \alpha)$$

infatti:

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-st} dt$$

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-\alpha)t} dt$$

||  
 $F(s - \alpha)$

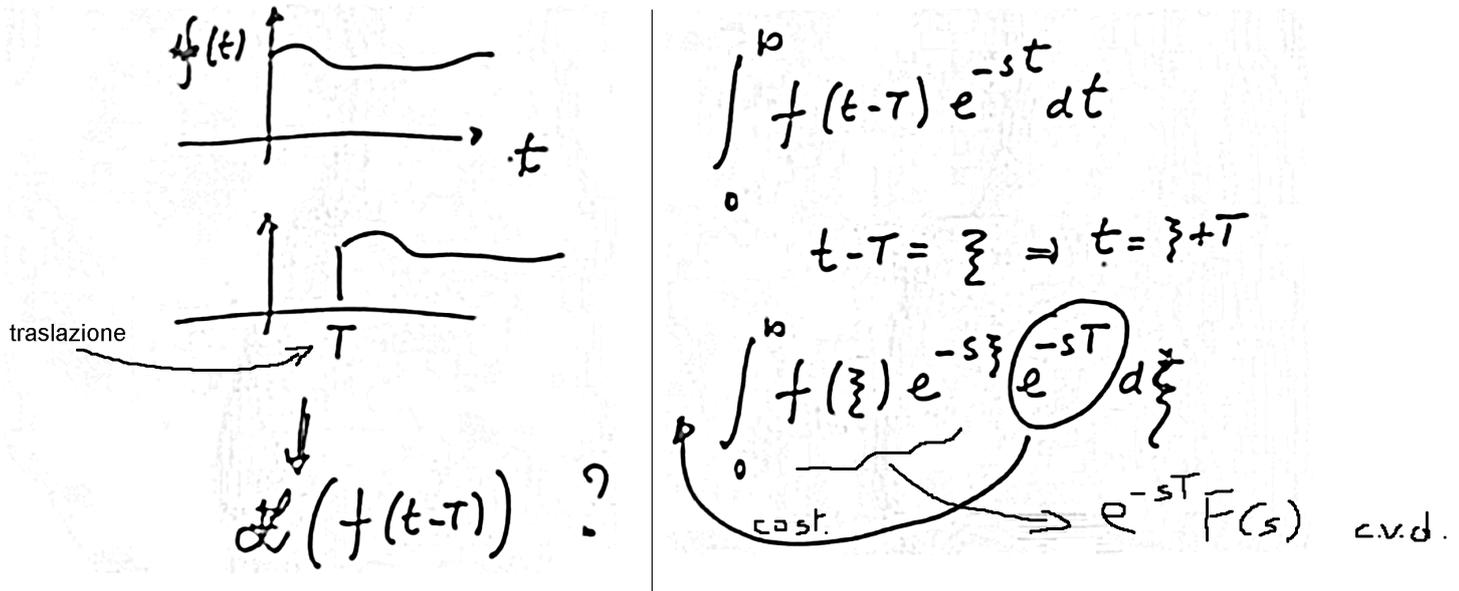
teorema della traslazione

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = F(s) e^{-sT}$$

Sopra, la seconda proprietà, per cui la trasformata di Laplace di una funzione traslata a destra di T istante di tempo, è uguale alla trasformata di Laplace della funzione f(t) non traslata moltiplicata per  $e^{-sT}$ .

Questo vuol dire, che ritardando una funzione nel tempo, nel dominio della variabile di Laplace, cioè nel dominio della variabile complessa, l'operazione da fare su questa funzione è quella di prendere la sua trasformata e moltiplicarla per  $e^{-sT}$ . Questo è un risultato che va sotto il nome di teorema della traslazione.

La traslazione è a destra. La verifica è semplice, si tratta di applicare la definizione della trasformata di Laplace.

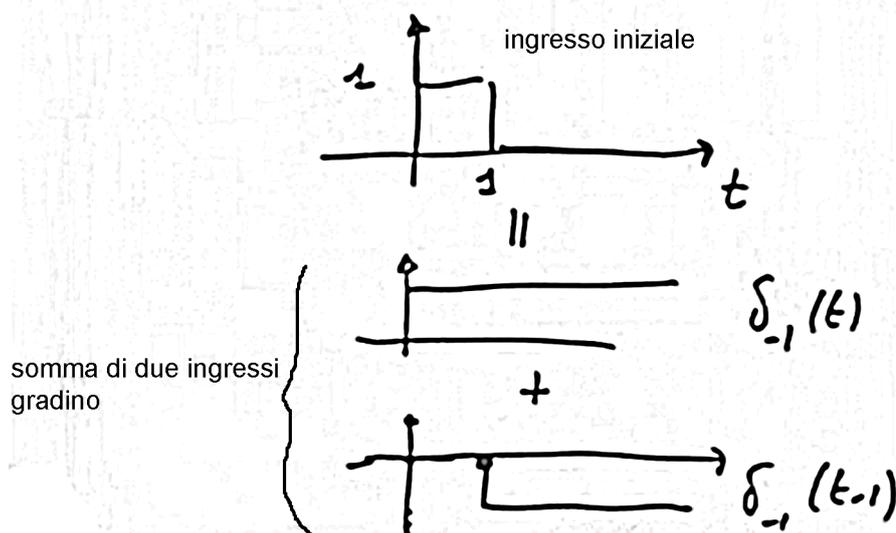


Questo risultato è importante perché ci permette di calcolare la risposta a ingressi che sono traslati. Molto spesso gli ingressi sono sommatoria di ingressi elementari in funzione del tempo che sono traslati gli uni rispetto agli altri.

In esempio, sotto, si vuole calcolare l'uscita di un ingresso come da figura, in cui l'uscita vale 1 fino al tempo  $T = 1$ , poi vale 0.

Questo ingresso può essere scritto come la somma di due ingressi, uno è il gradino unitario da 0 in poi, uno è il gradino unitario negativo traslato di 1 che vale -1 da 1 in poi. La somma delle due funzioni dà l'ingresso iniziale.

$$u(t) = \sum u_i(t)$$



Poiché sappiamo fare la trasformata di Laplace di entrambe le funzioni, sappiamo calcolare la trasformata di Laplace dell'ingresso dato

Se  $U(s)$  è una  
funzione razionale



$Y_f(s)$  è una  
funzione razionale



$Y_f(s)$  può essere scritta in  
frazioni parziali



$Y_f(s)$  può essere facilmente  
antitrasformata

Quindi la risposta forzata è facile da calcolare se la trasformata della funzione d'ingresso è una funzione razionale, in particolare se una funzione razionale che, moltiplicata per la funzione  $H(s)$  che è anch'essa una funzione razionale strettamente propria, dà vita ad una funzione razionale strettamente propria,  $Y_f(s)$ , allora possiamo fare una espansione in frazioni parziali di  $Y_f(s)$  e essa può essere facilmente antitrasformata.

Ne vedremo una applicazione nella risposta ad ingressi canonici.

## UNA CLASSE PARTICOLARE DI INGRESSI

$$u(t) = t^k/k! \delta_{-1}(t) = \delta_{-(k+1)}(t)$$

$$k = 0$$

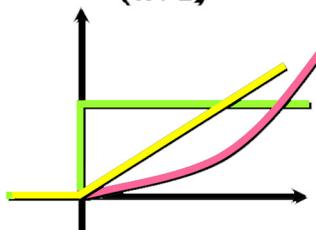
$$u(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$k = 1$$

$$u(t) = t \delta_{-1}(t)$$

$$k = 2$$

$$u(t) = t^2/2 \delta_{-1}(t)$$



La risposta ad ingressi canonici è una particolare classe di ingressi, nella forma riportata a lato, che è un ingresso canonico di ordine  $k$ .

Per  $k = 0$  otteniamo la funzione gradino unitario, cioè la funzione che vale 0 fino a 0, 1 da 0 in poi.

Per  $k = 1$  otteniamo la funzione a rampa unitaria, che vale 0 fino a 0,  $t$  da 0 in poi, è in sostanza una semi retta di coefficiente angolare 1.

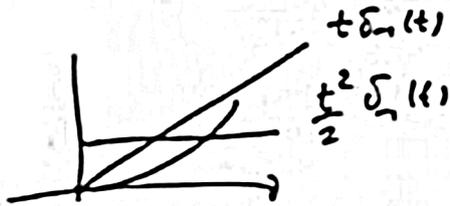
Per  $k = 2$  otteniamo la funzione rampa parabolica, che è una parabola centrata nell'origine.

| $u(t)$                                                               |               | $y_f(t)$    |
|----------------------------------------------------------------------|---------------|-------------|
| $\delta(t)$                                                          | $\rightarrow$ | $W(t)$      |
| $\delta_{-1}(t)$                                                     | $\rightarrow$ | $W_{-1}(t)$ |
| $\vdots$                                                             |               | $\vdots$    |
| $\delta_{-k}(t)$                                                     | $\rightarrow$ | $W_{-k}(t)$ |
| $y_f(t) = \int_0^t W_{-k}(t-\tau) \frac{d^k u(\tau)}{d\tau^k} d\tau$ |               |             |

Indicando con  $W_{-1}$  la risposta forzata all'ingresso a gradino, quindi all'ingresso canonico di ordine zero (per come lo abbiamo definito), e con  $W_{-k}$  la risposta forzata all'ingresso canonico di ordine  $k - 1$ , legando, per convenzione, il  $k$  alla potenza di  $t$ , vale una proprietà come riportato a lato.

La funzione  $u$  è una funzione di ingresso ad un tempo generico, funzione regolare e derivabile.

Il prodotto dell'integrale è tra la risposta forzata all'ingresso di tipo  $k - 1$  e la derivata di ordine  $k$  della funzione di ingresso.



$t\delta_n(t)$  Questo è importante anche in funzione del fatto che gli ingressi canonici sono ottenuti tutti uno per derivazione dell'altro.

L'ingresso canonico di ordine 1 (semiretta) è ottenuto per derivazione rispetto al tempo dell'ingresso canonico di ordine 2 (parabola).

$$\frac{d}{dt} \frac{t^2}{2} \delta_n(t) \rightarrow t \delta_n(t)$$

Gli ingressi canonici sono ottenuti dal livello superiore al livello inferiore per derivazione, e dal livello inferiore al livello superiore per integrazione.

$$\frac{d}{dt} t \delta_n(t) \rightarrow \delta_n(t)$$

Se si integra il gradino si ottiene la rampa, se si integra la rampa si ottiene la rampa parabolica, e così via.

$$y_f(t) = \int_0^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

La risposta forzata  $y_f(t)$  può essere scritta come l'integrale da 0 a  $t$  della convoluzione tra la risposta impulsiva  $W(t - \tau)$  moltiplicata per l'ingresso  $u(\tau)$ , in  $d\tau$ .

$$y_f(t) = \int_0^t W_{-1}(t-\tau) \frac{d u(\tau)}{d \tau} d\tau$$

$$\int_0^t W_{-2}(t-\tau) \frac{d^2 u(\tau)}{d \tau^2} d\tau$$

Se invece di avere la risposta impulsiva, si ha  $W_{-1}(t - \tau)$  allora l'integrale di convoluzione da 0 a  $t$  deve essere fatto come segue: siccome l'ingresso canonico di ordine 1 è l'integrale della risposta impulsiva, la convoluzione viene fatta con la derivata rispetto a  $\tau$  in  $d\tau$ . Questa è ancora la risposta forzata.

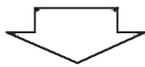
Se ora si avesse la  $W_{-2}$ , si dovrebbe fare l'integrale della  $W_{-2}$  nella derivata seconda di  $u(\tau)$  fatta rispetto a  $\tau$  due volte ( $\tau^2$ ) in  $d\tau$  ... e così via.

È per questa ragione che gli ingressi si dicono canonici, perché al pari dell'ingresso impulsivo la loro risposta forzata è un modello del comportamento forzato.

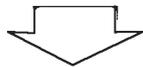
Facendo l'integrale di convoluzione della loro risposta forzata con una opportuna derivata conseguente della funzione di ingresso si ottiene la risposta forzata.

Le risposte forzate a questi ingressi sono risposte forzate particolari, hanno le stesse caratteristiche, se vogliamo, in qualche misura, della risposta impulsiva.

$$\frac{d}{dt}(t \delta_{-1}(t)) = \delta_{-1}(t)$$



$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = s \mathcal{L}[t \delta_{-1}(t)] - (t \delta_{-1}(t))_{t=0}$$



$$\mathcal{L}[t \delta_{-1}(t)] = 1/s^2$$

è 1/s — quindi

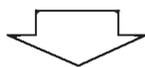
Teorema della derivazione

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$



$$\frac{d}{dt} \delta_{-(k+1)}(t) = \frac{d}{dt} t^k/k! \delta_{-1}(t) =$$

$$= t^{(k-1)} / (k-1)! \delta_{-1}(t) = \delta_{-k}(t)$$



$$\mathcal{L}[t^{(k-1)} / (k-1)! \delta_{-1}(t)] = \dots = 1/s^k$$

$$u(t) = \delta_{-(k+1)}(t) \rightarrow U(s) = 1/s^{k+1}$$



$$Y_f(s) = W(s) U(s) = W(s)/s^{k+1}$$

$$Y_f(s) = \frac{n(s)}{d(s) s^{k+1}} =$$

$$\frac{a_0}{s^{k+1}} + \dots + \frac{a_k}{s} + \sum_h \frac{r_h}{s - s_h}$$

Vediamo come si calcolano le trasformate degli ingressi canonici.

Quello che dobbiamo calcolare è la risposta forzata a un ingresso canonico di ordine k.

Dobbiamo metterci in condizioni di calcolare la trasformata di Laplace della funzione d'ingresso, e per fare questo facciamo le seguenti osservazioni: la derivata rispetto al tempo di t per  $\delta_{-1}(t)$  è  $\delta_{-1}(t)$ .

Quindi posso scrivere la trasformata di Laplace di tale funzione applicando il teorema della derivazione, per cui la funzione è s volte la trasformata di Laplace della funzione F meno la funzione f in 0.

Ragionando allo stesso modo, siccome la derivata rispetto al tempo della funzione  $\delta_{-(k+1)}(t)$  è uguale alla derivata di  $t^k/k! \delta_{-1}(t)$ , allora vale l'identità mostrata a lato e quindi la trasformata di Laplace, in sostanza dell'ingresso canonico di ordine k - 1, è uguale a 1/sk.

Quindi la trasformata di Laplace dell'ingresso canonico di ordine k è 1/s<sup>k+1</sup>... e così via.

Quindi la risposta forzata  $Y_f(t)$  all'ingresso canonico di ordine k,  $t^k/k!$ , è uguale a  $W(s) U(s)$ , ovvero  $W(s)/s^{k+1}$ .

Pensando a tutti i sistemi che hanno una sola uscita e un solo ingresso, la  $W(s)$  è un rapporto di polinomi, con il grado del denominatore maggiore, o eventualmente uguale (se c'è un legame diretto ingresso-uscita), di quello del numeratore, quando moltiplichiamo per 1/s<sup>k+1</sup> otteniamo un polinomio di grado maggiore.

Possiamo fare l'espansione in frazioni parziali che ci conduce ad un'espressione

come riportato in figura.

$$\frac{M(s)}{(s-s_1) \dots (s-s_n) s^{k+1}}$$

||

$$\frac{r_1}{s-s_1} + \frac{r_2}{s-s_2} + \dots + \frac{r_n}{s-s_n}$$

$$+ \frac{a_0}{s^{k+1}} + \dots + \frac{a_k}{s}$$

$$Y_f(s) = \frac{a_0}{s^{k+1}} + \dots + \frac{a_k}{s} + \sum_h \frac{r_h}{s-s_h}$$

antitrasformata 

$$y_f(t) = \left[ a_0 \frac{t^k}{k!} + \dots + a_k \right] \delta_{-1}(t) + y_r(t)$$

$$y_t(t) \longrightarrow + \sum_h r_h e^{s_h t} \delta_{-1}(t)$$

A lato l'espressione che si ottiene facendo l'antitrasformata. Il termine  $a_0/s^{k+1}$  diventa  $a_0 t^k/k!$ .

Se ora ci mettiamo nelle condizioni in cui il sistema garantisce l'esistenza della

risposta a regime permanente, quindi la parte reale degli autovalori del sistema deve essere negativa, allora, a maggior ragione, gli zeri del denominatore della  $W(s)$  saranno a parte reale negativa. Questo perché gli zeri del denominatore della  $W(s)$  sono un sottoinsieme degli autovalori.

In sostanza questo significa che gli  $s_h$  sono numeri a parte reale negativa.

Se la parte reale di tali numeri è negativa al crescere del tempo queste funzioni vanno tutti a zero, quindi al crescere del tempo tutta la parte nella sommatoria se ne va.

La parte persistente della risposta è quella che rimane.

Quindi quello che abbiamo scoperto è che la parte che va a zero è la parte transitorio della risposta, mentre la parte che rimane è la parte a regime della risposta.

$$y_r(t) = \left[ a_0 \frac{t^k}{k!} + \dots + a_k \right] \delta_{-1}(t)$$

$$a_0 = \left. \frac{n(s)}{d(s)} s^{k+1} \right|_{s=0} = W(0) = K$$

$$a_h = \left. \frac{1}{h!} \frac{d^h}{ds^h} W(s) \right|_{s=0} \quad \text{per } h = 0, \dots, k$$

La risposta a regime permanente ad ingressi polinomiali

*riportata a lato*

Questo significa che, in risposta ad un ingresso che è un polinomio omogeneo di ordine  $k$ , ovvero  $t^k/k!$ , abbiamo in risposta ancora un polinomio di ordine  $k$ , nel quale compaiono anche le potenze di ordine inferiore.

La risposta è quindi dello stesso tipo

dell'ingresso, la parte persistente è dello stesso tipo dell'ingresso.

I coefficienti di questo polinomio sono calcolabili facendo l'espansione in frazioni parziali.

In particolare il primo,  $a_0$ , coincide con la  $W(0) = K$ . Questo termine si chiama guadagno.

Gli altri termini possono essere utilizzati calcolando l'espressione riportata a lato. Tale termini coincidono con lo sviluppo in serie di McLaury della funzione  $W(s)$  nel punto intorno a 0.



→ **Ad un ingresso  $\delta_{-k}(t)$  corrisponde in uscita, a regime, un polinomio di ordine  $k-1$  in  $t$**

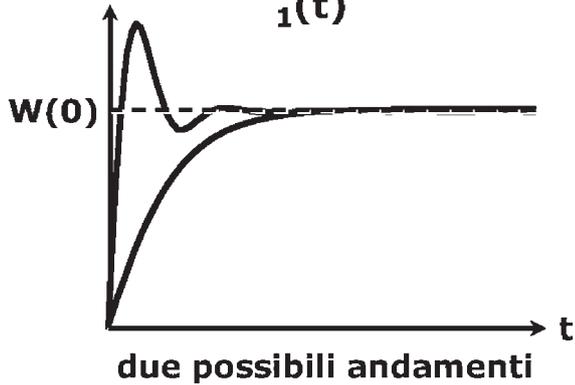
Abbiamo dunque scoperto che ad un ingresso di ordine  $k - 1$  canonico corrisponde in uscita, a regime, un polinomi di ordine  $k - 1$  in  $t$ .

→ **Ad un ingresso polinomiale in  $t$  corrisponde in uscita, a regime, un polinomio dello stesso ordine**

Se immaginiamo di dare un ingresso che non sia di tipo canonico, ma che sia una combinazione lineare degli ingressi canonici, definibile come un ingresso polinomiale in  $t$ , allora, ad un ingresso polinomiale in

$t$  corrisponde in uscita, a regime, un polinomio dello stesso ordine. Questo perché alla combinazione lineare degli ingressi corrisponde la combinazione lineare delle uscite. Si ricorda che stiamo parlando di una risposta a regime permanente che è una parte della risposta forzata è quindi vale senz'altro per questa parte la sovrapposizione degli effetti.

$$u(t) = \delta_{-1}(t) \rightarrow y_f(t) = W_{-1}(t)$$



La risposta indiciale

La risposta indiciale è la risposta all'ingresso a gradino.

In base all'espressione precedente tale risposta tende a regime ad un valore costante.

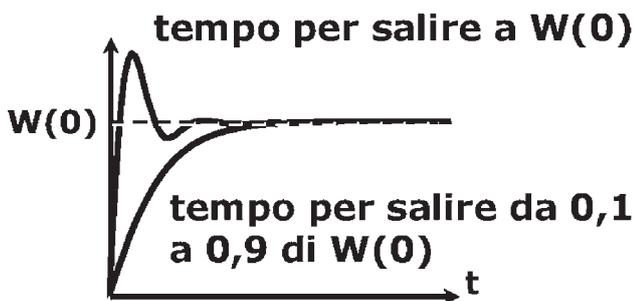
La risposta a regime è il guadagno del sistema, la  $W(0)$ .

Gli andamenti possibili della risposta forzata sono due, uno partendo da sotto e l'altro facendo una specie di oscillazione,

dopo essere passato sopra il valore a regime.

## Parametri caratteristici

**Tempo di salita:  $t_s$**



Parametri caratteristici

Ai due andamenti sopracitati corrispondono due parametri caratteristici.

Il primo è il tempo di salita,  $t_s$ . Esso è il tempo per raggiungere  $W(0)$ , nell'andamento di tipo oscillatorio. Se invece l'andamento è l'altro, il tempo di salita è il tempo per andare da 0,1 a 0,9 di  $W(0)$ , il valore di regime.

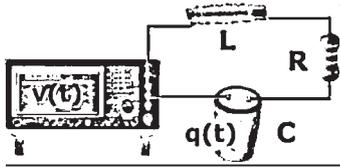
Il valore di regime non viene mai raggiunto se non all'infinito.

Il secondo parametro caratteristico è la sovralongazione,  $s^*$ . È il coefficiente che rende conto di quanto siamo andati al di sopra del valore di regime quando l'andamento è del tipo oscillatorio. Tale parametro è definito come il valore massimo meno il valore di regime diviso il valore di regime, cioè rapportato al valore di regime.

**Sovralongazione:  $s^*$**  In altri termini è il numero come rappresentato a lato.

$$1+s^* = \max\{W(t)\} / W(0)$$

## Collegamento della risposta indiciale con il comportamento in frequenza



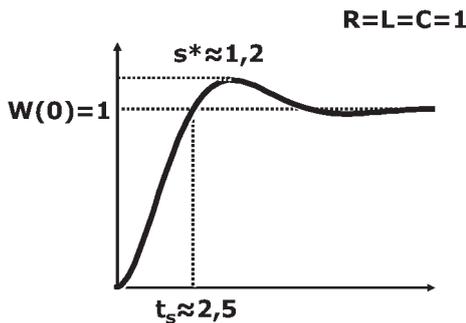
$$u(t) = v(t) \rightarrow y(t) = q(t)$$

$$Y(s) = \frac{C}{1 + sRC + s^2 LC} U(s)$$

Esaminiamo un circuito RLC già esaminato in precedenza.

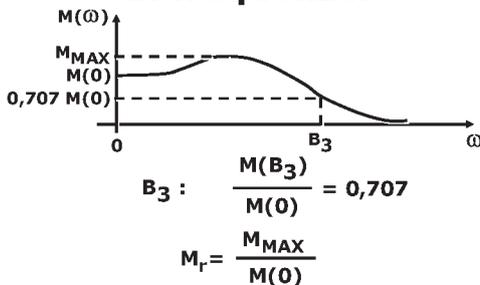
L'ingresso è la tensione dell'alimentazione e l'uscita è la quantità di carica sul condensatore.

La funzione di trasferimento ha l'espressione della  $Y(s)$ .



A lato la rappresentazione della risposta indiciale.

### Parametri caratteristici in frequenza:

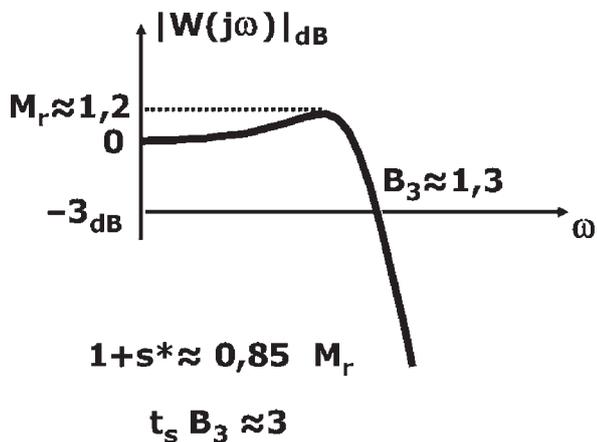


**$B_3$**

è collegata alla rapidità di risposta

**$M_r$**

tiene conto di una particolare reattività a sollecitazioni in un certo intervallo di frequenze

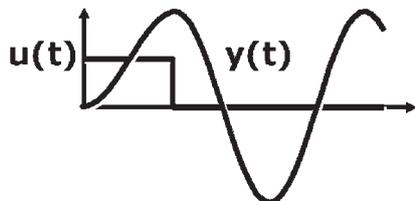


Per una vasta gamma di sistemi valgono le relazioni di questo genere.

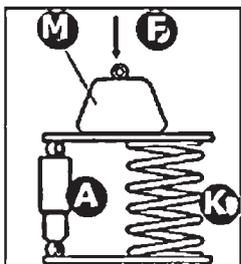
$$M \ddot{y}(t) = u(t) - k y(t)$$

$$Ms^2 Y(s) = U(s) - k Y(s)$$

$$W(s) = 1 / (Ms^2 + k)$$



$$M \ddot{s}(t) + k s(t) + a \dot{s}(t) = f(t) + Mg$$



$$k s = Mg$$

$$h = s - s_0$$

$$M \ddot{h}(t) + k h(t) + a \dot{h}(t) = f(t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{a}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

□

## Lezione n. 10 LE RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE DELLA RISPOSTA ARMONICA

Prof. Salvatore Monaco  
46'00"

- Introduzione
- Funzione di trasferimento: rappresentazione
  - Rapporto di polinomi
  - Poli zeri
  - Forma di Bode
- I diagrammi di bode
- Termine costante
- Termine monomio
- Termine binomio
- Termine trinomio

### Introduzione

Questa lezione è dedicata alle rappresentazioni grafiche della risposta armonica. La risposta armonica è la funzione di trasferimento calcolata per  $s = j\omega$ .

Essa ha un significato fisico nel momento in cui esiste la risposta a regime permanente, cioè per i sistemi per i quali gli autovalori hanno parte reale negativa.

## Premessa

→  $M(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  caratterizzano il comportamento in frequenza

→ Nel loro complesso descrivono il comportamento dinamico

$M(\omega)$  e  $\Phi(\omega)$  caratterizzano il comportamento in frequenza, nel senso che,  $\omega$  per  $\omega$ , ci dicono come vengono modificati il modulo e la fase di un segnale periodico puro che transita attraverso il sistema e ne guardiamo la risposta a regime permanente.

Esse, nel loro complesso, descrivono il comportamento dinamico forzato del sistema.

## RAPPORTO DI POLINOMI

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$= \frac{n_w(s)}{d_w(s)} = \frac{b_0 + \dots + b_m s^m}{a_0 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

$m \leq n$

Le rappresentazioni della  $W(s)$ , per ingressi ad un ingresso e a una uscita, i concetti valgono anche per sistemi con due ingressi e più uscite, applicandoli ad ogni elemento della matrice delle funzione di trasferimento.

La funzione di trasferimento  $W(s)$  è il rapporto di due polinomi, il numeratore ha grado  $m$ , il denominatore ha grado  $n$ . Il grado del numeratore è minore o

uguale al grado del denominatore, è uguale solo se la matrice  $D$  è non nulla. Se  $D$  è nulla allora  $m$  è uguale al più a  $n - 1$ .

La funzione  $W(s)$  deve essere calcolata per  $s = j\omega$ , andando a vedere come variano il modulo e la fase di un rapporto di polinomi, quando al posto di esse mettiamo  $j\omega$ .

Ci sono sistemi che vengono progettati sulla base di variazione del modulo e della fase.

## POLI - ZERI POLI - ZERI

$$W(s) = k' \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)}$$

A partire dalla rappresentazione dei polinomi passiamo ad una rappresentazione come raffigurata a lato, al fine di passare ad una rappresentazione grafica.

Un generico polinomio  $P(s)$  può essere rappresentato in una forma fattorizzata, con i  $p_i$  che sono gli zeri del polinomio e che possono essere numeri reali oppure numeri complessi coniugati.

$$W(s) = \frac{n_w(s)}{d_w(s)}$$

Il coefficiente  $k'$  sarà il rapporto tra il coefficiente del numeratore con il coefficiente del denominatore.

$$p(s)$$

||

$$k(s-p_1) \cdots (s-p_k)$$

La  $W(s)$  è una rappresentazione di poli-zeri di una funzione di trasferimento generica e corrisponde alla fattorizzazione di polinomi al numeratore e al denominatore. Gli  $z_i$  (detti zeri) e i  $p_i$  (detti poli) potranno essere numeri reali oppure complessi coniugati.

$$k \prod (s-p)$$

## FORMA DI BODE

$$k' \frac{\prod (s-z_i) \prod (s^2 + a'_k s + b'_k)}{s^r \prod (s-p_i) \prod (s^2 + a_k s + b_k)}$$

Nel distinguere le coppie di complessi coniugati al numeratore e al denominatore abbiamo un'espressione fattorizzata del tipo chiamato forma di Bode.

Al numeratore, a sinistra sono stati lasciati gli zeri reali e a destra sono stati messi gli zeri complessi coniugati.

Al denominatore, a sinistra sono stati lasciati i poli reali e a destra sono stati messi i poli complessi coniugati, di cui sono state le moltiplicazioni generando polinomi di secondo grado.

Notare che gli zeri e i poli rappresentano entrambi i valori per cui rispettivamente il numeratore si annulla e il denominatore si annulla, per convenzione vengono

chiamati in modi diversi.

Il termine  $s^r$  corrisponde alla presenza di un certo numero di poli e di zeri in zero, per cui  $r$  sarà l'eccesso dei poli rispetto agli zeri in zero.

$$\tau' = -1/z \quad ..$$

$$k \frac{\prod (1 + s \tau')}{\prod \left( 1 + 2 \frac{\zeta'}{\omega_n'} s + \frac{s^2}{\omega_n'^2} \right)}$$

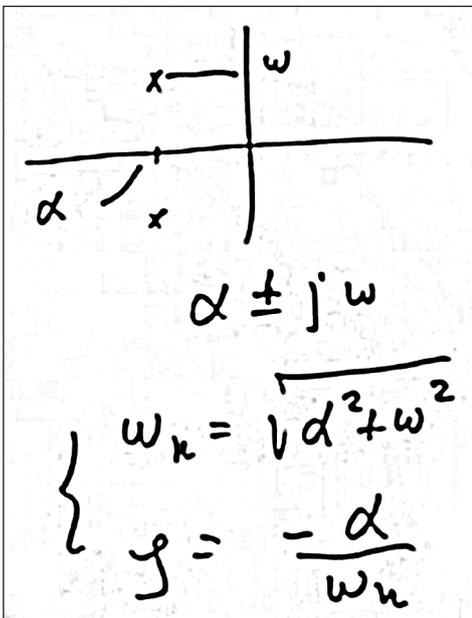
Introduzione di parametri, gli stessi parametri introdotti quando abbiamo parlato degli autovalori complessi e coniugati, la pulsazione e lo smorzamento.

$$s^r \prod (1 + s \tau) \prod \left( 1 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)$$

Facendo questo arriviamo ad una espressione fattorizzata come a lato riportato, che è un'espressione fattorizzata di Bode.

$$\tau = -1/p \quad ..$$

A partire da questa potremmo realizzare rappresentazioni in forma grafica.



In tale espressione si distinguono quattro tipi di termini: un termine costante  $k$  che viene definito il guadagno del sistema, un termine detto monomio a una certa potenza ( $s^r$ ), un termine binomio, un termine trinomio.

Prodotti di questi termini caratterizzano univocamente la funzione di trasferimento.

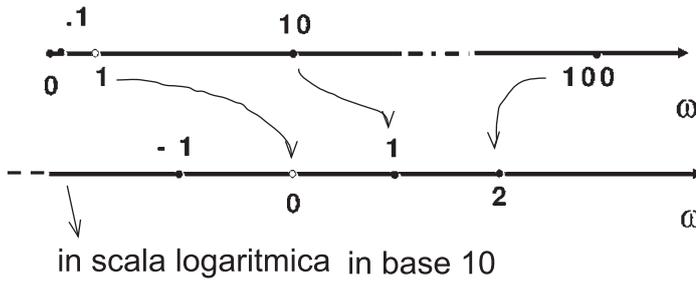
Il guadagno  $k$  del sistema è quel valore a cui tende la risposta in regime permanente quando l'ingresso è un gradino unitario. In questo caso tutti gli autovalori hanno parte reale negativa.

Nella espressione, al denominatore, i poli hanno dunque parte reale negativa, i  $\tau$  e i  $\xi$  sono tutti positivi,  $r = 0$  in quanto non ci possono essere poli zero perché tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa ed effettivamente  $k$  tende al valore della risposta a regime. Quindi andando a calcolare la  $W(0)$ , che è il valore a cui tende la risposta a regime all'ingresso gradino, si ottiene  $k$ .

Quando non esiste la risposta a regime permanente,  $k$  è comunque definito ed è il valore che si ottiene quando si calcola la  $W(s)$  in  $s = 0$  avendo avuto l'accortezza di eliminare prima i poli in zero e questa è la definizione di guadagno quando non esiste la risposta a regime permanente.

Quando invece esiste la risposta a regime permanente questa coincide anche fisicamente con il valore a cui tende la risposta all'ingresso unitario.

## Rappresentazioni di $M(\omega)$ e $\Phi(\omega)$ rispetto a $\omega$ in scala logaritmica



L'uso della scala logaritmica corrisponde ad una compressione sempre maggiore all'aumentare di  $\omega$ , per valori di  $\omega$  maggiori di 1. Viceversa espande tutta la scala tra 0 e 1, perché il logaritmo di 0.1 è -1, di 0.2 è -2, di 0.3 è -3 eccetera.

$$M_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} M(\omega)$$

$\Phi(\omega)$  in gradi o radianti

$$W_1(j\omega) W_2(j\omega) = M_1(\omega) M_2(\omega) e^{i\phi_1 + i\phi_2}$$



$$|W_1 W_2|_{dB} = M_{1db} + M_{2db}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

## I diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode sono rappresentazioni del modulo della fase della risposta armonica e quindi della  $W(s)$  calcolata in  $s = j\omega$ , rispetto ad una scala logaritmica.

L'uso della scala logaritmica corrisponde ad una compressione sempre maggiore all'aumentare di  $\omega$ , per valori di  $\omega$  maggiori di 1.

Il modulo, nei diagrammi di Bode, viene rappresentato con unità di misura dB sull'asse delle ordinate.

Cioè il modulo viene rappresentato come 20 volte il logaritmo in base 10 del modulo.

La fase viene rappresentata da in gradi o radianti secondo una scala usuale.

Il modulo viene rappresentato in dB

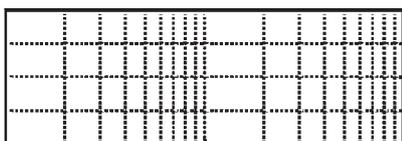
perché risulta comodo nel tracciare i diagrammi di Bode.

Infatti avendo due funzioni di trasferimento  $W_1$  e  $W_2$ , il loro prodotto avrà una semplice espressione.

Il modulo del prodotto saranno la somma dei singoli moduli, per la fase vale già questa cosa. Questo è molto utile nella funzione di trasferimento.



La scala è logaritmica sull'ascissa ed è normale sull'ordinata.



$10^0$  2 3  $10^1$  20 30  $10^2$

La scala è logaritmica.  
Gli intervalli sono detti decadi e sono relativi a intervalli che corrispondono a due frequenze che sono nel rapporto di 10:1.

→ Il modulo e la fase di un generico  $W(j\omega)$  possono essere calcolati facendo la somma dei moduli e delle fasi dei singoli fattori

|                                                                         |          |
|-------------------------------------------------------------------------|----------|
| $k$                                                                     | costante |
| $j\omega$                                                               | monomio  |
| $1 + j\omega \tau$                                                      | binomio  |
| $1 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}$ | trinomio |

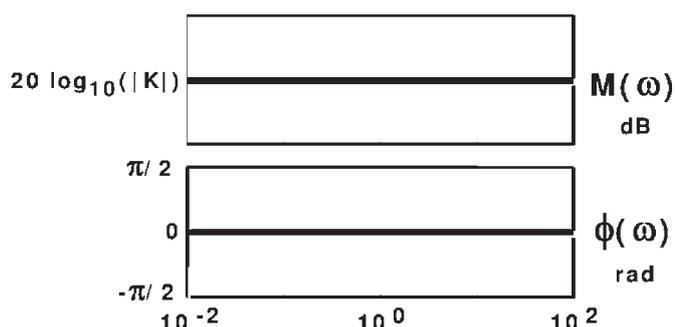
Abbiamo visto che la funzione di trasferimento è il prodotto di quattro tipi di termini.

Quindi possiamo applicare questo principio anche nella costruzione delle rappresentazioni grafiche della risposta armonica. Sapendo tracciare gli andamenti di questi quattro tipi di termini, le somme o le differenze degli andamenti di questi termini, potremo calcolare l'andamento della risposta armonica.

Per ognuno di questi termini analizziamo il diagramma del modulo della fase.

costante,  $k$

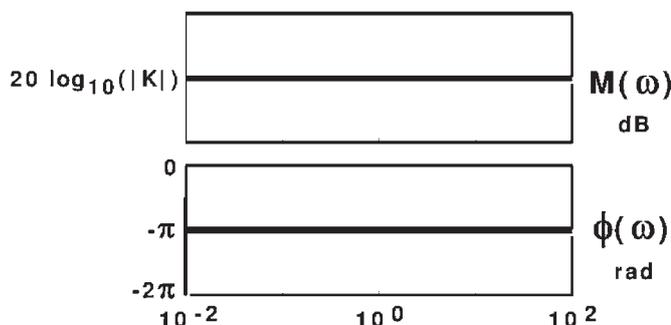
$k$  positivo



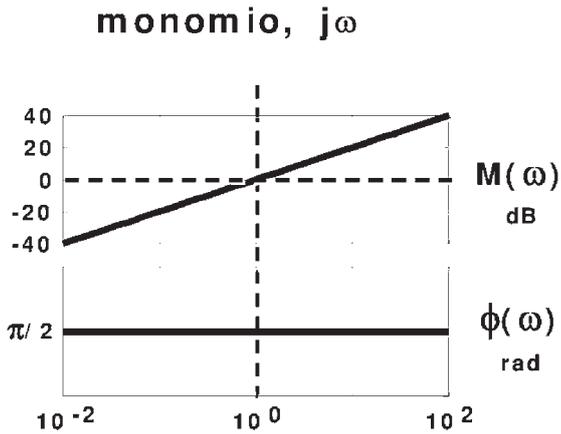
Per il termine  $k$  costante, per  $k$  positivo, il modulo è  $20 \log_{10}(|k|)$ ; la fase è nulla. Quindi gli andamenti di modulo e fase, in questo caso, sono quelli riportati a lato.

costante,  $k$

$k$  negativo



Per il termine  $k$  costante, per  $k$  negativo, il modulo è  $20 \log_{10}(|k|)$ ; la fase è  $-\pi$ .



$j\omega \rightarrow$  il suo modulo è:  $\sqrt{\omega^2}$

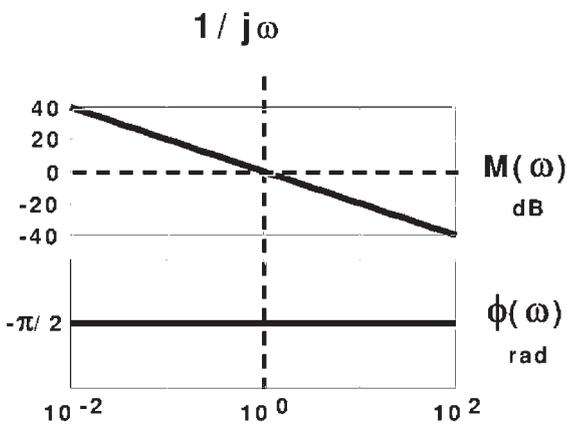
$M_{dB} = 20 \lg_{10} \omega$

sull'ascisse c'è il  $\log_{10} \omega$ ,  
la taratura è in  $\omega$ , ma  
la scala è logaritmica,  
quindi  $M_{dB}$  è una retta  
del tipo  $y = mx$

$y = m x$   
↑  
20 per decade

Per il termine monomio  $j\omega$ , il modulo è una retta. In  $y = mx$ ,  $x$  è la scala corrente e l'ampiezza unitaria è la decade, quindi quello che otteniamo per il monomio è una retta, con pendenza 20 dB per decade, rispettivamente  $m$  e  $x$ . Quando  $\omega = 1$  la  $y$  è nulla.

Per quanto riguarda la fase,  $j\omega$  è un numero che sta sull'ordinata e la fase è  $\pi/2$ . Quindi la fase è costantemente  $\pi/2$  per ogni valore di  $\omega$  sull'asse immaginario.



Per il termine monomio al denominatore, esso è una retta, con pendenza -20 dB per decade. La fase, pari alla fase del numeratore meno la fase del denominatore, è  $-\pi/2$  costantemente.

$$1 + j\omega\tau$$

$$M_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

per  $\omega$  piccolo

$$\omega|\tau| < 1 \quad \omega < \frac{1}{|\tau|}$$

$$M_{dB} \approx 20 \log_{10} 1 = 0$$

Per il termine binomio  $1 + j\omega\tau$ , il modulo ha un certo andamento, rappresentabile per  $\omega$  grandi e per  $\omega$  piccoli.

$$\omega|\tau| > 1$$

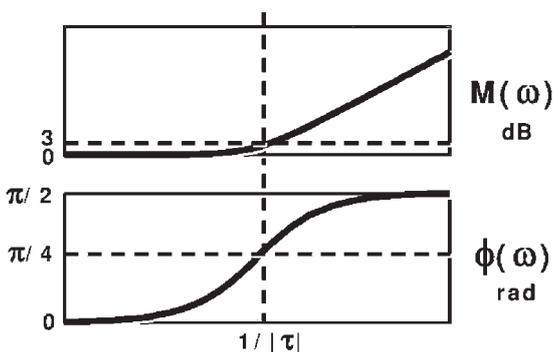
$$M_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$M_{dB} \approx 20 \log_{10} \omega|\tau|$$

$$= 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau|$$

$$y = m x + q \quad \text{costante}$$

binomio,  $1 + j\omega\tau$



Andamento del modulo al variare di  $\omega$ . E' detto andamento asintotico.

$$\phi = \arctg \omega\tau$$

La correzione massima si ha nel punto di rottura, per  $\omega = 1/|\tau|$ .

$\tau > 0$  (come nel caso rappresentato)

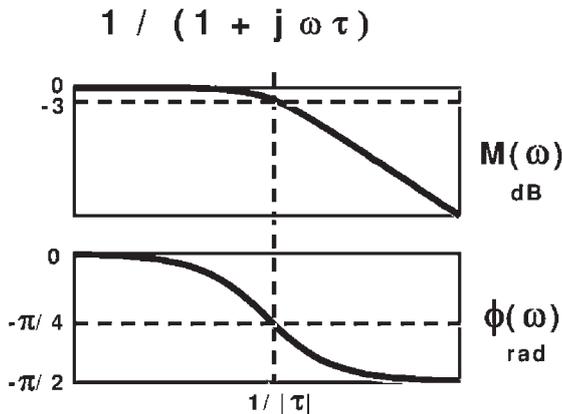
Andamento della fase al variare di  $\omega$ , che è in ascissa.

Al variare di  $\tau$ , modulo e fase non variano, ma si spostano in frequenza, verso destra o verso sinistra.

$$\omega = \frac{1}{|\tau|} \quad \omega^2 \tau^2 = 1$$

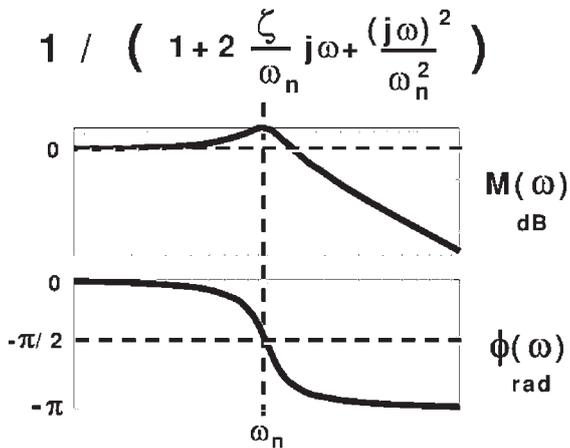
$$M_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{2} = 3$$

In esempio  $\tau$ , è positivo, se  $\tau$  è negativo il modulo rimane lo stesso, ma la fase diventa l'opposto e va da 0 da  $\pi/2$ .



Il modulo del termine binomio al denominatore ha un andamento opposto a quello al numeratore.

L'andamento della fase è l'opposto a parità di valori di  $\tau$ .



L'andamento del trinomio al denominatore.  $\omega$  dipende da  $\zeta$  e da  $\omega_n$ .

Modulo, trattato di seguito.

Fase, è un' arcotangente.

L'espressione è del tipo:

$$1 / ( 1 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} )$$

$$M_{dB} = -20 \lg_{10} \sqrt{ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \frac{4\zeta^2 \omega^2}{\omega_n^2} }$$

$$|\zeta| < 1$$

Notare che  $|\zeta| < 1$

$$\omega \ll \omega_n$$

$$M_{dB} \approx 20 \lg_{10} 1 = 0$$

Se  $\omega \ll \omega_n$  allora sotto la radice abbiamo termini molto piccoli, quindi trascurabili, quindi il modulo asintotico  $M_{dB}$  è circa uguale a  $20 \lg_{10} 1 = 0$ .

Quindi in questo caso l'andamento è dominato dalla retta a 0 dB.

Se  $\omega \gg \omega_n$  allora sotto la radice abbiamo un  $\omega$  alla quarta potenza, dominante su tutti gli altri termini, facendo i calcoli troviamo che  $M_{dB}$  è circa  $40 \lg_{10} \omega - 40 \lg_{10} \omega_n$ .

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_n \\ M_{dB} &\approx -20 \lg_{10} \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \\ M_{dB} &\approx 40 \lg_{10} \frac{\omega}{\omega_n} \\ &= -40 \lg_{10} \omega + 40 \lg_{10} \omega_n \end{aligned}$$

Tutto questo è relativo ad un termine del tipo  $1 / \left( 1 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right)$   
 Quello che otteniamo è una retta del tipo  
 $y = -40x + q$ , in cui  $q = \lg_{10} x$

Abbiamo cioè una retta che ha pendenza 40dB per decade e interseca l'asse a 0dB nel punto  $\omega = \omega_n$ .

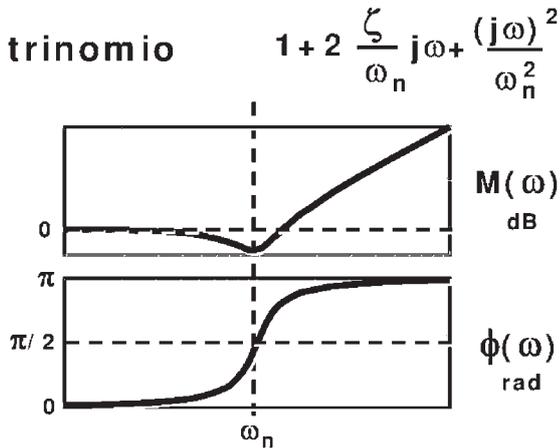
L'andamento è asintotico come riportato in figura.

$$\begin{aligned} M_{dB} &\approx 40 \lg_{10} \frac{\omega}{\omega_n} \\ &= -40 \lg_{10} \omega + 40 \lg_{10} \omega_n \\ y &= -40x + q \end{aligned}$$

$\omega_n$  è detta pulsazione di risonanza

$\omega_n$  è una frequenza interna del sistema.

per  $\zeta$  uguale a zero il modulo diventa infinito e la fase salta da zero a  $-\pi$ .

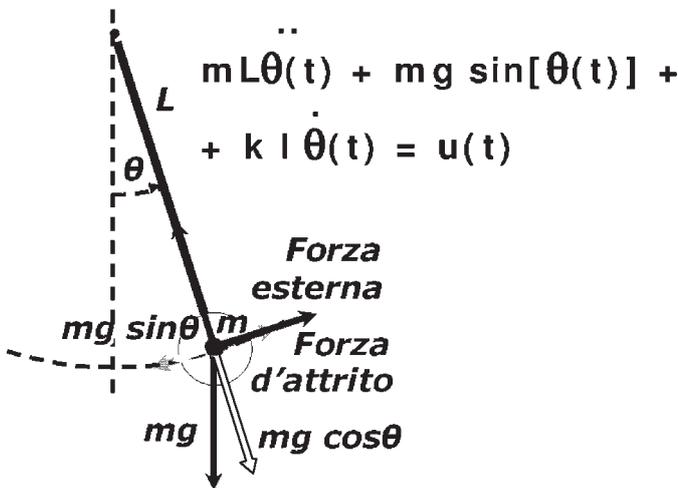


Questo per un termine trinomio che sta al denominatore con uno  $\zeta$  positivo.

Se  $\zeta$  è negativo, l'andamento del modulo non cambia, l'andamento della fase è opposto, cioè la fase varia fra 0 e  $+\pi$ .

Per un termine trinomio al numeratore l'andamento del modulo è l'opposto.

L'andamento della fase è tra 0 e  $+\pi$  se  $\zeta$  è positivo, tra 0 e  $-\pi$  se  $\zeta$  è negativo.



Se consideriamo un sistema pendolo, conosciamo la sua caratterizzazione e il suo modello matematico.

Se consideriamo come ingresso la forza agente come uscita l'angolo di oscillazione abbiamo modello lineare che conosciamo la funzione di trasferimento  $Y(s)$  è del tipo riportato in figura, verificabile facendo i calcoli.

$$m l \ddot{\theta}(t) + mg \sin[\theta(t)] + k l \dot{\theta}(t) = u(t)$$

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta}(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m l} u$$

$$Y(s) = \frac{mg}{1 + k l / mg s + l / g s^2} U(s)$$

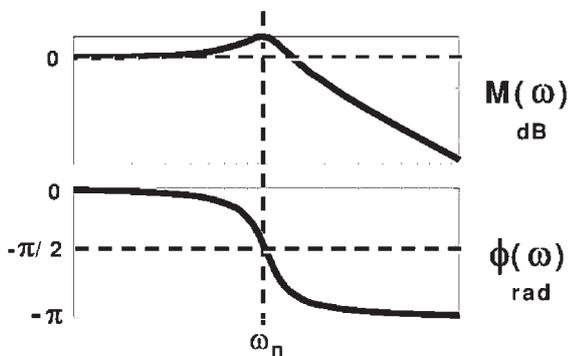
La funzione di trasferimento  $Y(s)$  è esattamente del tipo riportato a lato, con  $k$  al numeratore.

$$k / \left( 1 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right)$$

$$2 \frac{\zeta}{\omega_n} = k l / mg \quad \frac{1}{\omega_n^2} = l / g$$

Valgono pertanto le uguaglianze a lato.

$$w(s) = \frac{mg}{1 + k l / mg s + l / g s^2}$$



Se, per esempio, si fissano opportuni valori, si può verificare l'andamento del modulo e verificare la presenza della risonanza.

Si ha risonanza quando il termine centrale al denominatore è piccolo, quindi quando ad esempio  $k$ , che rappresenta l'attrito viscoso, è zero.

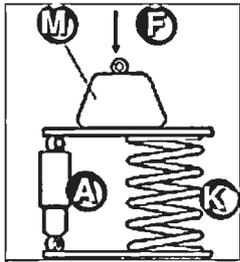
La risonanza conduce ad amplificazione di modulo, quindi per amplificare le oscillazioni di un'altalena (il pendolo) dobbiamo alimentare l'altalena spingendola ad una frequenza che è in sintonia con l'oscillazione che è propria del pendolo che, di fatto, caratterizza il sistema altalena.

In sintonia con le oscillazioni proprie possiamo generare delle amplificazioni, ma questo non accade sempre, accade solo se lo smorzamento è sufficientemente piccolo.



Un ulteriore esempio che avevamo visto era quello dello smorzatore, che è un sistema rappresentabile con delle equazioni analoghe al precedente. Abbiamo ancora una volta un andamento del tipo riportato a lato per valori piccoli dello smorzamento.

$$M \ddot{s}(t) + k s(t) + a \dot{s}(t) = f(t) + Mg$$



$$k s = Mg$$

$$h = s - s_0$$

$$M \ddot{h}(t) + k h(t) + a \dot{h}(t) = f(t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{a}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t)$$

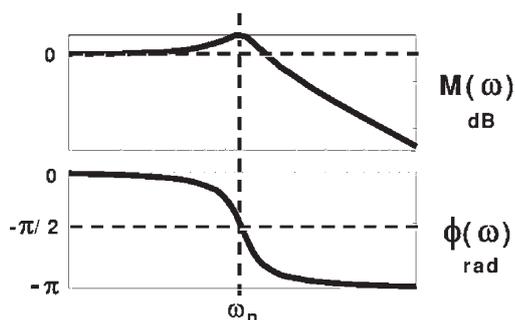
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$Y(s) = \frac{k}{1 + a/k s + m/k s^2} U(s)$$

$$k / \left( 1 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right)$$

$$2 \frac{\zeta}{\omega_n} = a / k \quad \frac{1}{\omega_n^2} = k / m$$

$$w(s) = \frac{k}{1 + a/k s + m/k s^2}$$



In conclusione, ricapitolando, abbiamo detto che il modulo e la fase di un generico  $W(j\omega)$ , ovvero una generica funzione di trasferimento, possono essere calcolati facendo la somma dei moduli e delle fasi dei singoli fattori, che possono essere costanti, monomi, binomi, trinomi.

→ Il modulo e la fase di un generico  $W(j\omega)$  possono essere calcolati facendo la somma dei moduli e delle fasi dei singoli fattori

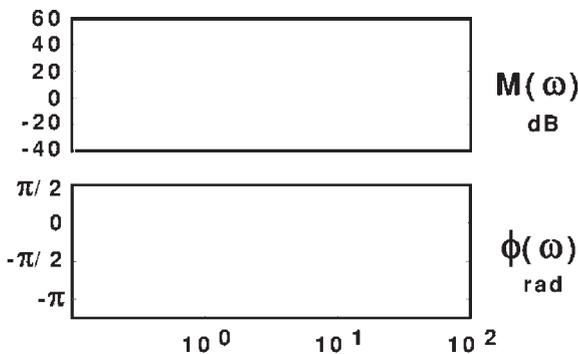
|                                                                         |          |
|-------------------------------------------------------------------------|----------|
| $k$                                                                     | costante |
| $j\omega$                                                               | monomio  |
| $1 + j\omega \tau$                                                      | binomio  |
| $1 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}$ | trinomio |

Abbiamo visto come variano i vari termini in frequenza.

Questa procedura può essere usata per costruire i diagrammi di modulo fase di una funzione di trasferimento data e già, per comodità, espressa nella forma di Bode.

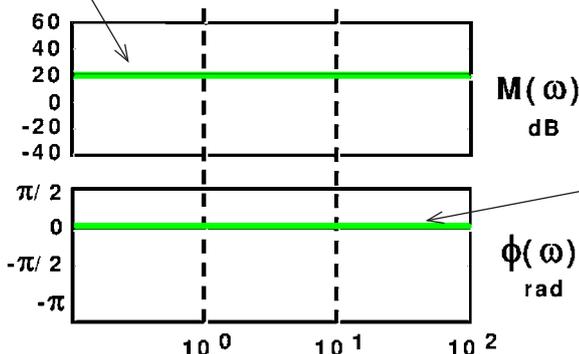
La funzione di trasferimento di esempio ha come costante 10, un termine binomio al numeratore, un termine monomio ( $s$ ) al denominatore, e infine un termine trinomio al denominatore.

$$10 \frac{(1 + 0,1 s)}{s (1 + 0,002 s + 0.01 s^2)}$$

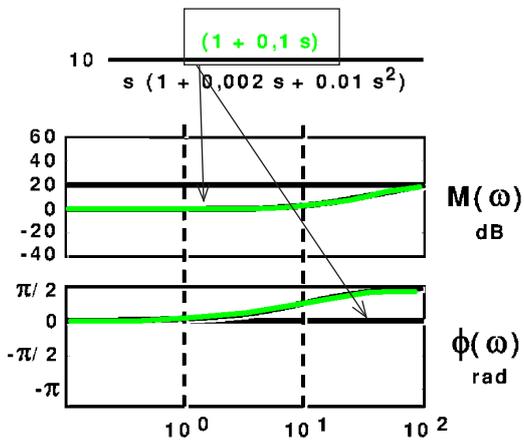


Quello che vogliamo fare è tracciare i diagrammi di singoli termini e vedere come questi si compongono, facendo le somme di tutti i termini.

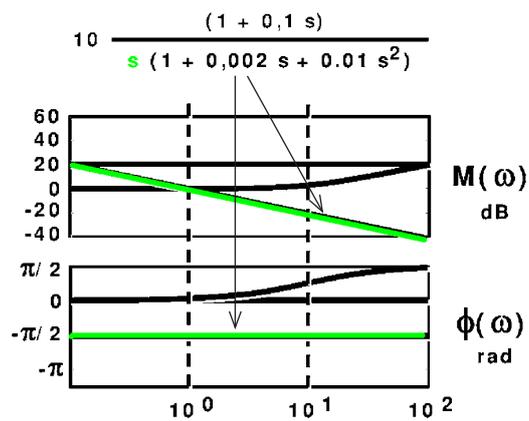
$$10 \frac{(1 + 0,1 s)}{s (1 + 0,002 s + 0.01 s^2)}$$



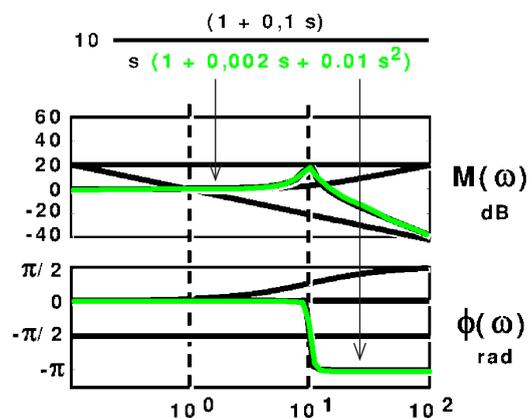
Questo è l'andamento del termine costante 10, il valore è 20 in quanto è 20 volte il logaritmo in base 10 di 10. Poiché è una costante positiva, la fase è nulla.



Questo è l'andamento del termine binomio,  $\tau = 0.1$ , quindi punto di rottura  $1/\tau$  pari a 10; andamento 0 per bassi valori di  $\omega$ , 20dB per decade per alti valori di  $\omega$ , piccola correzione nell'intorno del punto di rottura.

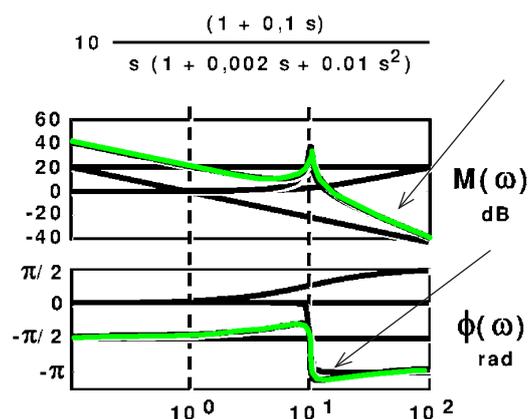


L'andamento di  $1/s$ , la fase è costantemente  $-\pi/2$  perché è un termine monomio al denominatore, la retta a pendenza  $-20\text{dB}$  per decade e passa per il punto  $\omega = 1$ .



Andamento del termine trinomio, di cui è possibile calcolare la pulsazione e lo smorzamento. L'andamento è a  $0\text{dB}$  per  $\omega < \omega_n$ ,  $-40\text{dB}$  per  $\omega$  maggiore.

La fase ha un andamento ripido, tra  $0$  e  $-\pi$ , poiché il valore di  $\xi$  è positivo anche se piccolo.



Infine si fanno le somme (delle pendenze delle curve) e quello che si ottiene è l'andamento complessivo.

Si osserva che se il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore, come quasi sempre accade, il modulo va a meno infinito in dB quando  $\omega$  va all'infinito. La fase tende sempre comunque a un fattore positivo o negativo di  $\pi/2$ .

□

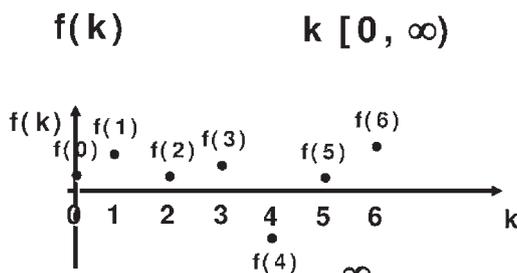
Prof. Salvatore Monaco  
40'24"

- La trasformata Z e le proprietà
- Il modello nel dominio complesso
- Analisi nel dominio della variabile complessa
- Un esempio
- La funzione di trasferimento

Introduzione

In questa lezione vedremo che anche nei sistemi a tempo discreto è possibile introdurre una operazione di trasformazione nel piano complesso che ci consente di condurre lo studio in quel dominio.

La trasformata Z - Definizione e proprietà



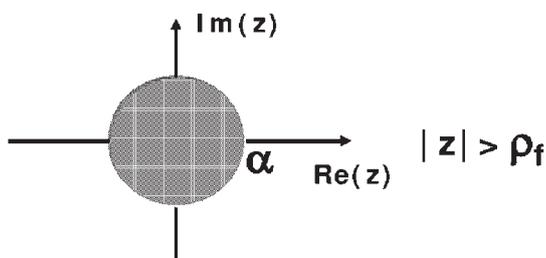
$$Z(f(k)) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^{-i}$$

$$f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots$$

Con sistemi a tempo discreto abbiamo a che fare con funzioni che sono definite nel tempo discreto, quindi sono definite in 0, 1, 2, 3, 4 ecc., cioè sull'insieme dei numeri naturali.

La trasformata Z è duale rispetto alla trasformata di Laplace.

La trasformata Z di una funzione è definita la sommatoria di funzioni in i, in campioni moltiplicate per z<sup>-i</sup>, i campioni divisi per z.



$$Z(f(k)) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^{-i} = F(z)$$

Se z è un numero complesso e il modulo è abbastanza grande, allora se, anche i campioni sono numeri molto grandi la divisione può produrre numeri molto piccoli. Quello che si ottiene è una serie convergente, da una successione che soddisfa la condizione di Cauchy.

Si può dimostrare che associata ad una funzione f(k) a tempo discreto, c'è un parametro alpha, oppure anche indicato con rho\_f, un

numero reale, che definisce la regione di convergenza.

Per tutti gli  $z$  esterni al disco si ha la convergenza, cioè la serie converge e converge in una funzione di variabile complessa,  $F(z)$ , che è definita all'esterno del disco.

**alcune semplici trasformate**

Alcune semplici trasformate

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\lambda^k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{z}\right)^i \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{z}} = \frac{z}{z - \lambda} \end{aligned}$$

serie  
geometrica

Trasformata  $Z(\lambda^k)$

$$\left| \frac{\lambda}{z} \right| < 1 \quad |z| > |\lambda|$$

La regione di definizione e la regione di convergenza.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(e^{a k}) &= \mathcal{Z}((e^a)^k) = \frac{z}{z - e^a} \\ |z| &> |e^a| \end{aligned}$$

Trasformata  $Z(e^{ak})$

$$\mathcal{Z}(\text{sen } \theta k) = \mathcal{Z}\left(\frac{e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}}{2j}\right)$$

Trasformata  $Z(\text{sen } \theta k)$

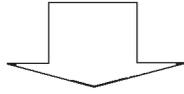
$$= \frac{1}{2j} \left( \mathcal{Z}(e^{j\theta k}) - \mathcal{Z}(e^{-j\theta k}) \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{j\theta}} - \frac{z}{z - e^{-j\theta}} \right) =$$

$$\frac{z \text{ sen } \theta}{z^2 - 2 z \text{ cos } \theta + 1} \quad |z| > 1$$

È una trasformazione lineare

$$\mathcal{Z}(a f(k) + b g(k))$$



$$a \mathcal{Z}(f(k)) + b \mathcal{Z}(g(k))$$

La trasformata Zeta è una trasformazione lineare.

La regione di convergenza sarà la più piccola fra le due regioni di convergenza. Quello che si chiama il raggio di convergenza sarà esterno al disco più grande tra i dischi di convergenza associati alle due regioni.

## Teorema della traslazione

→ a sinistra

$$\mathcal{Z}(f(k+1)) = z F(z) - z f(0)$$

→ a destra

$$\mathcal{Z}(f(k-1)) = F(z) / z$$

Dimostrazione della traslazione

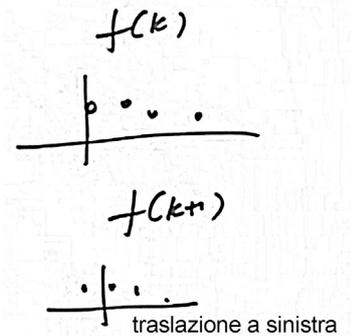
a sinistra, k+1:

$$\frac{1}{z} \mathcal{Z}(f(k+1)) + f(0)$$

"

$$f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \frac{f(3)}{z^3} + \dots$$

F(z)



Sulla base di questo vediamo la forma del modello nel dominio complesso.

~~~~~  
rappresentazione nel dominio del tempo

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

Il modello nel dominio complesso

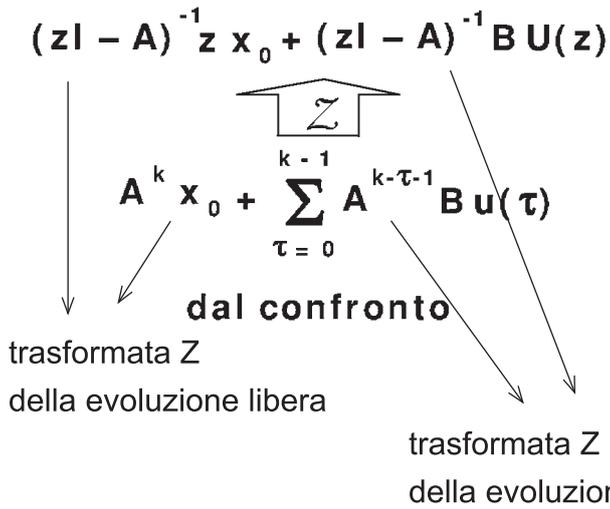
$$x(0) = x_0 \quad \Downarrow \quad \mathcal{Z} \text{ trasformata}$$

$$z X(z) - z x_0 = A X(z) + B U(z)$$

X è la trasformata Z della x.

$$X(z) = (zI - A)^{-1} z x_0 + (zI - A)^{-1} B U(z)$$

Espressione nel dominio della trasformata Z della X in funzione di x_0 e di U.
Quindi è la rappresentazione della transizione di X in funzione di x_0 e U.



L'espressione che abbiamo determinato deve essere confrontata con l'espressione della transizione nel dominio del tempo a partire da x_0 in funzione dell'ingresso u da 0 fino a k .

Questo perché l'espressione è la trasformata Z della x_k .

$$Z(A^k) = (zI - A)^{-1} z = \Phi(z)$$



$$Z(A^{k-1} B) = (zI - A)^{-1} B = H(z)$$



$$Z\left(\sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau-1} B u(\tau)\right) = (zI - A)^{-1} B U(z) = H(z) U(z)$$

Quindi $Z(A^k)$ è la trasformata Z della funzione di transizione.

Dato questo, applicando il teorema della traslazione a sinistra abbiamo che $Z(A^{k-1}B)$ è $H(z)$, cioè la trasformata Z della matrice delle risposte impulsive nello stato è $H(z)$, ovvero la trasformata Z della $H(k)$ e questo implica che la Z trasformata del prodotto di convoluzione tra $A^{k-\tau-1}$ e u è uguale a $H(z)U(z)$.

**è una proprietà generale:
la trasformata
di una convoluzione è uguale
al prodotto delle trasformate**

La sommatoria di convoluzione, nel dominio delle trasformate Z, diventa il prodotto delle trasformate delle due funzioni che vengono convolute tra di loro: la risposta impulsiva nello stato $H(z)$ e l'ingresso $U(z)$.

Questo rappresenta una grande semplificazione per i calcoli in questo dominio.



Sappiamo anche trasformare

$$\mathcal{Z}(a^k) = \frac{z}{z-a}$$

e antitrasformare

$$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-a}\right) = a^k \delta_{-1}(k)$$

potenze

$\delta_{-1}(k)$ per indicare che le funzioni che trattiamo sono funzioni definite da 0 in poi, quando facciamo, in particolare, l'operazione di antitrasformata.

Le potenze sono le funzioni elementari che compaiono nel calcolo di A^k , nel calcolo della matrice delle risposte impulsive, nel calcolo della funzione di transizione e poi della trasformazione in uscita della matrice della risposta impulsiva in uscita.

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

La trasformata Z della funzione di uscita $y(k)$.

↓ \mathcal{Z} trasformata

$$\begin{aligned} Y(z) &= C(zI - A)^{-1} z x_0 + \\ &+ (C(zI - A)^{-1} B + D) U(z) \\ &= \Psi(z) x_0 + W(z) U(z) \end{aligned}$$

Questa è la matrice delle funzioni di trasferimento nel dominio complesso, che chiameremo anche, in questo caso, la

funzione di trasferimento nel dominio complesso.

~~~~~

$$X(z) = \Phi(z) x_0 + H(z) U(z)$$

Ricapitolando i calcoli nel dominio della variabile complessa abbiamo quanto riportato a lato.

$$Y(z) = \Psi(z) x_0 + W(z) U(z)$$

con:

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1} z$$

$$\Psi(z) = C \Phi(z)$$

$$H(z) = \Phi(z) / z B$$

$$W(z) = C H(z) + D$$

$W(z)$  funzione di trasferimento

**un confronto**

$$\rightarrow \Phi (s) = (sI - A)^{-1}$$

$$\rightarrow \Psi (s) = C (sI - A)^{-1}$$

$$\rightarrow H (s) = (sI - A)^{-1} B$$

$$\rightarrow W (s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$

**un confronto**

$$\rightarrow \Phi (z) = (zI - A)^{-1} z$$

$$\rightarrow \Psi (z) = C (zI - A)^{-1} z$$

$$\rightarrow H (z) = (zI - A)^{-1} B$$

$$\rightarrow W (z) = C (zI - A)^{-1} B + D$$

Un confronto con l'espressione ottenute nel calcolo della trasformata di Laplace (sistema a tempo continuo) con la trasformata Z (sistema a tempo discreto).

$\Phi (s)$  Trasformazione funzione di transizione

$\Psi (s)$  Trasformazione in uscita

$H (s)$

$W (s)$



# Analisi nel dominio della variabile complessa

- il calcolo delle soluzioni
- la struttura

È possibile calcolare la risposta nello stato ed in uscita facendo i calcoli nel dominio complesso

## Calcolo delle soluzioni

(A, B, C, D, x<sub>0</sub>)

$$X_1(z) = \Phi(z) x_0 = (zI - A)^{-1} z x_0$$



$$x_1(k)$$

$$Y_1(z) = \Psi(z) x_0 = C \Phi(z) x_0$$



$$y_1(k)$$

Per il calcolo delle soluzioni si parte dalle matrici A, B, C, D e dallo stato iniziale x<sub>0</sub>.

Si calcola X<sub>1</sub>(z), l'evoluzione libera, poi possiamo antitrasformare per ottenere x<sub>1</sub>(k).

Si calcola Y<sub>1</sub>(z), la risposta in evoluzione libera, poi possiamo antitrasformare per ottenere y<sub>1</sub>(k).

$$u_{[0, \infty)} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad U(z)$$

$$X_f(z) = H(z) U(z) = \Phi(z) / z B U(z)$$



$$x_f(k)$$

$$Y_f(z) = W(z) U(z) = (C H(z) + D) U(z)$$



$$y_f(k)$$

Per calcolare la risposta forzata dobbiamo fare la trasformata Z dell'ingresso, X<sub>f</sub>(z), poi possiamo antitrasformare per ottenere la x<sub>f</sub>(k).

Per calcolare la risposta forzata in uscita Y<sub>f</sub>(z) facciamo delle semplici operazioni di moltiplicazione, poi possiamo antitrasformare per ottenere la y<sub>f</sub>(k).

## La struttura

$$\Phi(z)$$

è una funzione  
razionale propria

$$z^{-1} \Phi(z)$$

è una funzione razionale  
strettamente propria

$$z^{-1} \Phi(z) = (zI - A)^{-1} =$$

$$\frac{((zI - A)^a)^T}{\det(zI - A)}$$

Stesse considerazioni  
del caso tempo continuo

La struttura  $\Phi(z)$  è una funzione razionale propria, non strettamente perché lo è  $z^{-1}\Phi(z)$ , che è uguale a  $(zI - A)^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \Phi(z) / z &= (zI - A)^{-1} \\ &= \frac{((zI - A)^a)^T}{d(z)} = \text{polinomio caratteristico} \\ &= \frac{E(z)}{m(z)} = \text{polinomio minimo} \\ &\text{fattore di } d(z) \text{ che ha per zeri tutti gli autovalori} \end{aligned}$$

La funzione  $\Phi(z)$  si riconduce ad essere uguale a  $E(z)/m(z)$ .

$E(z)$  è una matrice di funzioni di variabile  $z$  complessa, che sono polinomi al più di grado inferiore di 1 rispetto al polinomio al denominatore.

Al denominatore,  $m(z)$ , non è più polinomio caratteristico ma è il polinomio minimo, che è un polinomio che ha tra i suoi zeri tutti gli zeri del polinomio  $d(z)$  ma con delle molteplicità non sempre del tutto uguali.

Quindi  $m(z)$  è un fattore che ha per zeri tutti gli autovalori, cioè tutti gli zeri di  $d(z)$ , ma con delle molteplicità diverse.

La molteplicità che compare in  $d(z)$  è detta algebrica, quella che compare in  $m(z)$  è detta geometrica.

Abbiamo studiato il caso in cui la molteplicità geometrica è uguale a 1.

**m(z) ha zeri semplici,  $\lambda$**

$$z^{-1} \Phi(z) = \sum_{i=1}^m \frac{R_i}{z - \lambda_i}$$

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^m R_i \frac{z}{z - \lambda_i}$$

$$\Phi(k) = \sum_{i=1}^m R_i \lambda_i^k$$

Quando m(z) ha zeri semplici,  $\lambda$ , non distinguendo tra reali e complessi,  $z^{-1}\Phi(z)$  può essere espansa in frazioni parziali secondo una espressione del tipo a lato.

Moltiplicando  $z^{-1}\Phi(z)$  per z, la  $\Phi(z)$  ha espressione come riportato a lato, e di conseguenza possiamo calcolare la  $\Phi(k)$  facendo l'antitrasformata dei singoli termini. Esse sono le leggi di tipo potenza che conosciamo dall'analisi nel dominio del tempo.

$$R_i \quad n \times n \quad \rho(R_i) = \mu_i$$

$R_i$  sono matrici nxn di rango pari alla molteplicità algebrica,  $\mu_i$ .

**molteplicità algebrica**

$$m = n \text{ se } \mu_i = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$m=n$  se  $\mu_i = 1$ , allora si hanno autovalori distinti.

## Evoluzione di una popolazione studentesca



$$x_1(k+1) = r_1 x_1(k) + u(k)$$

$$x_2(k+1) = (1-r_1) x_1(k) + r_2 x_2(k)$$

$$x_3(k+1) = (1-r_2) x_2(k) + r_3 x_3(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k)$$

$$r_1 = 0.3 \quad r_2 = 0.2 \quad r_3 = 0.1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 1 \quad 1)$$

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \quad A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (z-0.1)(z-0.2) & 0 & 0 \\ 0.7(z-0.1) & (z-0.1)(z-0.3) & 0 \\ 0.56 & 0.8(z-0.3) & (z-0.2)(z-0.3) \end{pmatrix}$$

$$(z-0.1)(z-0.2)(z-0.3)$$

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \frac{\begin{matrix} \mathbf{R}_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & -8 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}}{(z-0.1)} + \frac{\begin{matrix} \mathbf{R}_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ -56 & 8 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}}{(z-0.2)} + \frac{\begin{matrix} \mathbf{R}_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 28 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}}{(z-0.3)}$$

$$\Phi(k) = \mathbf{R}_1(0.1)^k + \mathbf{R}_2(0.2)^k + \mathbf{R}_3(0.3)^k$$

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} (0.3)^k & 0 & 0 \\ -7(0.2)^k + 7(0.3)^k & (0.2)^k & 0 \\ 28(0.1)^k - 56(0.2)^k + 28(0.3)^k & -8(0.1)^k & (0.1)^k \end{pmatrix}$$

### Caso di coppia di zeri complessi del polinomio minimo

$$z^{-1} \Phi(z) = \dots + \frac{R}{z - \lambda} + \frac{R^*}{z - \lambda^*} =$$

$$= \dots + \frac{R_a + jR_b}{z - \sigma e^{j\theta}} + \frac{R_a - jR_b}{z - \sigma e^{-j\theta}}$$

$$\Phi(z) = \dots + \underbrace{\frac{z(R_a + jR_b)}{z - \sigma e^{j\theta}} + \frac{z(R_a - jR_b)}{z - \sigma e^{-j\theta}}}_{} =$$

$$\frac{2R_a((z/\sigma)^2 - (z/\sigma)\cos\theta) - 2R_b(z/\sigma)\sin\theta}{(z/\sigma)^2 - 2(z/\sigma)\cos\theta + 1}$$

$$\underbrace{2R_a\sigma^k \cos\theta k}_{u_a v_a'} + \underbrace{-2R_b\sigma^k \sin\theta k}_{u_b v_b' - u_b v_a'}$$

$$u_a v_a' + u_b v_b', \quad u_a v_b' - u_b v_a'$$

Se  $U(z)$  è una  
funzione razionale



$Y_f(z)$  è una  
funzione razionale



$Y_f(z)$  può essere espansa in  
frazioni parziali



$Y_f(z)$  può essere facilmente  
antitrasformata

Se  $U(z)$ , la trasformata dell'ingresso, è una  
funzione razionale

$Y_f(z)$ , risposta forzata in uscita, ma anche  
nello stato, è una funzione razionale.

$Y_f(z)$ , può essere espansa in frazioni parziali  
e può essere facilmente antitrasformata.

$$U(z) = ?$$

→ tabelle

→ se composizione di funzioni  
semplici,

$$u(k) = \sum_i f_i(k) \quad U(z) = \sum_i F_i(z)$$

Per quanto riguarda la trasformata dell'in-  
gresso, si possono usare tabelle, le pro-  
prietà della  $U(z)$  oppure, un caso inte-  
ressante quando la funzione di ingresso  
è composizione di funzioni semplici. La  
trasformata  $Z$  sarà, in questo caso, la  
composizione delle trasformate  $Z$  delle  
singole funzioni.

$$r_1 = 0.3 \quad r_2 = 0.2 \quad r_3 = 0.1$$

Riprendiamo l'esempio precedente.

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 1 \quad 1)$$

$$W(z) = \frac{z^2 + 0.4z + 0.51}{(z-0.1)(z-0.2)(z-0.3)}$$

$W(z)$  contiene tutti gli autovalori della ma-  
trice  $A$ .

Risposta forzata a  
 $u(k) = U = 1000$

$$W(z) = \frac{z^2 + 0.4z + 0.51}{(z-0.1)(z-0.2)(z-0.3)}$$

$$y_f(k) = \dots +$$

$$y_r(k) = 3790$$

Con riferimento a questa situazione possiamo andare a calcolare la risposta forzata ad un ingresso  $u(k) = 1000$  studenti, per cui dobbiamo calcolare la risposta forzata. Dobbiamo prendere la funzione di trasferimento e la moltiplichiamo per la trasformata dell'ingresso.

$$y_f(k) = Z^{-1}(W(z)U(z))$$

$$\frac{1000 \uparrow \dots \dots 1000 \cdot \delta_1(k)}{\dots}$$

$$U(z) = 1000 \frac{z}{z-1}$$

$$Z(\lambda^k) = \frac{z}{z-\lambda}$$

$$Y_f(z) = \frac{W(z) \cdot 1000 \cdot z}{z-1}$$

residui

$$\frac{Y_f(z)}{z} = \frac{r_1}{z-0.1} + \frac{r_2}{z-0.2} + \frac{r_3}{z-0.3} + \frac{A}{z-1}$$

Calcoliamo il residuo A:

$$Y_f(z) = \frac{W(z) \cdot 1000 \cdot z}{z-1}$$

$$(z-1) \frac{Y_f(z)}{z} = \frac{r_1 \cancel{(z-1)}}{\cancel{z-0.1}} + \frac{r_2 \cancel{(z-1)}}{\cancel{z-0.2}} + \frac{r_3 \cancel{(z-1)}}{\cancel{z-0.3}} + \frac{A \cdot \cancel{(z-1)}}{\cancel{z-1}}$$

$$W(z) \Big|_{z=1} = W(1) = A$$

$$Y_z(z) = \frac{r_1 z}{z-0,1} + \dots + \frac{r_3 z}{z-0,3}$$

$$+ \frac{W(1) z}{z-1}$$

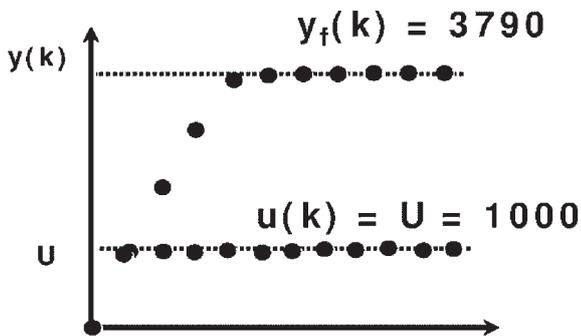
$$\downarrow z^{-1}$$

$$y_f(k) = \left( \sum_{i=1}^3 r_i \cdot p_i \cdot k + W(1) \right) u_1(k)$$

Troviamo che la risposta forzata è fatta da una parte più una parte costante

Si trova che la parte persistente ha un valore di circa 3790.

Questa è la  $W(z)$  in  $z = 1$ .



# La funzione di trasferimento

$$W(z) = C H(z) + D$$

$$H(z) = (zI - A)^{-1} B = \frac{N_h(z)}{d_h(z)}$$

$d_h(z)$  è un  
fattore di  $m(z)$  che ha per zeri gli autovalori  
associati a modi eccitabili

$$\Psi(z) = C (zI - A)^{-1} z = \frac{N_\Psi(z)}{d_\Psi(z)}$$

fattore di  $m(z)$  che ha per zeri gli autovalori  
associati a modi osservabili

$$W(z) = C H(z) + D = \dots =$$

$$\frac{N_w(z)}{d_w(z)}$$

$d_w(z)$  è:  
fattore di  $m(z)$  che ha per zeri gli autovalori  
associati a modi eccitabili ed osservabili

La funzione di trasferimento, in estrema sintesi:

→ È la trasformata zeta  
della risposta impulsiva

→ È una matrice di funzioni  
razionali proprie  
(strettamente proprie se  $D=0$ )

→ È un modello  
del comportamento forzato

→ Il polinomio a denominatore  
comune ha come zeri  
gli autovalori di  $A$  associati ai  
modi eccitabili ed osservabili

## **Ammette, al pari di $W(k)$ , un'interpretazione sperimentale ?**

La  $W(k)$  è la risposta all'ingresso impulsivo.

La  $W(s)$ , nei sistemi a tempo continuo, ovvero la trasformata della risposta impulsiva è, letta sull'asse immaginario, la rappresentazione di come vengono modificati segnali periodici che transitano attraverso il sistema quanto riguarda la risposta a regime.

□

Prof. Salvatore Monaco  
45'50"

- Introduzione
- La stabilità interna
  - Stato di equilibrio e stabilità
  - La stabilità del moto
  - Le proprietà dei sistemi lineari
- Condizioni di stabilità interna per i sistemi lineari
- Definizione e condizioni di stabilità esterna per i sistemi lineari

## Introduzione

Questa lezione è dedicata ad introdurre i principali concetti, definizioni e condizioni, della proprietà di stabilità dei sistemi dinamici.

## La stabilità

È una proprietà relativa all'effetto delle perturbazioni.

Diremo che un sistema è stabile se reagisce in modo positivo all'effetto delle perturbazioni nel senso di contenerne l'effetto.

### • Perturbazioni sulla struttura (parametri)

Le perturbazioni possono agire sulla struttura, ad esempio modificandone i parametri. In questo caso parleremo di stabilità strutturale o stabilità rispetto alle variazioni dei parametri. Un comportamento del sistema si modifica poco quando vengono modificati un poco i parametri. Quando il comportamento si modifica di poco a seguito di una piccola variazione dei parametri diremo che il sistema è strutturalmente stabile.

### • Perturbazioni sullo stato (interna)

Le perturbazioni agiscono sullo stato e in questo caso parleremo di stabilità interna. Lo studio è quello di cosa accade, rispetto all'evoluzione, quando lo stato iniziale viene un po' perturbato. L'effetto che ne risulta è contenuto se la perturbazione è contenuta?

### • Perturbazioni sull'ingresso (ingresso-uscita)

Ci chiediamo che cosa accade quando l'ingresso è perturbato.

Lo studio si rivolgerà alle perturbazioni sullo stato e sull'ingresso.

## La stabilità interna - definizioni

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

$(x_e, u_e)$  coppia di equilibrio se

$$f(x_e, u_e) = 0$$

dallo stato iniziale  $x_e$ , con ingresso costante  $u_e$ , lo stato resta in  $x_e$ .

**Cosa accade se lo stato iniziale viene perturbato?**

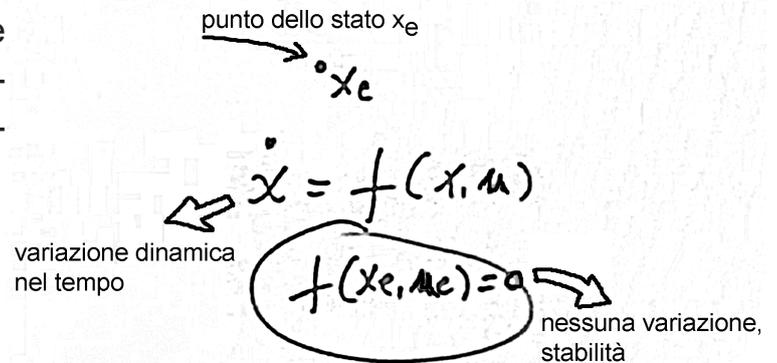
una coppia di equilibrio.

Questo è vero se è soddisfatta la condizione  $f(x_e, u_e) = 0$ .

Quando siamo nello stato  $x_e$ , quello che rappresenta  $\dot{x}$  è la variazione rispetto al tempo, ovvero la direzione verso la quale avviene uno spostamento al crescere del tempo, quindi rappresenta la direzione nella quale lo stato  $x$  si sta spostando.

Se  $f(x_e, u_e) = 0$  allora la variazione è nulla e questo significa che l'evoluzione, quando viene applicato l'ingresso  $u_e$ , rimane ferma in  $x_e$ .

Quello che ci domandiamo è che cosa accade se lo stato iniziale viene perturbato, fermo restando l'ingresso  $u_e$ .



Prendendo ad esempio il pendolo, una condizione di equilibrio è quella in cui l'ingresso, rappresentato da una forza, è nullo, e l'angolo di riferimento delle oscillazioni è 0, ovvero il pendolo è fermo.

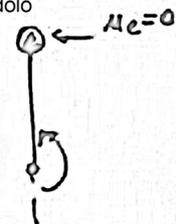
Questa è una condizione di equilibrio, la domanda che ci poniamo è che cosa accade se cambia lo stato iniziale, con uno spostamento del pendolo.

Le due condizioni di equilibrio di un pendolo



$$M_c = 0 \quad \dot{\theta} = 0$$

$$\theta_e = 0$$



$$M_c = 0 \quad \dot{\theta} = 0$$

$$\theta_e = \pi \quad (\leftarrow 2k\pi)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0$$

$(\mathbf{x}_e)$  è detto “stabile” se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon(t_0) : ||\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e|| < \delta_\varepsilon(t_0)$$



$$||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e|| < \varepsilon \quad t \geq t_0$$

“uniformemente stabile” se  $\delta_\varepsilon$  non dipende da  $t_0$

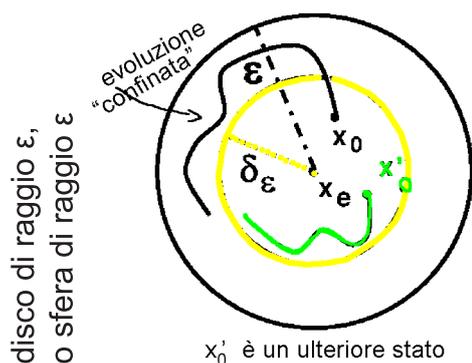
Consideriamo il caso generale, un sistema non stazionario con lo stato  $\mathbf{x}_e$  che soddisfa la condizione  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0$ .

Quindi il sistema partendo da  $\mathbf{x}_e$  rimane fermo in  $\mathbf{x}_e$ .

Lo stato  $\mathbf{x}_e$  è detto “stabile” se soddisfa la condizione riportata a lato.

Comunque preso un  $\varepsilon$  positivo, esiste un  $\delta_\varepsilon$ , che può dipendere da  $t_0$ , tale che, se lo scostamento della condizione iniziale rispetto a  $\mathbf{x}_e$ , è contenuto da  $\delta_\varepsilon$  (cioè se sono molto vicino), allora l'effetto complessivo, ovvero lo scostamento dell'evoluzione complessiva da  $\mathbf{x}_e$  è minore di  $\varepsilon$ , comunque  $\varepsilon$  sia fissato, per  $t \geq t_0$ .

Se  $\delta_\varepsilon$  non dipende da  $t_0$ , lo stato di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  si dice uniformemente stabile.



Comunque venga preso un punto entro il raggio  $\delta_\varepsilon$ , l'evoluzione corrispondente rimane confinata all'interno della circonferenza (o sfera) di raggio  $\varepsilon$ . Questo è vero per ogni  $\varepsilon$ , per il quale esisterà un  $\delta_\varepsilon$ ,

Questo significa che, comunque fissato uno scostamento massimo, esistono delle perturbazioni iniziali, eventualmente molto vicine allo stato di equilibrio, a partire dalle quali non si generano, nella

evoluzione, delle perturbazioni superiori al valore  $\varepsilon$  prefissato.

Questo corrisponde a dire che a piccole perturbazioni corrispondono piccoli effetti. Comunque si vogliono contenere le perturbazioni, esistono delle condizioni iniziali che fanno sì che l'effetto sia contenuto.

Questo non garantisce l'annullamento degli effetti, il che ci porta al concetto successivo, detto di attrattività.

$\mathbf{x}_e$  è detto “attrattivo” se

$$\exists \delta_a(t_0) : ||\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e|| < \delta_a(t_0)$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} ||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e|| = 0$$

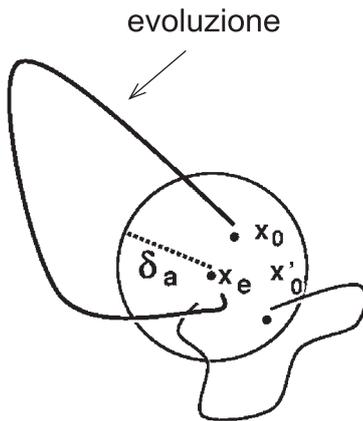
“uniformemente attrattivo” se  $\delta_a$  non dipende da  $t_0$

$\mathbf{x}_e$  è detto attrattivo se esiste un intorno  $\delta_a$  di  $\mathbf{x}_e$ , tale che se  $\mathbf{x}_0$  è all'interno di tale intorno, vale il limite riportato.

Notare, in riferimento all'espressione algebrica utilizzata, che la norma può essere considerata una distanza.

Questo vuol dire che per un tempo lungo la  $\mathbf{x}(t)$  tende ad andare sopra la  $\mathbf{x}_e$ , cioè la sua distanza tende a zero.

Se  $\delta_a$  non dipende da  $t_0$ , diremo che  $x_e$  è uniformemente attrattivo.



A lato il relativo significato in forma grafica.

Al crescere del tempo, l'evoluzione tende a tornare a  $x_e$ .

Questa è la proprietà di attrattività dello stato  $x_e$ .

$x_e$  è asintoticamente stabile se è  
stabile & attrattivo

“uniformemente” se la proprietà è  
uniforme rispetto a  $t_0$

“globalmente asintoticamente” se

$$\delta_a = \infty$$

Se il sistema è stazionario

$$\dot{x} = f(x(t))$$

le proprietà sono uniformi

$x_e$  è esponenzialmente stabile se

$$\exists a > 0, \lambda > 0: ||x_e - x_0|| < \delta$$



$$||x(t) - x_e|| \leq a \delta e^{\lambda(t-t_0)}$$

la stabilità esponenziale è un caso particolare della stabilità uniforme

Ulteriore proprietà, di stabilità esponenziale.

In sostanza, se lo stato iniziale  $x_0$  è abbastanza vicino a  $x_e$ , ed è limitato da  $\delta$ , l'evoluzione  $x(t)$  tende a  $x_e$ , essendo limitata da una funzione esponenziale. La tendenza verso lo stato  $x_e$  dell'evoluzione  $x(t)$  è limitato da una funzione esponenziale con un opportuno  $\lambda$  reale.

# Osservazioni

per la stabilità asintotica  $x_e$  deve essere isolato

e

per la stabilità asintotica globale  $x_e$  deve essere il solo stato di equilibrio (nello "spazio di stato")

Si osservi che affinché  $x_e$  abbia stabilità asintotica esso deve essere isolato.

Cioè non ci devono essere nell'intorno di  $x_e$  altri stati di equilibrio, in quanto non è detto di ritornare in  $x_e$  partendo da un qualunque punto del suo intorno (piccolo a piacere), ma si potrebbe ritornare ad un altro stato di equilibrio.

Non si può avere attrattività, se lo stato di equilibrio non è isolato.

## La stabilità interna - la stabilità del moto

$$(x_0, u_{[t_0, \infty)})$$



$$\mathcal{M} = \{ (t, x_0(t)) \text{ in } (T \times \mathbb{R}^n) \}$$

**moto**

$x_e$  definisce un particolare moto,  $(t, x_e)$ , associato a  $u_e$

Abbiamo parlato di punti di equilibrio, stati di equilibrio, stabilità degli stati di equilibrio. La stabilità del moto è una proprietà importante dei sistemi.

Il modo è una evoluzione nello stato, che si ottiene fissato uno stato iniziale e un ingresso, e i relativi istanti di tempo in cui questa evoluzione è ottenuta.

Fissati i due parametri citati, stato iniziale e ingresso, è univocamente determinato il moto, in base alla equazione differenziale che caratterizza il sistema. Il moto è caratterizzato da una coppia, gli istanti di tempo e il valore dello stato che ne consegue. Si genera in pratica una traiettoria, formata da punti;  $x_e$  definisce un particolare moto.

$(t, x_0(t))$  è stabile se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon(t_0):$$

$$\|x_{0p} - x_0\| < \delta_\varepsilon(t_0)$$

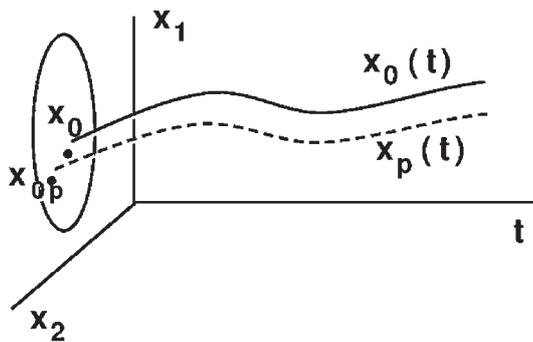


$$\|x_p(t) - x_0(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Il moto fissato, da  $t$  e da  $x_0$ , è detto stabile se valgono le proprietà formali riportate a lato.

Cioè, comunque preso un massimo scostamento ammissibile  $\varepsilon$ , esiste un intorno di  $x_0$  tale per cui, partendo da uno stato perturbato  $x_{0p}$ , che è abbastanza vicino a  $x_0$ , cioè la sua distanza è minore di un valore  $\delta_\varepsilon$ , l'evoluzione perturbata  $x_p(t)$  conseguente, si scosta dalla evoluzione effettiva associata al moto  $x_0(t)$ , di un valore che è inferiore a  $\varepsilon$ , per ogni  $t \geq t_0$ .

si scosta dalla evoluzione effettiva associata al moto  $x_0(t)$ , di un valore che è inferiore a  $\varepsilon$ , per ogni  $t \geq t_0$ .



Questo concetto è graficamente rappresentabile come riportato.

A partire da  $x_0$  si genera un moto, una traiettoria nello spazio  $(x, t)$ , spazio di stato  $(x_1, x_2)$  e tempo.

Partendo da uno stato perturbato  $x_{0p}$ , si nota la similitudine del moto perturbato conseguente, con il moto conseguente allo stato  $x_0$ .

Entrambi le evoluzioni soddisfano la stessa equazione differenziale.

Il moto si dice stabile se i due "tracciat" sono vicini, cioè se il moto si mantiene vicino a  $x_0(t)$ .

Lo studio della stabilità di un modo si può ricondurre allo studio della stabilità di uno stato di equilibrio.

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad (\text{un sistema})$$

$$\rightarrow \dot{x}_0(t) = f(x_0(t), u_0(t)) \quad (\text{un moto fissato})$$

$$x_{0p} \rightarrow x_p(t) \quad (\text{stato } x_{0p})$$

$$\dot{x}_p(t) = f(x_p(t), u_0(t)) \quad (\text{moto perturbato } x_p(t))$$

$$\xi(t)$$

$$x_p(t) - x_0(t)$$

$$\dot{\xi}(t) = f(x_0(t) + \xi(t), u_0(t)) - f(x_0(t), u_0(t))$$

$$\dot{\xi}(t) = g(t, \xi(t))$$

Supponiamo di avere un sistema,  $\dot{x}$ , e un moto fissato  $x_0(t)$ , che soddisfa l'equazione differenziale.

Supponiamo di partire da uno stato  $x_{0p}$ , dal quale si genera un moto perturbato  $x_p(t)$ .

Anche il moto perturbato soddisfa l'equazione  $\dot{x}$ , quindi abbiamo  $\dot{x}_p(t)$ , in cui l'ingresso è lo stesso di prima perché esso non viene perturbato.

Indicando  $\xi(t) = x_p(t) - x_0(t)$  possiamo scrivere per moto perturbato l'equazione differenziale relativa.

Tale equazione differenziale soddisfa la relazione a lato.

Questo è uno stato di equilibrio.

$$g(t, 0) = 0; \xi_e = 0.$$

$$\xi_0 = \xi(t) = 0$$

$$f(x, u) = Ax + Bu$$

$$\dot{\xi}(t) = A x_p + \cancel{Bu_0}$$

$$- A x_0 + \cancel{Bu_0}$$

$$\dot{\xi}(t) = A \xi(t)$$

$$\xi(0) = 0 \quad (\text{è uno stato di equilibrio})$$

In un sistema lineare la stabilità di un qualsiasi moto si riconduce alla stabilità dell'origine dello stesso sistema.

Si ottiene lo stesso sistema senza la  $u$ .

---

## La stabilità interna le proprietà dei sistemi lineari

La stabilità interna - le proprietà

$$\dot{x} = Ax$$

→ Stati di equilibrio

$$Ax_e = 0$$

→ La stabilità di uno stato di equilibrio è equivalente a quella dell'origine

→ La proprietà di attrattività se vale è globale

È dato un sistema lineare stazionario.

Tutti gli stati di equilibrio sono quelli che soddisfano l'equazione  $Ax_e = 0$ .

Sono gli stati che stanno nel nullo della matrice  $A$ . Sono un sottospazio dello spazio di stato.

L'origine dello spazio di stato è  $x_e = 0$ , ed è sempre uno stato di equilibrio, ma non è necessariamente il solo, ce ne possono essere altri, soprattutto, e solo, quelli

che stanno nel nullo della matrice  $A$ , e vengono proiettati nello 0 dello spazio di stato.

Abbiamo due proprietà, la prima è che la stabilità di uno stato di equilibrio è equivalente a quella dell'origine. Per verificare questa proprietà, si deve scrivere la definizione di stabilità di un generico stato di equilibrio, poi si effettua una traslazione di coordinate mettendosi nello stato  $x_e$ , poi si verifica che questo conduce alla stabilità.



$$x_e(t) = \phi(t) x_0$$

$$\|x_0\| < \delta_a$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_e(t)\| = 0$$

$k x_0$   
 $\downarrow$   
 $k x_e(t)$   
 tende a 0

Abbiamo una seconda proprietà per cui la proprietà di attrattività, se vale, è globale.

Questa proprietà è verificabile se, partendo da un intorno di  $x_0$ , le evoluzioni, al crescere del tempo, tendono sullo stesso stato

$$x(k+1) = A x(k)$$

Nel caso dei sistemi a tempo discreto, valgono le stesse considerazioni.

→ Stati di equilibrio

$$A x_e = x_e$$

Gli stati di equilibrio sono quelli che stanno nel nullo della matrice  $A - I$ .

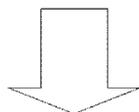
→ La stabilità di uno stato di equilibrio è equivalente a quella dell'origine

Lo stato  $x_e = 0$  è sempre uno stato di equilibrio.

→ La proprietà di attrattività se vale è globale

n.b.:

IN SOSTANZA



→ Lo studio della stabilità interna si riduce allo studio della stabilità dell'origine

→ La stabilità interna implica la stabilità di tutti i moti

Stabilità nel tempo continuo

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$f(x_e, u_e) = 0$$

$x_e$  si rimane in  $x_e$

Stabilità nel tempo discreto

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

$$f(x_e, u_e) = x_e$$

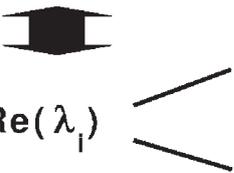
$x_e$  si rimane in  $x_e$

# La stabilità interna dei sistemi lineari condizioni

## Sistemi a tempo continuo

$x_e = 0$  è stabile se e solo se

$$\|\phi(t)\| \leq k$$



$$\begin{aligned} \text{Re}(\lambda_i) &\leq 0 \text{ se } m'_g = 1 \\ &< 0 \text{ se } m'_g > 1 \end{aligned}$$

$m'_g$  è la molteplicità geometrica

Si noti come la proprietà è riportata sugli autovalori.

$x_e$  è asintoticamente stabile se e solo se

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0$$

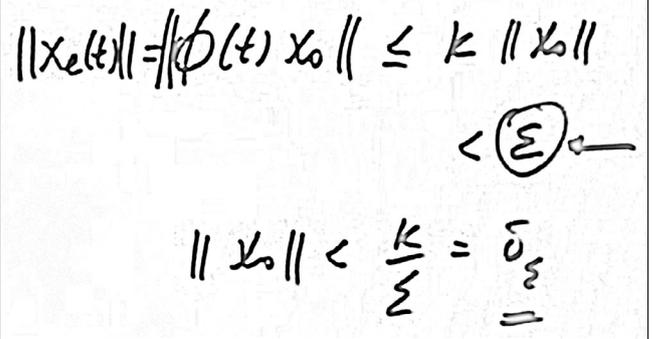
→ la stabilità asintotica è globale ed anche esponenziale nel caso lineare

## Stabilità interna - le condizioni

### Sistemi a tempo continuo

$x_e = 0$  è stabile se solo se la norma della matrice della risposta impulsiva è minore o uguale di  $k$ . È una condizione sufficiente.

Questo fa sì che le evoluzioni rimangano limitate.



$$\begin{aligned} \|x_e(t)\| = \|\phi(t) x_0\| &\leq k \|x_0\| \\ &< \epsilon \leftarrow \\ \|x_0\| &< \frac{k}{\epsilon} = \frac{\delta}{\epsilon} \end{aligned}$$

$\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , in questo caso, non solo la norma è limitata, ma si ha anche l'evoluzione a zero al crescere del tempo di tutti quanti i termini della matrice delle risposte. Questo significa che lo stato  $x_0$  ritorna allo stato 0.

## Sistemi a tempo discreto

$x_e = 0$  è stabile se e solo se

$$\|\phi(k)\| \leq K$$



$|\lambda_i|$

$\leq 1$  se  $m'_g = 1$

$< 1$  se  $m'_g > 1$

$m'_g$  è la molteplicità geometrica

Per i sistemi a tempo discreto le considerazioni sono analoghe.

Ma questa volta, quello che conta, è il modulo dell'autovalore.

Queste condizioni, così come per i sistemi a tempo continuo, garantiscono che le leggi di moto che caratterizzano  $A^k$ , al crescere del tempo, siano comunque limitate.

$x_e$  è asintoticamente stabile se e solo se

$$|\lambda_i| < 1$$

→ la stabilità asintotica è globale ed anche esponenziale nel caso lineare

# La stabilità esterna definizioni e condizioni per i sistemi lineari

La stabilità esterna - condizioni e definizioni

**S** è stabile esternamente in qualsiasi stato se, comunque fissato  $x_0$  ed un ingresso,

$$||u(t)|| < M \exists N_M(x_0):$$

$$||y(t)|| < N_M(x_0) \quad \forall t \geq t_0$$

**S** è stabile esternamente nello stato zero se, la proprietà sussiste in  $x_0 = 0$ .

(proprietà "BIBO", Bounded Input - Bounded Output)

La condizione che soddisfa la stabilità vuol dire che se l'ingresso è limitato allora esiste un numero che può dipendere da  $M$  e da  $x_0$  tale che l'uscita è limitata da questo numero, per ogni  $t \geq t_0$ .

In sostanza questa condizione dice che il sistema  $S$  è stabile esternamente in qualsiasi stato se, comunque venga fissato lo stato iniziale  $x_0$ , ad un ingresso limitato corrisponde una uscita limitata.

La limitazione è condizionata dallo stato iniziale  $x_0$ .

$$\exists k_1, k_2 > 0:$$

$$1 \quad \int_0^{\infty} ||W(t)|| dt < k_1$$

$$2 \quad ||\psi(t)|| < k_2 \quad \forall t$$

sono condizioni necessarie e sufficienti di stabilità esterna in ogni stato

La 1. è condizione necessaria e sufficiente di stabilità esterna nello stato zero

A lato le condizioni perché questo accada.

La prima condizione dice che l'integrale della norma della matrice delle risposte impulsive, tra zero e infinito, deve essere limitato.

La seconda dice che la funzione di trasformazione in uscita, in norma, sia limitata per ogni  $t$ .

Queste due condizioni sono necessari e sufficienti per la stabilità esterna in ogni stato.

La prima condizione è necessaria e sufficiente per la stabilità esterna nello stato zero.

$$\begin{array}{l}
 1 \quad \longleftrightarrow \quad \text{Re}(\lambda_i^{e,o}) < 0 \\
 \quad \quad \quad \boxed{\text{poli di } W(s)} \\
 \\
 2 \quad \longleftrightarrow \quad \text{Re}(\lambda_i^o) \begin{cases} \leq 0 & \text{se } m'_g = 1 \\ < 0 & \text{se } m'_g > 1 \end{cases} \\
 \quad \quad \quad \boxed{\text{poli di } \Psi(s)}
 \end{array}$$

Le due condizioni sopra sono equivalenti alle seguenti due: la prima al fatto che la parte reale degli autovalori che sono simultaneamente eccitabili (e) e osservabili (o), che sono quelle che caratterizzano la  $W(t)$ , sia strettamente negativa. Cioè che i poli della  $W(s)$  siano a parte reale strettamente negativa, per il fatto di avere un ingresso limitato

di un'uscita limitata nello stato zero.

La seconda ha fatto che la parte reale degli autovalori associati ai modi osservabili devono avere la parte reale di un certo valore strettamente o non strettamente minore di zero in funzione della molteplicità geometrica. Questo equivale a richiedere che i poli della  $\Psi(s)$ , cioè gli zeri del polinomio minimo comune multiplo a denominatore della  $\Psi(s)$ , cioè della trasformata di Laplace della funzione di trasformazione in uscita, abbia tutti quanti parte reale negativa.

Condizioni analoghe possono essere formulate nel caso dei sistemi a tempo discreto portando alle condizioni che il modulo degli autovalori associati ai modi eccitabili e osservabili sia minore di uno per la prima condizione.

Per la seconda condizione considerazioni analoghe sul modulo.

□

Prof. Salvatore Monaco  
48'23"

- Introduzione
- Sistemi a tempo continuo: condizioni di stabilità e stabilità asintotica: sistemi a tempo continuo
  - Criterio di Routh (consente di verificare se sono soddisfatte le condizioni di stabilità)
  - Criterio di Routh: casi singolari
  - Estensioni del criterio di Routh
- Sistemi a tempo discreto: condizioni di stabilità e stabilità asintotica: sistemi a tempo discreto
  - Il metodo della trasformazione bilineare
  - Il criterio di Jury
- Lo studio della stabilità mediante approssimazione lineare

### Introduzione

Abbiamo visto nell'analisi dei sistemi dinamici, in particolare di quelli lineari, che una discriminante sul comportamento del sistema è, di fatto, caratterizzata dalla parte reale degli autovalori nel caso dei sistemi a tempo continuo, del modulo degli autovalori nel caso dei sistemi a tempo discreto.

Nella scorsa lezione è stato chiarito che questa discriminante, che consiste nel fatto che le evoluzioni libere tendono a zero se gli autovalori hanno parte reale negativa oppure se il modulo è minore di uno, oppure rimangono limitate se ci sono degli autovalori a molteplicità unitaria che hanno o parte reale nulla o modulo uguale a uno, è la proprietà di stabilità.

Vedremo in questa lezione in modo più approfondito quali sono i criteri per lo studio della stabilità dei sistemi lineari.

Condizioni di stabilità e stabilità asintotica per sistemi a tempo continuo

### Condizione di stabilità interna semplice

$\text{Re}(\lambda_k) \leq 0$  se  $\lambda_k$  ha molteplicità geometrica unitaria

$\text{Re}(\lambda_k) < 0$  altrimenti

**stabilità interna asintotica**

$\text{Re}(\lambda_k) < 0$

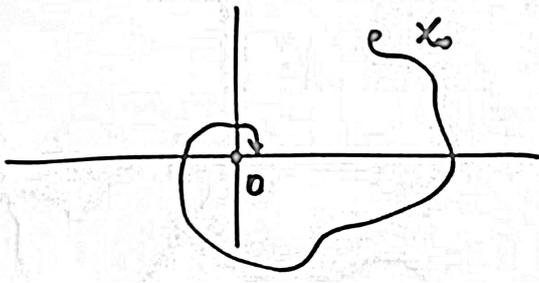
Condizione di stabilità interna semplice

È la proprietà in base alla quale l'evoluzione libera si mantiene limitata.

La parte reale degli autovalori deve essere negativa o nulla (per autovalori a molteplicità geometrica unitaria) oppure strettamente negativa (altrimenti).

Le leggi di moto sono del tipo:  $c e^{\lambda_k t}$  oppure  $p(t) e^{\lambda_k t}$

La condizione per stabilità interna asintotica è che gli autovalori abbiano parte reale strettamente negativa. In questo caso le leggi di moto tendono a zero all'aumentare del tempo.



Questo ci garantisce che, nello spazio di stato, comunque io prenda uno stato iniziale è diverso da zero, l'evoluzione si mantiene limitata e alla fine, per autovalori a parte reale strettamente negativa, tende a ritornare sullo zero.

## Condizioni di stabilità esterna

**1**  $\iff \text{Re}(\lambda_i^{e,0}) < 0$

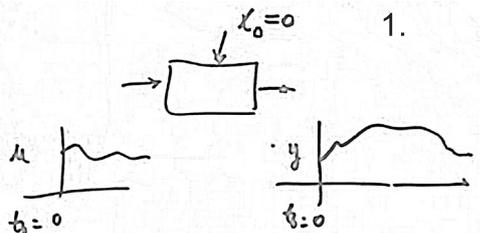
poli di  $W(s)$

**2**  $\iff \text{Re}(\lambda_i^o) \begin{cases} \leq 0 & \text{se } m'_g = 1 \\ < 0 & \text{se } m'_g > 1 \end{cases}$

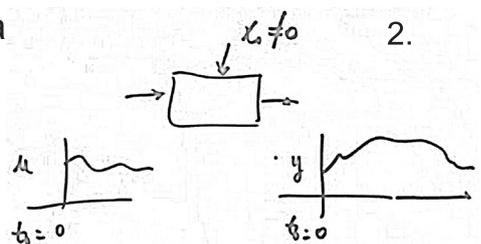
poli di  $\Psi(s)$

1. Gli autovalori associabili ai modi eccitabili ed osservabili, cioè sono quei numeri che coincidono con i poli della funzione di trasferimento  $W(s)$ , che hanno parte reale strettamente negativa corrispondono a sistemi nei quali ad un ingresso limitato corrisponde una uscita limitata, partendo da uno stato 0.

2. Partendo da uno stato non zero, deve essere soddisfatta anche la per cui gli autovalori associabili ai modi osservabili devono avere parte reale negativa se la molteplicità geometrica è uguale a 1, oppure devono avere parte reale strettamente negativa se la molteplicità geometrica è maggiore di 1. In questo caso facciamo riferimento ai poli della  $\Psi(s)$ , la trasformata di Laplace della funzione di trasformazione in uscita.



Questo equivale a dire che per ogni stato iniziale a ingresso limitato corrisponde una uscita limitata.



La proprietà di stabilità interna asintotica è la proprietà che implica tutte le proprietà di stabilità.

Questo significa andare ad indagare come è fatta la parte reale degli autovalori.

$$d(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$$

Fare questo per via analitica non è facile.

Lo è se il sistema ha dimensione due o tre.

Sistemi dinamici, ad esempio, di traffico rete possono avere dimensione anche 40.

$\lambda_1$   
|  
 $\lambda_n$

$n > 3 \implies \lambda$  non sono calcolabili

# **È possibile avere informazioni sulla parte reale delle radici senza doverle calcolare?**

**assegnato:**

$$d(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

**una condizione necessaria affinché tutte le radici di  $d(\lambda)$  siano a parte reale negativa è che tutti i coefficienti  $a_i$  abbiano lo stesso segno**

Dunque ci chiediamo se è possibile avere informazioni sulla parte reale delle radici senza doverle calcolare.

Come condizione preliminare abbiamo che, assegnato un polinomio di grado  $n$ , una condizione necessaria affinché tutte le radici di  $d(\lambda)$  sia una parte reale negativa è che tutti i coefficienti  $a_i$  abbiano lo stesso segno.

Per convenzione il coefficiente di grado maggiore si fa essere 1.

## **Il criterio di Routh**

### **Estensione del Criterio di Cartesio**

#### **Costruzione di una tabella e verifica dei segni di alcuni coefficienti**

**assegnato:**

$$d(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

**il criterio consente di stabilire: se tutte hanno parte reale negativa; quante, eventualmente, sono quelle a parte reale positiva**

### **Il criterio di Routh**

Può essere pensato come l'estensione del criterio di Cartesio che è una regola mnemonica su equazioni di secondo grado secondo cui gli zeri di un polinomio di secondo grado si possono andare a vedere tra le variazioni di segno dei coefficienti.

Ad ogni variazione corrisponde uno zero a parte reale positiva, ad ogni permanenza corrisponde uno zero a parte reale negativa. Ad esempio in  $\lambda^2 - \lambda + 1$  ci sono due variazioni, quindi avremo due zeri a parte reale positiva. L'estensione del criterio consiste nella costruzione di una tabella e nella verifica dei segni di alcuni coefficienti.

Ha segnato un polinomio di grado  $n$  il criterio consente di stabilire se tutte le radici hanno parte reale negativa

$$d(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$\begin{array}{l|llll} n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ n-2 & b_{n-2} & & & \end{array}$$

$$b_{n-2} = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

e quante, eventualmente, sono quella parte reale positiva.

Se l'applicazione del criterio va a buon fine, si può dire che tutte hanno parte reale negativa oppure quante sono quelle a parte reale positiva.

Di seguito la costruzione della tabella.

$$\begin{array}{l|llll} n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ n-2 & b_{n-2} & b_{n-3} & & \end{array}$$

$$b_{n-3} = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$\begin{array}{l|llll} n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ n-2 & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots \\ n-3 & c_{n-3} & & & \end{array}$$

$$c_{n-3} = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-3} \end{vmatrix}}{b_{n-2}}$$

$$d(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$\begin{array}{l|llll} n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ n-2 & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots \\ n-3 & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots & \end{array}$$

$$c_{n-4} = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}}{b_{n-2}}$$

Di seguito un esempio:

$$d(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda + 4$$

|   |       |     |   |
|---|-------|-----|---|
| 5 | 1     | 2   | 2 |
| 4 | 3     | -2  | 4 |
| 3 | 8/3   | 2/3 | 0 |
| 2 | -11/4 | 4   |   |
| 1 | 75/11 |     |   |
| 0 | 16    |     |   |

vuoto = 0

Il risultato non cambia se si moltiplicano le righe per un numero positivo

$$d(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda + 4$$

|   |        |     |   |
|---|--------|-----|---|
| 5 | 1      | 2   | 2 |
| 4 | 3      | -2  | 4 |
| 3 | 8/3    | 2/3 | 0 |
| 3 | 8      | 2   | 0 |
| 2 | -11/4  | 4   |   |
| 2 | -11    | 16  |   |
| 1 | 150/11 |     |   |
| 0 | 16     |     |   |

→ Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici abbiano parte reale negativa è che non vi siano variazioni di segno tra i coefficienti della 1ª colonna

Con questa condizione si stabilisce se le tutte radici hanno parte reale negativa.

→ Il numero di variazioni di segno è uguale al numero di radici a parte reale positiva

Con questa condizione si stabilisce il numero di radici a parte reale positiva.

$$d(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda + 4$$

|   |        |    |   |
|---|--------|----|---|
| 5 | 1      | 2  | 2 |
| 4 | 3      | -2 | 4 |
| 3 | 8      | 2  | 0 |
| 2 | -11    | 16 |   |
| 1 | 150/11 |    |   |
| 0 | 16     |    |   |

$$\lambda_1 = -1.36$$

$$\lambda_{2,3} = -1.5 \pm 0.75 j$$

$$\lambda_{4,5} = 0.68 \pm 0.76 j$$

due variazioni di segno =  
due radici a parte reale positiva

L'analisi con il criterio di Routh ci permette di trarre delle conclusioni, riportate a lato.

Sono inoltre riportate le radici stesse.

## Casi singolari

- 1) si annulla il primo elemento di una riga
- 2) si annulla tutta una riga

### 1° caso singolare

$$d(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 3$$

|   |    |   |   |                                   |
|---|----|---|---|-----------------------------------|
| 4 | 1  | 2 | 3 |                                   |
| 3 | 2  | 4 |   |                                   |
| 2 | 0  | 3 |   |                                   |
| 2 | -3 | 3 |   | = sommato -3 0                    |
| 1 | 6  |   |   | 2 variazioni di segno             |
| 0 | 3  |   |   | = 2 radici a parte reale positiva |

### 2° caso singolare

$$d(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda)$$

$d_2(\lambda)$  ha grado pari con sole potenze di ordine pari

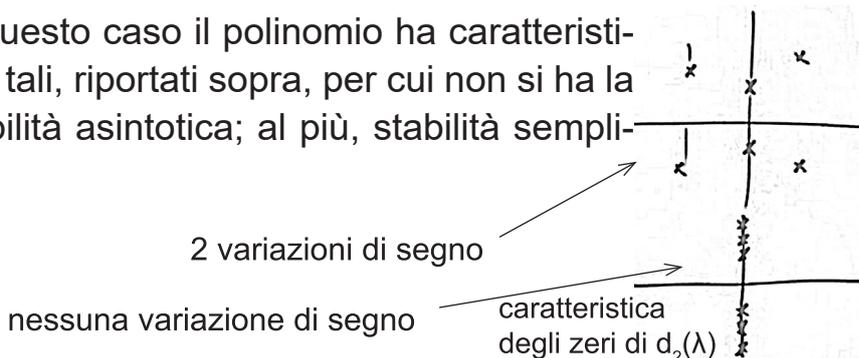
gli zeri di  $d_2(\lambda)$  hanno simmetria quadrantale

non si ha stabilità asintotica; al più, stabilità semplice.

devono essere proporzionali le precedenti due righe. Una riga viene determinata calcolando determinanti di ordine 2.

Si sostituisce la riga che si annulla utilizzando i coefficienti del polinomio della riga di ordine pari precedente ad essa, derivato.

In questo caso il polinomio ha caratteristiche tali, riportati sopra, per cui non si ha la stabilità asintotica; al più, stabilità semplice.



## Casi singolari

La tabella non sempre si può costruire fino in fondo a causa di casi critici. I casi singolari sono due, il primo quando si annulla il primo elemento di una riga, il secondo quando si annulla tutta una riga.

### 1° caso singolare

Il primo caso singolare è quando si annulla il primo elemento di una riga.

Per ovviare a questo problema si somma alla riga che si annulla, la riga ottenuta traslando a sinistra la riga che si è annullata in modo da eliminare gli zeri, eventualmente cambiando il segno se il numero di traslazioni fatte è dispari.

### 2° caso singolare

Il secondo caso singolare si ha quando si annullano tutti gli elementi di una riga

La riga che si annulla è necessariamente una riga di ordine dispari, questo perché

|          |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|
| $d_1(x)$ | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 7        | 2 | 4 | 2 | 2 |
| 6        | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5        |   |   |   |   |

$$d(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda)$$

$$2\lambda^6 + 4\lambda^4 + 2\lambda^2 + 2$$

|    |    |   |   |   |
|----|----|---|---|---|
| 6  | 1  | 2 | 1 | 1 |
| 2  | 4  | 2 | 2 | 2 |
| 0  | 0  | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 16 | 4 | 4 | 4 |
| 3  | 4  | 1 | 1 | 1 |

$$2\lambda^6 + 4\lambda^4 + 2\lambda^2 + 2$$

$$\downarrow \frac{d}{d\lambda}$$

$$12\lambda^5 + 16\lambda^3 + 4\lambda$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$d(\lambda) \rightarrow d(\lambda+a)$$

verifica se le radici di  $d(\lambda)$  hanno parte reale minore di  $a$

$$d(\lambda) \rightarrow d(\lambda e^{j\theta}) d(\lambda e^{-j\theta})$$

verifica se le radici di  $d(\lambda)$  sono nel cono di angolo  $(2\theta, -2\theta)$  e asse negativo

~~~~~

Condizioni di stabilità e stabilità asintotica per sistemi a tempo discreto

Condizioni di stabilità e stabilità asintotica per sistemi a tempo discreto

stabilità interna semplice:

$|\lambda_k| \leq 1$ se λ_k ha molteplicità geometrica unitaria

$|\lambda_k| < 1$ altrimenti

stabilità interna asintotica:

$$|\lambda_k| < 1$$

È possibile avere informazioni sul modulo delle radici senza calcolarle?

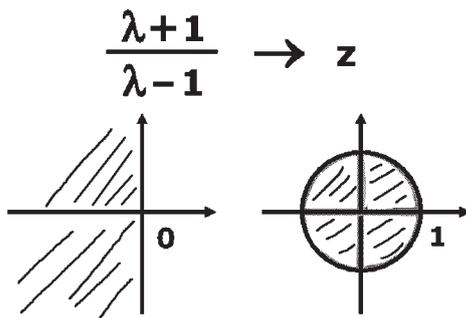
È possibile avere informazioni sul modulo delle radici senza calcolarle?

Abbiamo due possibilità di trasformazione bilineare o il criterio di Jury.

La trasformazione bilineare

La trasformazione bilineare

$$d(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$



Dato un polinomio, riportato nella variabile z per indicare che abbiamo a che fare con un sistema tempo discreto, si effettua la sostituzione come riportata a lato.

Fare questo significa fare una trasformazione che fa corrispondere al cerchio unitario il semipiano a parte reale negativa.

tiva.

Si ottiene un polinomio in λ , al quale si applica il criterio di Routh, per cui il numero di variazioni sulla prima colonna darà il numero di zeri che hanno parte reale maggiore di zero per il polinomio in λ , che hanno modulo maggiore di uno per il polinomio in z .

Si può dunque studiare la stabilità di un sistema a tempo discreto, si può studiare il modulo gli zeri di un polinomio utilizzando criteri di Routh a seguito della trasformazione bilineare.

Il criterio di Jury

Il criterio di Jury

$$d(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_n$$

$$a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_0$$

$$b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}$$

$$b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad \dots \quad b_0$$

$$c_0 \quad \dots \quad c_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$t_0 \quad t_1 \quad t_2$$

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} \\ a_n & a_{n-k-1} \end{vmatrix}$$

Si deve ad un matematico degli anni 50. Si basa sulla costruzione di una tabella e nella verifica del segno di certi coefficienti.

Le prime due righe sono i coefficienti del polinomio per la prima e i coefficienti invertiti del polinomio per la seconda.

I successivi elementi vengono calcolati secondo una regola che consiste nell'andare a calcolare gli elementi delle due righe precedenti.

Si definisce il numero di elementi nella riga fino all'ultima riga che ne contiene tre.

Condizioni necessarie e sufficienti affinché tutte le radici abbiano modulo minore di 1:

$$d(1) > 0$$

$$(-1)^n d(-1) > 0$$

$$|a_n| > |a_0|$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|$$

$$\vdots$$

$$|t_0| > |t_2|$$

Costruita la tabella, si fa un'analisi, come riportata a lato e se ne trae le conclusioni.

Studio della stabilità mediante approssimazione lineare

Studio della stabilità mediante
approssimazione lineare

Il caso dei sistemi a tempo continuo

Il caso dei sistemi a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) = \mathbf{0}$$

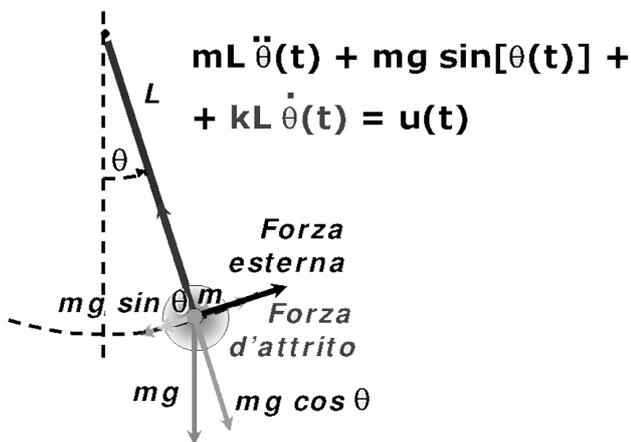
$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_e) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$$

l'approssimazione lineare:

$$\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} = \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_e)$$

A è la matrice jacobiana
della funzione f, calcolata in \mathbf{x}_e



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ mL \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = (1 \ 0) \mathbf{x}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{J}(\mathbf{x}_e) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{M} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{M} \end{bmatrix} \\
 \\
 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{mL} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Due situazioni di equilibrio.

B è la matrice degli ingressi

$$\begin{array}{ccc}
 \text{AL} & \leftarrow & \text{SNL} \\
 \dot{\xi} = \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_e) \xi & & \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})
 \end{array}$$

SNL, un sistema non lineare;
AL, l'approssimazione lineare

$|\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_e)| \neq 0$ \Rightarrow \mathbf{x}_e è uno stato di equilibrio isolato
determinante del Jacobiano

stab. asintotica di $\xi=0$ \Rightarrow stab. asintotica locale di \mathbf{x}_e
 $\sigma[\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_e)] \subset \mathbb{C}^-$

instabilità di $\xi=0$ dovuta ad un autovalore a parte reale positiva \Rightarrow \mathbf{x}_e è instabile

$$\sigma[\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_e)] \cap \mathbb{C}^+ \neq \emptyset$$

$$\begin{array}{l}
 \sigma[\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_e)] \cap \mathbb{C}^+ = \emptyset \\
 \& \\
 \sigma[\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_e)] \cap \text{Im} \neq \emptyset
 \end{array}
 \Rightarrow \mathbf{x}_e \text{ è... ?}$$

Il caso dei sistemi a tempo discreto

$$x(k+1) = \bar{f}(x(k), u(k))$$

$$f(x_e, u_e) = x_e$$

$$x(k+1) = \bar{f}(x(k), u_e) = f(x(k))$$

$$f(x_e) = x_e$$

l'approssimazione lineare

$$\xi = x - x_e$$

$$\xi(k+1) = A\xi(k) \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e} = J_f(x_e)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{AL} & \leftarrow & \text{SNL} \\ \xi(k+1) = J_f(x_e) \xi & & x(k+1) = f(x) \end{array}$$

$$|J_f(x_e)| \neq 0 \Rightarrow x_e \text{ è uno stato di equilibrio isolato}$$

$$\text{stab. asintotica di } \xi=0 \Rightarrow \text{stab. asintotica locale di } x_e$$

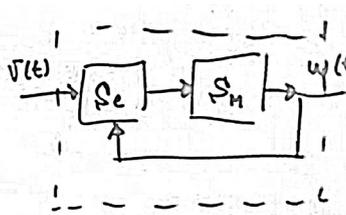
$$\text{instabilità di } \xi=0 \text{ dovuta ad un autovalore a modulo maggiore di uno} \Rightarrow x_e \text{ è instabile}$$

$$\text{autovalori con modulo minore o uguale ad uno} \Rightarrow x_e \text{ è... ?}$$

□

Prof. Salvatore Monaco
39'28"

- Introduzione
- Connessioni elementari: serie, parallelo e controreazione
 - Calcolo della funzione di trasferimento
 - Connessioni elementari: calcolo del modello interno
- Connessioni elementari: proprietà
- Un esempio



Introduzione

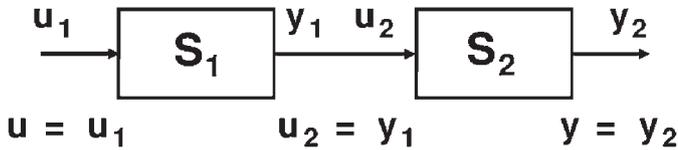
Il sistema si presenta come interconnessione di più parti, ne è un esempio un motore elettrico, composto da la parte meccanica ed una parte elettrica. Il motore è alimentato in tensione o in corrente. La parte elettrica è caratterizzata da un legame tra tensione e corrente generata; la corrente, mediante un dispositivo a induzione, genera una coppia meccanica sulla parte meccanica del motore; la dinamica della parte meccanica generava una certa velocità angolare; la velocità angolare varia a sua volta la tensione sul circuito di armatura per effetto della induzione elettromagnetica per effetto della quale si venerava una forza contro elettromotrice sulla parte elettrica, che quindi condizionava la corrente e quindi la coppia.

Si tratta di legami differenziali fra le parti.

Connessioni elementari calcolo della funzione di trasferimento

Connessioni elementari - Calcolo della funzione di trasferimento

connessione in serie



$$Y_1(s) = W_1(s) U_1(s)$$

$$Y_2(s) = W_2(s) U_2(s)$$

$$Y(s) = W_2(s) W_1(s) U(s)$$

Connessione in serie

Il primo collegamento elementare è la connessione in serie. S1 e S2 sono due sottosistemi e il collegamento in serie consiste nel collegare fra di loro l'uscita del sottosistema S1 all'ingresso del sottosistema S2. In figura il vincolo topologico rappresentato da questo tipo di collegamento. Ovviamente perché questa connessione sia possibile il sottosistema S2

deve avere tanti ingressi quanti sono le uscite del sottosistema S1 e, per ciascuno degli ingressi, ci sarà un collegamento.

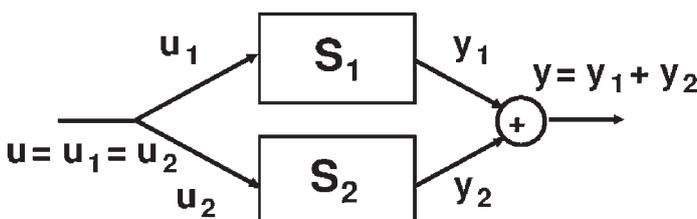
Date le funzioni di trasferimento dei singoli sottosistemi e dati i vincoli riguardanti le connessioni, la funzione di trasferimento del sistema complessivo, che lega l'ingresso esterno U del sistema complessivo alla uscita Y effettiva del sistema complessivo è $Y(s) = W_2(s)W_1(s)U(s)$.

Questo perché $Y(s) = Y_2(s) = W_2(s)U_2(s)$, $U_2(s) = Y_1(s)$, $Y_1 = W_1(s) U_1(s)$, $U(s) = U_1(s)$.

$Y(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema complessivo.

Si noti che il prodotto W_2W_1 è indifferente per sistemi con un solo ingresso ed una sola uscita, ma non lo è per sistemi che hanno più ingressi e più uscite, poiché abbiamo, in quest'ultimo caso, matrici. Infatti in quest'ultimo caso avremo la matrice della funzione di trasferimento del secondo sottosistema per la matrice della funzione di trasferimento del primo sottosistema.

connessione in parallelo



$$Y_1 = W_1 U_1 \quad Y_2 = W_2 U_2$$

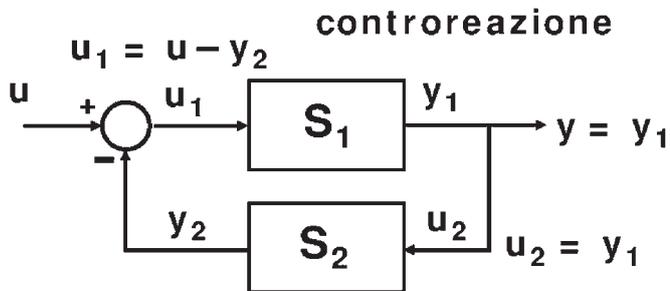
$$Y(s) = [W_1(s) + W_2(s)] U(s)$$

Connessione in parallelo

Entrambi i sottosistemi hanno lo stesso ingresso, questo è un primo vincolo imposto dal collegamento; questo impone che nei due sottosistemi il numero degli ingressi (vettore degli ingressi) sia lo stesso; l'uscita è la somma delle due uscite, e, nel caso di più uscite la somma sarà data dalla somma delle componenti.

Quindi anche il numero delle uscite dovrà essere lo stesso per i due sottosistemi. La funzione di trasferimento del sistema complessivo è la somma delle funzioni di trasferimento. Quest'operazione ha senso anche invertendo l'ordine delle matrici, per la proprietà di commutazione.

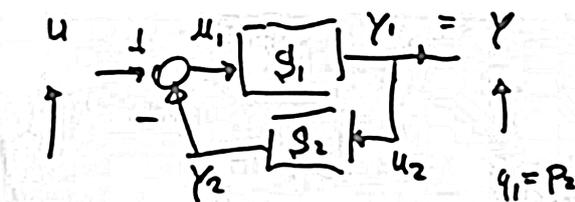
La matrice della funzione di trasferimento ha per componenti la somma delle componenti delle due matrici della funzione di trasferimento dei singoli sottosistemi.



$$Y = W_1 U_1 = W_1 (U - Y_2) = W_1 (U - W_2 Y)$$

$$Y(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} U(s)$$

1 nel caso di un solo ingresso;
I nel caso matriciale



$$Y = W_1(s) (U(s) - W_2(s) Y(s))$$

$$= W_1 U - W_1 W_2 Y = (I + W_1 W_2) Y = W_1 U$$

da cui

$$Y = \frac{W_1}{I + W_1 W_2} U$$

in quanto

$$(I + W_1 W_2) Y = W_1 U$$

$$Y = (I + W_1 W_2)^{-1} W_1 U$$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} U(s)$$

Controreazione

Anche in questo caso, quello che vogliamo calcolare, è la matrice delle funzioni di trasferimento tra l'ingresso u e l'uscita y .

Il collegamento si chiama controreazione perché il collegamento fra i due sistemi è in modo contrario rispetto al fluire usuale dei collegamenti. L'ingresso del primo sottosistema è collegato all'uscita del secondo.

Nel collegamento la parte in alto detta ramo diretto, quella in basso è detta ramo in controreazione.

I vincoli topologici di questa struttura sono che il numero di uscite del primo sottosistema deve essere uguale al numero di ingressi del secondo e il numero di ingressi del primo sottosistema deve essere uguale al numero di uscite del secondo (si scambiano).

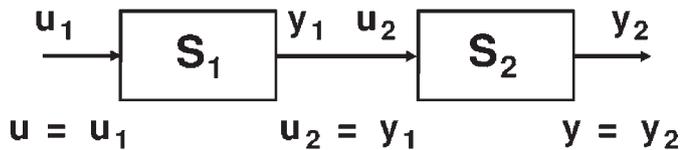
Nel caso in cui i sottosistemi abbiano più ingressi e uscite i calcoli sono effettuati con matrice, per cui, nei calcoli occorre prestare attenzione all'ordine delle matrici.

Connessioni elementari - calcolo del modello interno

Connessioni elementari -
Calcolo del modello interno

Vediamo ora nel calcolo del modello interno, ovvero la rappresentazione nello stato.

connessione in serie



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u_1 & \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_1 &= C_1 x_1 & y_2 &= C_2 x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u & u_2 &= y_1 & y &= y_2 \\ y_1 &= C_1 x_1 & \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ & & y &= C_2 x_2 \\ u &= u_1 \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

rappresentazione nello stato

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

matrice dinamica

Connessione in serie

Si suppone che i due sottosistemi siano caratterizzati dalle matrici A, B, C, con i rispettivi pedici.

Indichiamo con x_1 il vettore di stato del sottosistema S_1 e con x_2 il vettore di stato del sottosistema S_2 .

Dall'imposizione dei vincoli topologici determinati dall'architettura del collegamento, cioè $u_2 = y_1$, $y = y_2$ e $u = u_1$, otteniamo una rappresentazione x con lo stato $[x_1, x_2]$.

Tale vettore di stato x è dato dall'aggregato dei vettori di stato dei sottosistemi.

Quello che otteniamo è una rappresentazione nello stato.

Quello che possiamo dire della rappresentazione con lo stato complessivo del sistema è che riconosciamo la matrice dinamica, e gli autovalori del sistema complessivo sono gli autovalori della matrice A_1 uniti agli autovalori della matrice A_2 , cioè gli autovalori sono quelli di A_1 uniti a quelli di A_2 .

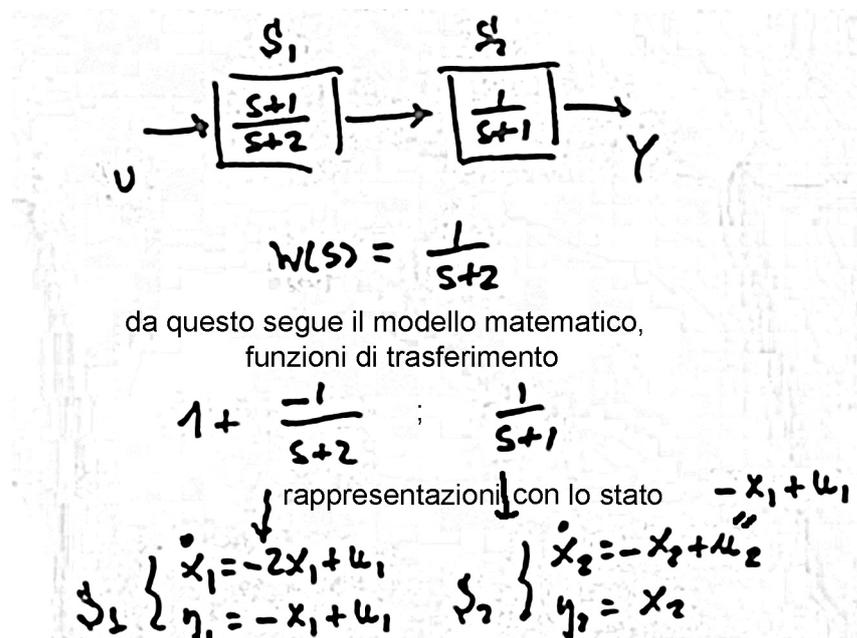
Per quanto riguarda la proprietà di stabilità del sistema possiamo dire che essa è condizionata dalle proprietà di stabilità dei sottosistemi nel senso che il sistema complessivo è stabile se e soltanto se i due sottosistemi sono stabili. È asintotica-

mente stabile se lo sono i due sottosistemi.

Quindi la proprietà del collegamento in serie, per quanto riguarda la stabilità, è connessa e si identifica alla proprietà dei due sottosistemi.

Per quanto riguarda la proprietà di osservabilità e raggiungibilità, dipende dalla matrice di osservabilità e di raggiungibilità dei due sottosistemi.

Nel collegamento in serie si può avere una perdita di raggiungibilità e questo avviene quando, ad esempio, i due sottosistemi sono caratterizzati dalle funzioni di trasferimento come in figura, da cui si ricava immediatamente la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema complessivo. Da questa si nota come ci sia una semplificazione fra lo zero di S_1 e il polo di S_2 delle rispettive funzioni di trasferimento. Facendo una rappresentazione nello stato, quello che si ottiene ha dimensione 2. Ottenuto dalla interconnessione di due sottosistemi di dimensione 1.



a questo punto si costruisce
la rappresentazione con lo stato del sistema complessivo.
si tratta di imporre che $y_1 = u_2$

Le variabili di stato della rappresentazione con lo stato
del sistema complessivo
sono l'aggregato delle due
si costruisce la coppia matrice A e la matrice B
e si verifica la proprietà di raggiungibilità

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(A, B) \rightarrow \underline{R}$$

La semplificazione algebrica, la cancellazione, fra lo zero di S_1 ed il polo di S_2 comporta una perdita di raggiungibilità del sistema complessivo.

Se la semplificazione algebrica, la cancellazione, fosse stata l'inverso, cioè fra il polo del primo sottosistema e uno zero del secondo, si avrebbe una perdita di osservabilità nel sistema complessivo.

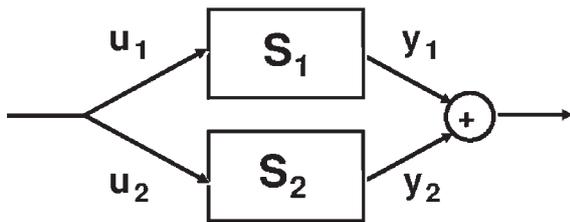
Si noti come questo fenomeno spieghi bene come la funzione di trasferimento del

sistema complessivo ha una dimensione inferiore rispetto alla dimensione dello spazio di stato.

Il numero di poli in $W(s)$ è 1, mentre lo spazio di stato ha dimensione 2. Questo comporta una perdita di raggiungibilità oppure una perdita di osservabilità nel sistema complessivo.

Si può fare anche una trasformazione di coordinate con la quale si mette in luce questo fatto.

connessione in parallelo



$$u = u_1 = u_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u$$

$$u = u_2$$

$$y_1 = C_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u$$

$$u = u_1$$

$$y_2 = C_2 x_2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x$$

$$y = y_1 + y_2$$

Connessione in parallelo

Nella connessione in parallelo abbiamo i vincoli posti dal tipo di collegamento, come riportati a fianco.

Sono mostrate le rappresentazioni con lo stato, \dot{x}_1 e \dot{x}_2 .

Il vettore di stato x è l'aggregato degli stati di due sottosistemi.

Quello che si ottiene è la rappresentazione con lo stato del sistema complessivo. La matrice dinamica ha una struttura ancora più semplice del caso precedente, in questo caso ha sulla diagonale le matrici di sottosistemi.

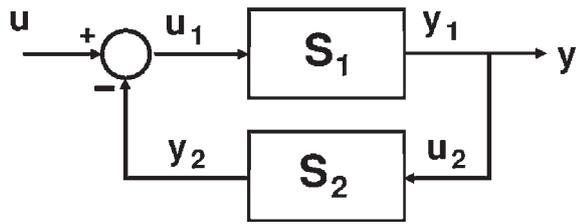
La proprietà di stabilità è legata alla proprietà di stabilità di sottosistemi.

Per quanto riguarda le eventuali perdite di raggiungibilità e osservabilità, esse sono verificabili come nel caso

precedente.

In particolare si ha una perdita di raggiungibilità o di osservabilità se si hanno dei fenomeni, in qualche modo, di cancellazione, ovvero di semplificazione algebrica, nella funzione di trasferimento del sistema complessivo.

**connessione a
controreazione**



$$u_1 = u - y_2 \quad u_2 = y_1 \quad y = y_1$$

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u - B_1 C_2 x_2 \quad u_2 = y_1$$

$$y = C_1 x_1 \quad \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1$$

$$u_1 = u - y_2 \quad y = y_1 \quad y_2 = C_2 x_2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Connessione a controreazione

Considerazioni analoghe ai casi precedenti.

Nella connessione a controreazione la proprietà di stabilità può risultare modificata, questo si nota dalla matrice dinamica. Solo in questo tipo di connessione ci può essere una modifica della proprietà di stabilità del sistema complessivo.

I sottosistemi S_1 e S_2 potrebbero essere instabili oppure potrebbero essere stabili e la proprietà del sistema complessivo potrebbe non essere mantenuta, in quanto c'è una modifica sostanziale della matrice dinamica, dipendente dai coefficienti di B_1 e C_2 .

Partendo da sistemi intrinsecamente instabili si può ottenere un sistema

complessivo stabile, così come, partendo da sistemi stabili si può ottenere un sistema complessivo instabile.

Si può perdere anche la raggiungibilità e l'osservabilità; questo si vede nel prodotto delle funzioni di trasferimento W_2 e W_1 .

Se la funzione di trasferimento del sistema complessivo ha un numero di poli inferiore alla somma di poli delle due funzioni di trasferimento (quindi c'è stata una cancellazione, una semplificazione algebrica), allora avremo una perdita di raggiungibilità oppure una perdita di osservabilità.

Viceversa la rappresentazione nello stato avrà la stessa dimensione e non ci sarà perdita né di raggiungibilità né di osservabilità.

Ricapitolando la situazione generale.

Funzioni di trasferimento W_x ; $x = \{1, 2\}$

Matrici dinamiche A_x, B_x, C_x ; $x = \{1, 2\}$

Proprietà di stabilità collegata a quella dei sottosistemi.

Raggiungibilità ed osservabilità che si può perdere. Questo si vede dal prodotto delle funzioni di trasferimento. Se la dimensione della funzione di trasferimento del sistema complessivo ha un numero di poli inferiore alla somma dei poli delle due funzioni di trasferimento (c'è stata una cancellazione), allora ci sarà una perdita di raggiungibilità o di osservabilità, come si può verificare sulla rappresentazione nello stato.

serie

$$u = u_1 \quad u_2 = y_1 \quad y = y_2$$

$$Y(s) = W_2(s) W_1(s) U(s)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} x$$

parallelo

$$u = u_1 = u_2 \quad y = y_1 + y_2$$

$$Y(s) = [W_1(s) + W_2(s)] U(s)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x$$

controreazione

$$u_1 = u - y_2 \quad u_2 = y_1 \quad y = y_1$$

$$Y(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) W_2(s)} U(s)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} x$$

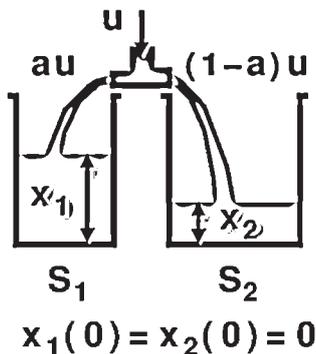
Connessioni elementari proprietà

La dimensione del sistema è pari alla somma delle dimensioni

La stabilità interna è mantenuta nella serie e nel parallelo

Riduzioni dell'ordine dei polinomi a denominatore corrispondono a perdita di raggiungibilità o osservabilità

Sistemi in parallelo: perdita di raggiungibilità



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a/s_1 \\ (1-a)/s_2 \end{bmatrix}$$

Un semplice esempio

A è la matrice dinamica

B è la matrice degli ingressi, s_1 ed s_2 sono le sezioni dei serbatoi.

$$R = \begin{bmatrix} a/s_1 & 0 \\ (1-a)/s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

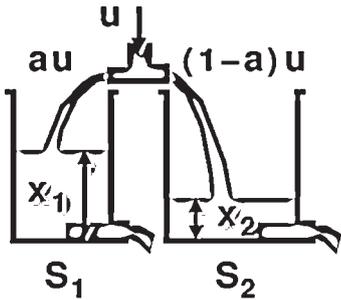
I livelli dei serbatoi cresceranno mantenendo costante nel tempo il loro rapporto:

$$x_1(t)/x_2(t) = aS_2 / [(1-a)S_1]$$

Non è possibile raggiungere qualsiasi coppia di livelli x_1 e x_2

Costruzione della matrice di raggiungibilità.

Nel caso di perdite...



$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a/S_1 \\ (1-a)/S_2 \end{pmatrix}$$

A è la matrice dinamica.

Le perdite p sono proporzionali ai livelli dei serbatoi.

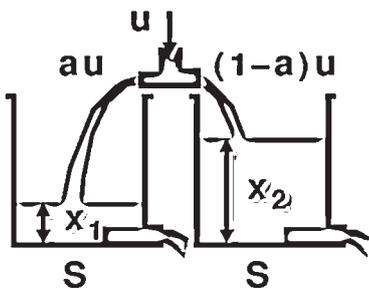
$$R = \begin{pmatrix} a/S_1 & -p_1 a/S_1 \\ (1-a)/S_2 & -p_2(1-a)/S_2 \end{pmatrix}$$

$$\det R = a(1-a)(p_1 - p_2)/(S_1 S_2)$$

È possibile raggiungere qualsiasi coppia di livelli x_1 e x_2 solo se i serbatoi si svuotano con portate diverse!

Perdita di osservabilità

Prendendo come uscita la quantità d'acqua totale: $y = S(x_1 + x_2)$



$$A = \begin{pmatrix} -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} S & S \end{pmatrix}$$

La perdita di osservabilità viene trattata prendendo come uscita la quantità di acqua totale.

$$O = \begin{pmatrix} S & S \\ -p_1 S & -p_2 S \end{pmatrix}$$

$$\det O = S^2(p_1 - p_2)$$

È possibile ricostruire dalla osservazione dell'uscita i livelli x_1 e x_2 solo se i serbatoi si svuotano con portate diverse!

□

Prof. Alberto Isidori
41'22"

- Controlli di velocità
 - Compact Disc
 - Motore elettrico

Descrizione e modellazione di alcuni sistemi di controllo automatico

Due esempi di controllo di velocità

- Lettore di compact disc
- Motore elettrico

Il controllo di velocità in un lettore di compact disc

In un lettore di compact disk ci sono due parti in movimento, un piccolo tamburo circolare che serve a mantenere il disco in rotazione e, in senso radiale, il meccanismo di lettura del disco con una lente che scorre dall'interno verso l'esterno. La lente serve per focalizzare sul disco il raggio laser che serve alla lettura del messaggio musicale. Contrariamente a quello che succede nei dischi in vinile, quella che per analogia può essere considerata l'incisione, nei compact disc parte dal centro e si evolve in una spirale verso l'esterno.

Quando il disco è in movimento, il fascio messo a fuoco dalla lente, deve focalizzarsi sul disco e seguire la traccia dell'incisione. La traccia è composta da una serie di protuberanze, in realtà sono dei piccoli buchi effettuati sulla superficie del disco dove in codice binario il buco rappresenta un uno e l'assenza rappresenta uno zero. Questa sequenza corrisponde, secondo una certa codifica, all'informazione musicale.

Il raggio laser deve rilevare la presenza di zero e di uno che, grazie ad un fotodiodo, viene trasformata in un segnale elettrico, questo viene codificato, e questo dà luogo al segnale musicale.

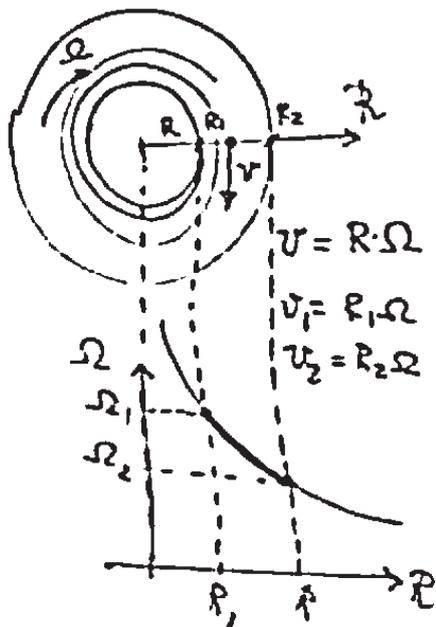
I problemi di controllo in questo sistema sono due: controllare la velocità del disco, che si deve evolvere secondo un profilo temporale prefissato, e far scorrere la lente dal centro verso la periferia. Nei dischi in vinile questo avveniva in modo meccanico, perché la puntina seguiva l'incisione.

Il problema che si pone è determinare la caratteristica della velocità del disco mantenuto in rotazione.

Lo schema relativo a questo problema è riportato a lato.

Il problema è mantenere costante la velocità tangenziale in fase di lettura perché solo in questo caso la decodificazione avviene nel modo corretto.

La velocità di un punto che si trova a una distanza R dal centro del disco è proporzionale



requisito

$$R\Omega = \text{costante}$$

alla velocità angolare (Ω) di rotazione del disco e al raggio stesso. Questa velocità dunque varia in funzione del punto in cui ci troviamo.

All'inizio, nel punto R_1 , ci sarà una certa velocità $v_1 = R_1\Omega$; alla fine, nel punto R_2 , ci sarà una certa velocità $v_2 = R_2\Omega$.

Quello che vogliamo è che in ogni punto del disco la velocità v sia costante, quindi deve essere costante il prodotto $R\Omega$ e questo rappresenta un requisito. R varia nello spostamento lungo la spirale, per cui dobbiamo anche variare conseguentemente Ω .

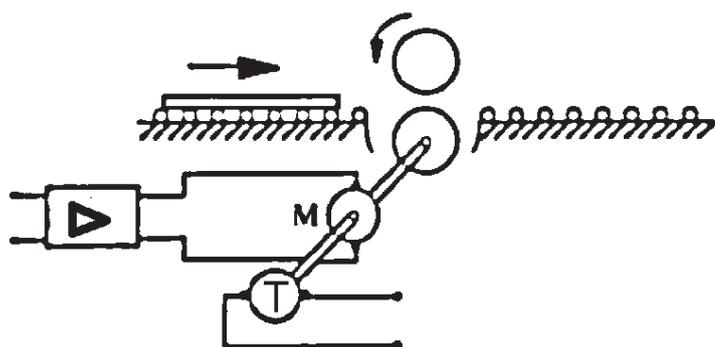
Due grandezze che stanno tra loro in un prodotto costante sono rappresentati geometricamente da una iperbole.

Quindi passiamo dal valore di Ω nel punto R_1 di inizio lettura del disco al valore di Ω nel punto R_2 di fine lettura del disco. Il profilo di velocità da seguire è un pezzo di iperbole dal valore Ω_1 al valore Ω_2 in funzione di R .

A sua volta R è in funzione del tempo perché la lente che deve mettere a fuoco il raggio laser si sposta in un tempo definito, quello della durata del compact disc, circa 60 minuti. Quindi il problema di controllo automatico presente in questo caso è quello di regolare la velocità di rotazione del disco in modo tale che la velocità segua il profilo visto prima, un andamento iperbolico decrescente in funzione del raggio.

L'andamento della velocità è una funzione ben precisa del tempo. Il controllo deve essere fatto anche con una certa accuratezza in quanto l'incisione presenta "buchi" di ampiezza $0,5 \mu\text{m}$ (micron), con "passo" di $1,6 \mu\text{m}$ (rappresenta la precisione della lente), dove per passo si intende la distanza lungo il raggio; la velocità di scansione è di $1,2 \text{ m/s}$ ($4,4 \text{ Mbit/s}$); la velocità angolare del disco varia da 200 a 500 giri/min, partendo dal valore più alto e rallentando verso il valore più basso.

Controllo della velocità di una gabbia di laminazione



In questo schema come avviene l'operazione di laminazione in un impianto di produzione dell'acciaio.

Un altoforno produce dei lingotti, che sono blocchi di metallo a temperatura molto elevata, di lunghezza 1 m , $1,5 \text{ m}$, di sezione 10 cm circa. Questi lingotti devono essere laminati in maniera tale da ridurre lo spessore fino ad ottenere dei

profilati, dei tondini, profilati piatti eccetera.

Il lingotto viene trascinato da un tappeto di rulli ed entra in quella che si chiama gabbia, con due tamburi controrotanti, la luce libera di due tamburi è leggermente più piccola dello spessore dei lingotti, che, passando attraverso la gabbia, subiscono una riduzione di spessore.

Questa operazione avviene attraverso gabbie fino ad ottenere uno spessore desiderato.

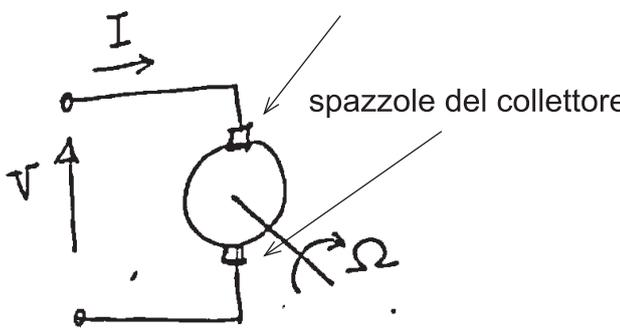
Il problema di controllo automatico che si pone nella gabbia di laminazione è quello di assicurare che la velocità di rotazione dei due tamburi della gabbia rimanga al più possibile costante durante il transito del lingotto.

Per mantenere costante la velocità c'è normalmente un grosso motore elettrico, con potenze elevate, dell'ordine di un centinaio di KW. Il motore viene alimentato da un opportuno dispositivo, che può essere a sua volta un generatore elettrico. Sullo stesso asse del motore che trascina la gabbia, eventualmente con opportuni ingranaggi di riduzione, c'è un dispositivo che deve misurare la velocità del motore.

Qui viene applicato il paradigma del controllo a retroazione, per cui se si vuole controllare la grandezza, la prima cosa da fare è misurarla, poi utilizzare la misura per sviluppare l'azione di controllo.

Nel caso del laminatoio occorre disporre di un tachimetro, che molte volte una piccola dinamo; il risultato della misura deve essere manipolato per ottenere una grandezza atta ad azionare il sistema, ovvero a comandare il nostro amplificatore.

Questa è una descrizione reale del sistema fisico, anche se schematizzata.



L'attuale obiettivo è quello di descriverne un modello, attraverso equazioni, quindi il primo problema che si pone è quello di fare un modello del motore, che, essendo a corrente continua, viene rappresentato schematicamente con il cosiddetto circuito di collettore o di armatura.

Con Ω si rappresenta la velocità angolare del motore.

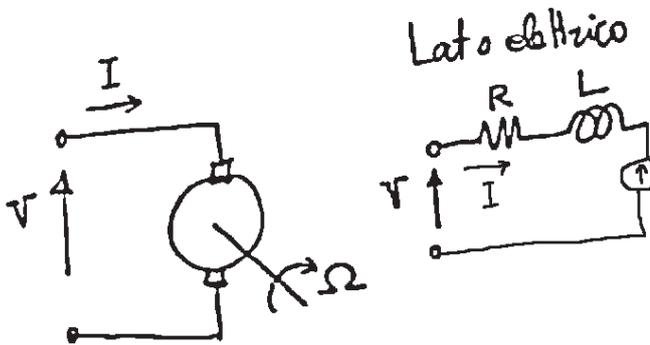
V è la tensione che alimenta motore.

I è la corrente che fluisce nel circuito di armatura.

Un motore è un dispositivo che converte l'energia elettrica in energia meccanica.

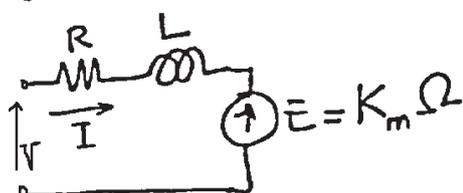
Le equazioni da scrivere sono quindi quelle che rappresentano quello che succede dall'altra elettrico, e rappresentano un bilancio della energia elettrica, e quello che succede dal lato meccanico, e rappresentano un bilancio dell'energia meccanica.

Per quanto riguarda il lato elettrico deve essere scritto un circuito equivalente.



Lato elettrico

$$L \frac{dI}{dt} + RI + E = V$$



Abbiamo due morsetti a cui viene applicata la tensione, nel circuito di armatura c'è una resistenza importante, c'è certamente una induttanza rilevante, che è quella che serve a creare il flusso e l'interazione del flusso provocato dall'induttanza con il fuso di eccitazione è quello che produce la coppia motrice. Poiché il motore è in movimento occorre introdurre un'ulteriore componente che si chiama forza contro elettromotrice e rappresenta la tensione generata dal motore stesso per il fatto stesso che il motore si trova in rotazione. Il motore in rotazione si comporta come una dinamo, genera una tensione, E , che in genere tende a opporsi alla tensione V che ha posto il motore in rotazione.

La tensione E risulta proporzionale, secondo una costante K_m , alla velocità angolare Ω . Avendo scritto il circuito di possiamo ricavare l'equazioni, che sono del primo ordine.

La caduta di tensione sulla induttanza più la caduta di tensione sulla resistenza più la tensione E , ovvero la forza contro elettromotrice) sono uguali a V , per il bilancio energetico. Con E proporzionale alla velocità angolare.

Lato elettrico $L \frac{dI}{dt} + RI + E = V$
 $(E = K_m \Omega)$

Lato meccanico $J \frac{d\Omega}{dt} = C_m - C_r$
 $(C_m = K'_m I)$

$E \cdot I = C_m \Omega$
 $K_m \Omega I = K'_m \Omega I$

Dal lato meccanico abbiamo che l'accelerazione angolare ($d\Omega/dt$) moltiplicata per il momento di inerzia J è uguale alla coppia motrice C_m e dalla coppia resistente C_r , che dipenderà da eventuali attriti oppure qualunque tipo di disturbo che si può presentare sull'asse. Quindi questo è il comportamento del sistema dal lato meccanico.

L'espressione della coppia motrice è legata al fenomeno di conversione dell'energia elettrica in energia meccanica.

La coppia motrice è proporzionale, secondo un coefficiente, alla corrente di armatura I . Si noti come le due equazioni dipendono l'una dall'altra, la velocità angolare Ω compare in entrambe.

Nella coppia motrice compare la corrente, che è incognita nell'equazione del lato elettrico.

La potenza dissipata sul motore, trascurando la dissipazione sulla resistenza, è pari al prodotto EI .

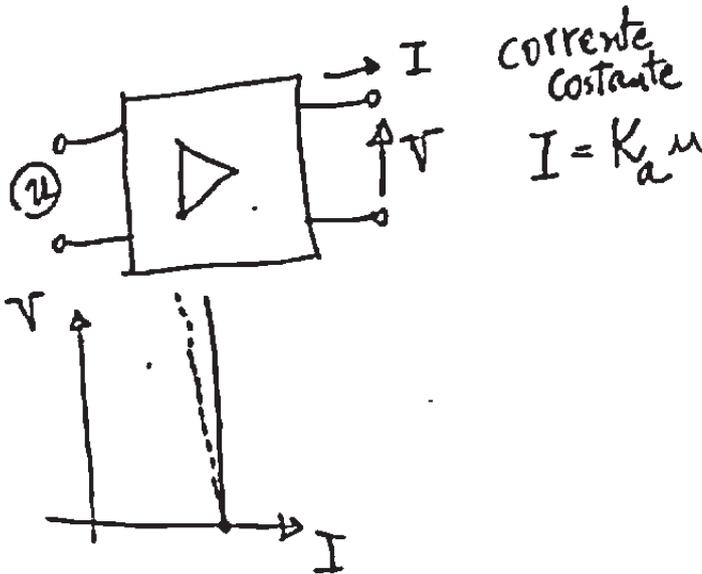
Questa potenza, se non ci sono perdite, quindi in condizioni ideali, si deve trovare dal lato meccanico, cioè deve essere la potenza meccanica disponibile sull'asse.

Tale potenza meccanica è uguale a $C_m \Omega$, la coppia motrice per la velocità angolare.

Andando a fare le sostituzioni della espressione di $E = K_m \Omega$ e dell'espressione di $C_m = K'_m I$, c'è lo stesso prodotto ΩI in entrambi i membri e quindi si semplifica.

Quindi in condizioni ideali di conversione perfetta di energia elettrica in energia meccanica i due coefficienti K_m e K'_m sono uguali e per semplicità si lascia K_m .

Dunque il modello del motore è $C_m = K_m I$.



La modellistica dell'alimentatore

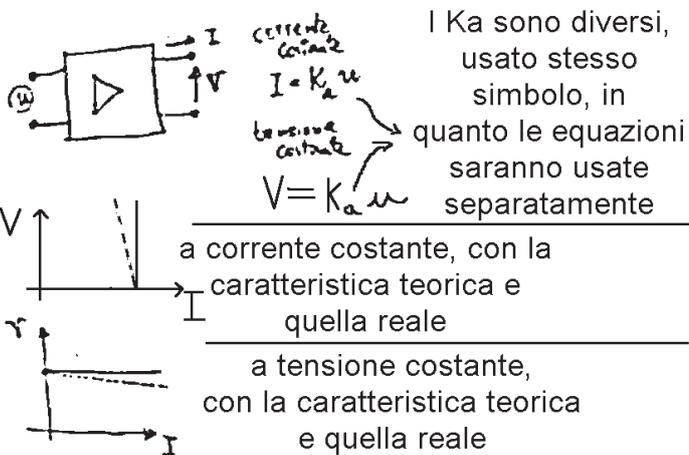
L'alimentatore è il dispositivo che deve fornire la potenza elettrica necessaria a far funzionare il motore.

Al motore è un dispositivo che ha due morsetti da un lato due morsetti dall'altro lato. Dal lato motore ci interessa la tensione V e la corrente I che fluisce nel circuito di armatura del motore. Dal lato comando mettiamo una grandezza in ingresso che chiamiamo u e che il comando dell'amplificatore. Nel sistema poniamo un simbolo di amplificazione.

Gli scenari relativi alle proprietà elettriche possono essere due, casi limiti, uno con una corrente indipendente dalla tensione (modalità di alimentazione a corrente costante), l'altro una tensione indipendente dalla corrente.

Parlando di corrente costante, si intende che costante rispetto all'attenzione ma non rispetto ad altri parametri. In particolare il valore costante della corrente nella relativa modalità di alimentazione dipende dal comando u .

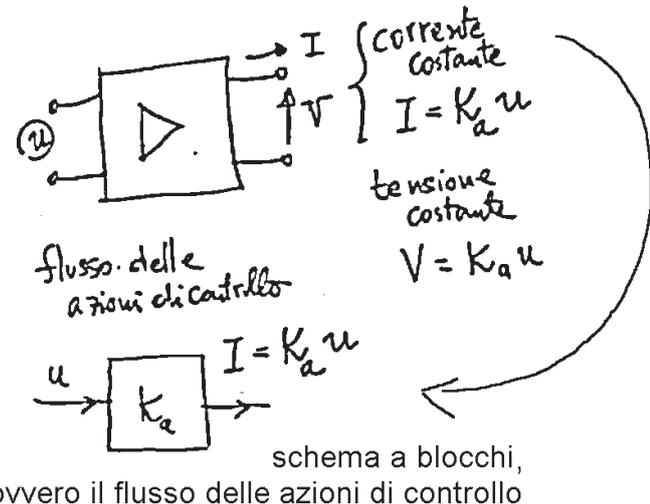
La corrente costante I sarà proporzionale al comando u secondo una costante K_a , costante di alimentazione o di amplificazione.



La seconda possibilità è quella in cui la tensione V è indipendente dalla corrente circolante. Questa modalità di funzionamento è detta a tensione costante.

Notare che la tensione è costante rispetto alla corrente, ma non lo è rispetto al comando, anzi essa dipenderà dal comando secondo una legge di proporzionalità del tipo $V = K_a u$. I K_a delle due leggi non sono uguali.

Dalle equazioni possiamo determinare il modello.



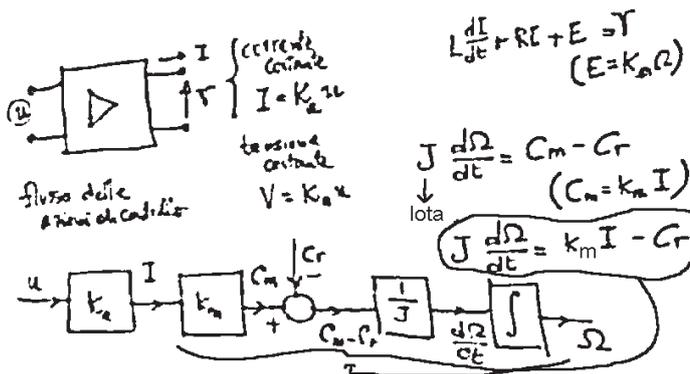
Modello a corrente costante

Il primo modello che sarà analizzato è il più semplice ed è quello che modella il motore alimentato a corrente costante.

È pedagogico seguire il flusso di comando, o altrimenti detto flusso di azione di controllo.

Partendo dal comando u , esso determina il valore della corrente che viene iniettata

nel circuito di armatura. La corrente è proporzionale ad u secondo un costante K_a . Da questa considerazione determiniamo un primo blocco K_a nel relativo flusso.



Quindi la corrente I è l'uscita di un sistema avente ingresso u e avente una funzione di trasferimento elementare K_a .

In questa particolare situazione possiamo tranquillamente ignorare quello che succede alla tensione perché se vogliamo sapere quanto vale la velocità è sufficiente considerare l'equazione in cui $C_m = K_m I$.

Facendo la relativa sostituzione otteniamo l'equazione

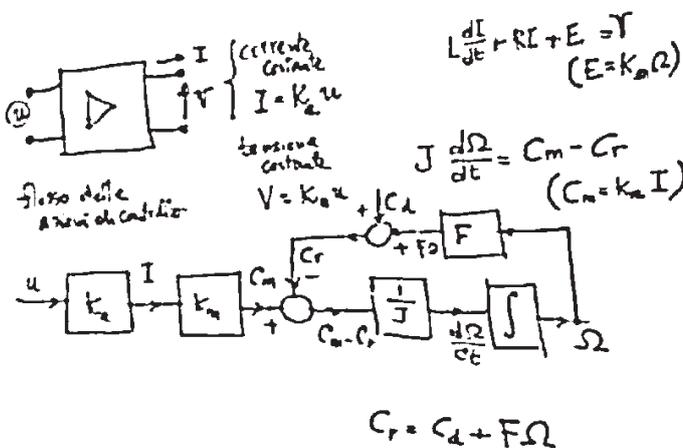
$$J \frac{d\Omega}{dt} = k_m I - C_r$$

coppia motrice - coppia resistente

che dovrà essere trasferita in un sistema a blocchi.

Per costruire uno schema a blocchi, facciamo finta di conoscere C_r . Da questa considerazione possiamo continuare a scrivere nello schema blocchi, ricavando prima C_m , poi la differenza di C_m con C_r (ottenendo il membro destro della equazione, con lo scopo finale di ottenere Ω) e poi, dividendo per J (iota), ottenere $d\Omega/dt$.

Integrando questo otteniamo Ω .



$$C_r = C_d + F\Omega$$

Quello che abbiamo ottenuto è un modello che rappresenta il flusso dell'azione di controllo, il comando sull'amplificatore comanda la corrente, la corrente comanda la coppia motrice, la coppia motrice insieme alla coppia resistente comandano la velocità angolare. C'è una sorta di visione causa-effetto di tutti i fenomeni.

La quantità C_r è inizialmente non specificata, ma essa può essere in qualche modo descritto. C_r è la coppia resistente che rappresenta la resistenza al movimento,

in genere si tratta di attriti, dissipazioni di energia sotto forma meccanica. Considerando la situazione più semplice si assume che la coppia resistente sia pari ad un certo attrito costante, o disturbo costante C_d . Nel caso del laminatoio può essere il lingotto che impatta la gabbia, questa può essere una coppia disturbante costante, fissa rispetto alle altre grandezze. Poi ci sono dei termini che dipendono dalla velocità. Infatti se un corpo è in movimento in un mezzo che ha una certa viscosità, come quella dei cuscinetti a sfera su cui sono appoggiati tutti gli assi in rotazione, c'è una forma di attrito che è proporzionale alla velocità.

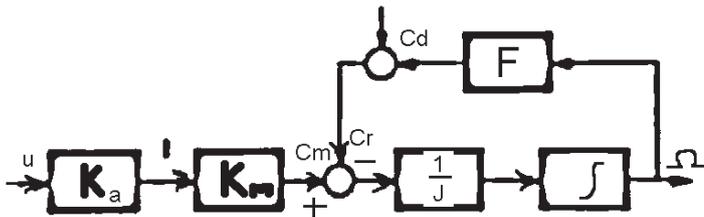
Tutto questo è formalizzato nella equazione $C_r = C_d + F\Omega$.

Con questa ulteriore informazione lo schema può essere completato.

Il termine C_d è la "coppia disturbante", che dipende in qualche modo dall'esterno. È cioè

un agente esterno al sistema.

• Schema a blocchi dettagliato

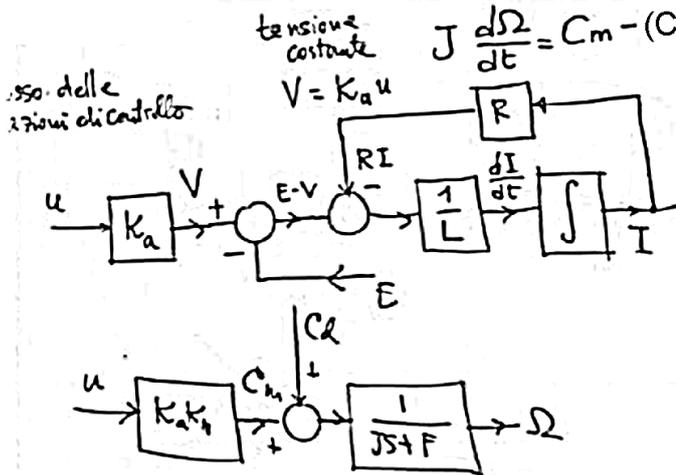


• Equazioni (di stato)

$$L \frac{dI}{dt} + RI + E = V \quad (E = K_m \Omega)$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_m - C_r \quad (C_m = K_m I)$$

• Composizione dei modelli (comando = I) in corrente cost.



$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_m - (C_d + F\Omega)$$

↓

Per ricavare $F\Omega$ posso usare la trasformata di Laplace.

$$J \frac{d\Omega}{dt} + F\Omega = C_m - C_d$$

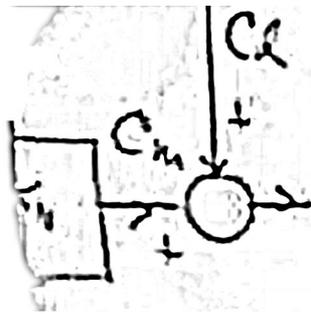
Da tutto questo possiamo riscrivere uno schema a blocchi dettagliato.

Quindi quello che abbiamo visto è come fare dei modelli elementari, modelli che sono sotto forma di equazione di stato, con la corrente e la velocità che sono variabili di stato del motore. Il motore è un sistema con lo stato a dimensione due, gli ingressi sono il comando u e la coppia disturbante C_d . L'uscita è Ω .

Abbiamo poi fatto lo schema a blocchi dettagliato, in cui sono dettagliate le diverse grandezze con il massimo di tagli possibile. Ogni variabile delle equazioni corrisponde, nello schema blocchi, ad una freccia. Il legame tra le variabili è rappresentato dalle diverse funzioni di trasferimento elementari indicate all'interno dei singoli blocchi.

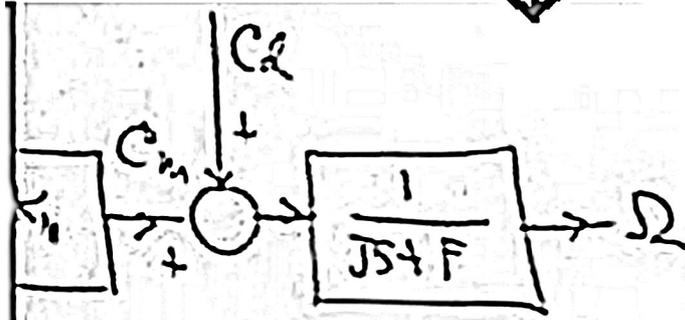
Per semplicità si potrebbe riassumere tutto in uno schema più sintetico che fa intervenire funzione di trasferimento.

Possiamo ad esempio mettere insieme il legame tra u e C_m con un solo blocco.



$$J \frac{d\Omega}{dt} + F\Omega = C_m - C_d$$

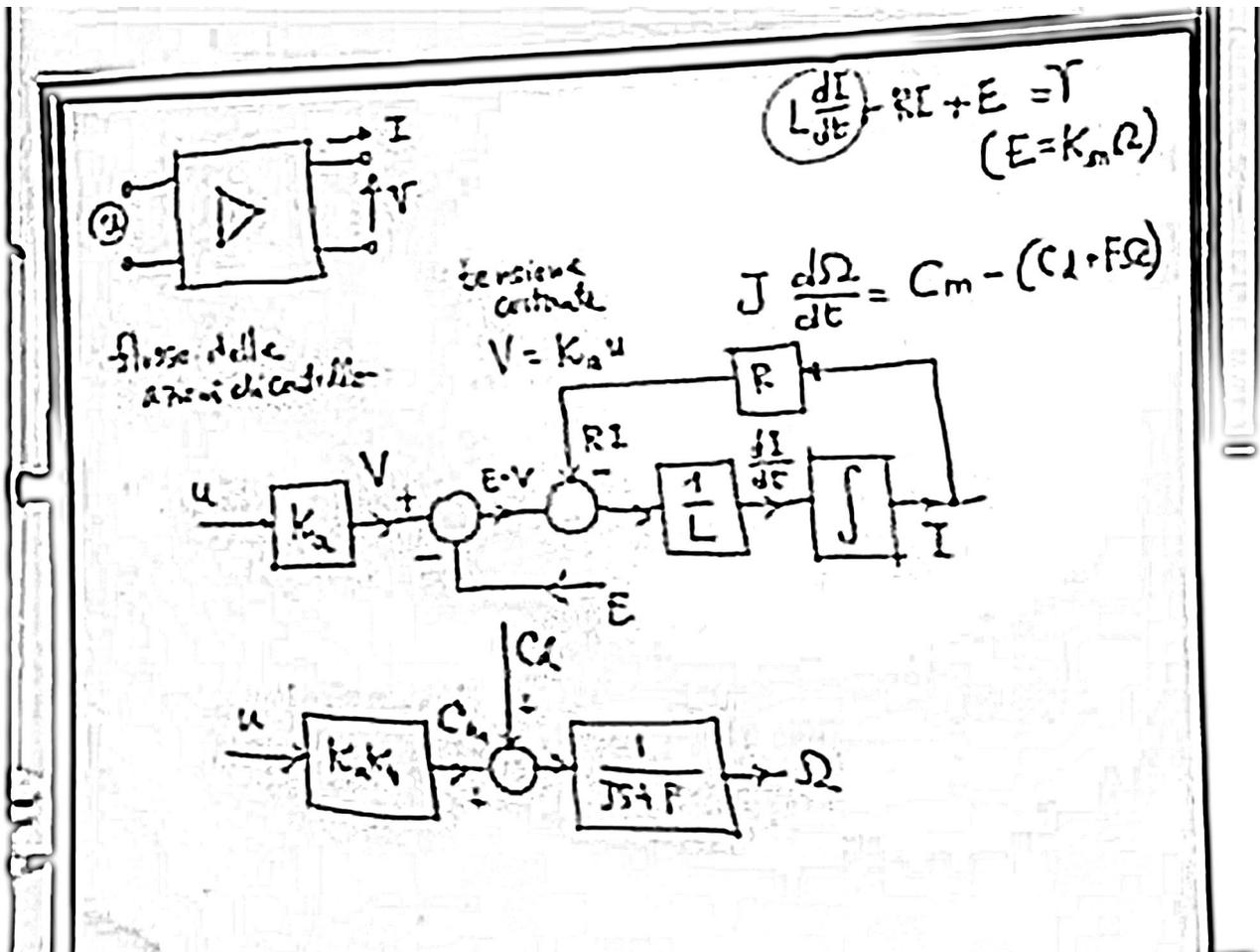
$$Js\Omega + F\Omega = C_m - C_d$$



Modalità di controllo a tensione costante

Nella composizione dei modelli il comando è V , in tensione costante.

Si realizza lo schema a blocchi, dal comando u , seguendo le azioni del flusso di controllo.



A questo punto lo schema non è completo perché E non è una grandezza indipendente, ma dipende da altre grandezze. Infatti $E = K_m \Omega$.

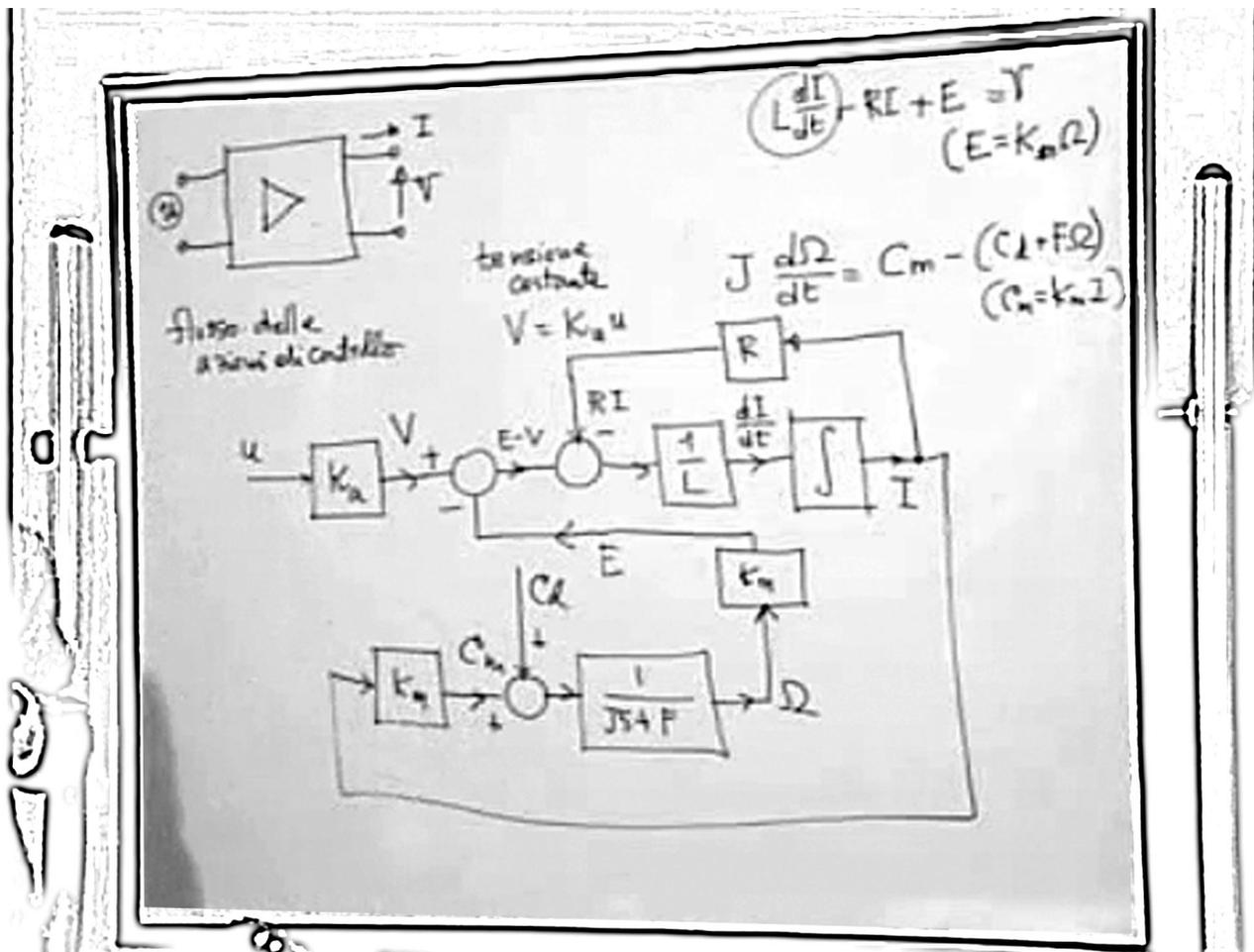
Quindi per completare lo schema e determinare la quantità E occorre la parte dello schema disegnata prima con il modo in cui la coppia motrice e la coppia disturbante influenzano la velocità angolare.

Conoscendo la velocità angolare, moltiplicandola per K_m , ottengo E .

Fatto questo lo schema è quasi completo e per completarlo serve per esprimere il modo in cui C_m dipende da I .

Questo l'abbiamo visto prima, $C_m = K_m I$. Quindi avendo ottenuto I , lo schema si completa.

Questo schema risulta più complesso del precedente, ma è quello in uso.



□

Prof. Alberto Isidori
41'06"

Continuiamo ad analizzare il controllo di velocità.

Nel modello di un controllo di velocità abbiamo visto:

- Motore (in corrente continua)
- Alimentatore
- Composizione dei modelli (comando = I, comando in corrente)
- Composizione dei modelli (comando = V, comando in tensione)

La composizione dei modelli può essere fatta in diversi modi.

Tipi di modello

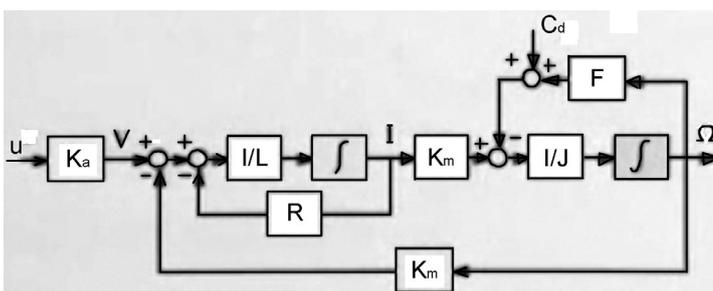
- Equazioni di stato
- Schema a blocchi dettagliato
- Schema a blocchi sintetico
- Controllo a retroazione

$$V - E = L \frac{dI}{dt} + RI \quad V - E = sLI + RI \quad I = \frac{V - E}{sL + R}$$

$$C_m - C_d = J \frac{d\Omega}{dt} + F\Omega \quad C_m - C_d = sJ\Omega + F\Omega \quad \Omega = \frac{C_m - C_d}{sJ + F}$$

A lato le equazioni di stato nel caso del motore con controllo di velocità.

Le equazioni sono due, le due variabili di stato sono la corrente nel circuito di armatura e la velocità angolare del motore. Gli ingressi al sistema sono la tensione V di alimentazione del motore e la coppia disturbante C_d agente sul motore. Tali equazioni possono essere distinti anche in termini di schemi a blocchi, il cui schema, non semplice, è riportato a lato.



In questo schema possiamo seguire flusso dell'azione di controllo, la tensione u di comando dell'alimentatore fornisce la

tensione V di comando del motore, ed è ad essa proporzionale secondo la costante K_a . Poi la tensione V meno la coppia elettro motrice E (forza contro elettro motrice) produce la tensione agente nel circuito di armatura. Dalla tensione agente nel circuito di armatura passiamo alla corrente nel circuito di armatura. Tale corrente determina una coppia motrice proporzionale alla corrente stessa secondo il coefficiente K_m . La coppia motrice meno la coppia resistente produce la coppia attiva nel carico meccanico ($1/J$) e da questa coppia attiva nel carico meccanico si produce la velocità angolare.

Questo è uno schema dettagliato del circuito, ma è possibile anche passare ad uno schema sintetico, manipolando le equazioni di stato.

In particolare, facendo la trasformata di Laplace alla prima equazione si ottiene:

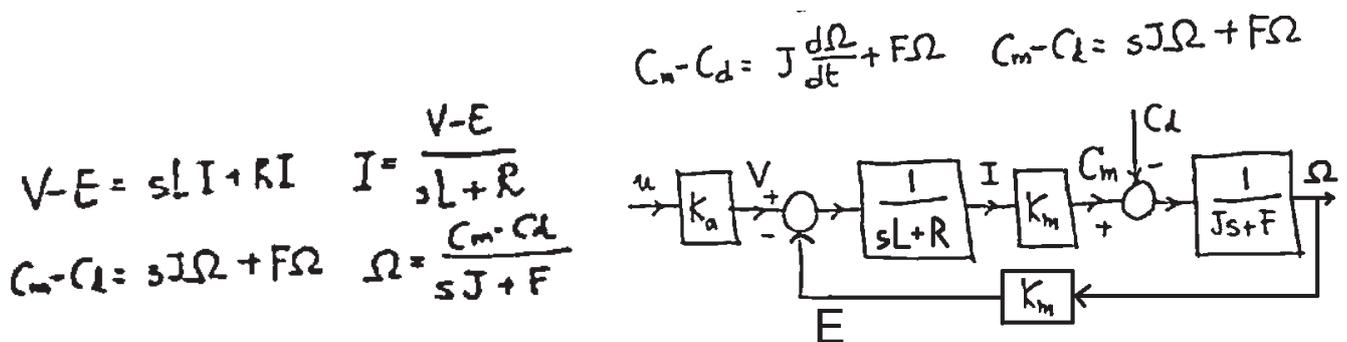
$$V - E = sLI + RI \Rightarrow I = (V - E)/(sL + R)$$

Da questa equazione deduciamo la corrente I, data da V - E divisa l'impedenza sL + R.

La stessa manipolazione può essere effettuata sulla seconda equazione, ottenendo:

$$C_m - C_d = sJ\Omega + F\Omega \Rightarrow \Omega = (C_m - C_d)/(sJ + F), \text{ in cui } sJ + F \text{ è l'impedenza meccanica}$$

Utilizzando le due relazioni ottenute tramite trasformata di Laplace possiamo ottenere uno schema a blocchi più semplificato del precedente, meno dettagliato.



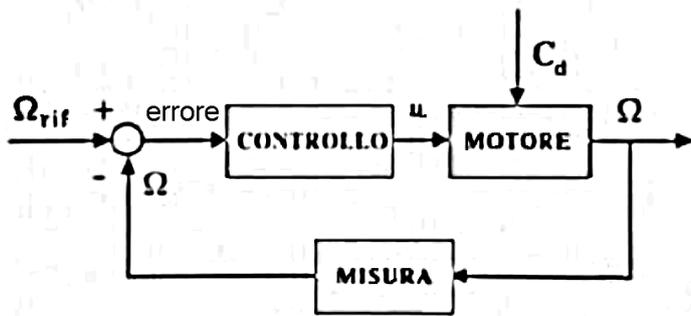
Lo schema a blocchi semplificato è del tutto equivalente allo schema precedente, esso è più semplice perché sono state eliminate alcune variabili intermedie.

Si noti come siano stati sostituiti tre blocchi dello schema precedente con un unico blocco nello schema semplificato in due parti.

Il controllo a retroazione della velocità angolare

Ricordando il paradigma del controllo a retroazione, quello che dobbiamo fare, se vogliamo controllare la velocità, è di effettuare una misura della velocità stessa, confrontarla con il valore desiderato, detto valore di riferimento. Il confronto dà luogo ad un errore, una differenza fra il valore desiderato ed il valore effettivo e, sulla base di tale errore, si tratta di sviluppare l'azione di controllo.

Questo tipo di operazione dà luogo ad un ulteriore tipo di schema a blocchi, come riportato di seguito.



In questo schema a blocchi il motore è chiuso in un unico blocco, l'ingresso è il comando u sulla alimentazione del motore. C'è poi un altro ingresso che è la coppia disturbante C_d , che, nel caso di controllo della velocità del laminatoio può rappresentare l'impatto del lingotto il transito del lingotto stesso nella gabbia, mentre nel caso del controllo della velocità del compact disc la coppia disturbante può rappresentare gli effetti di materiali indesiderati, di attrito, polvere, che fanno sì che la velocità può essere diversa da quella che viene programmata.

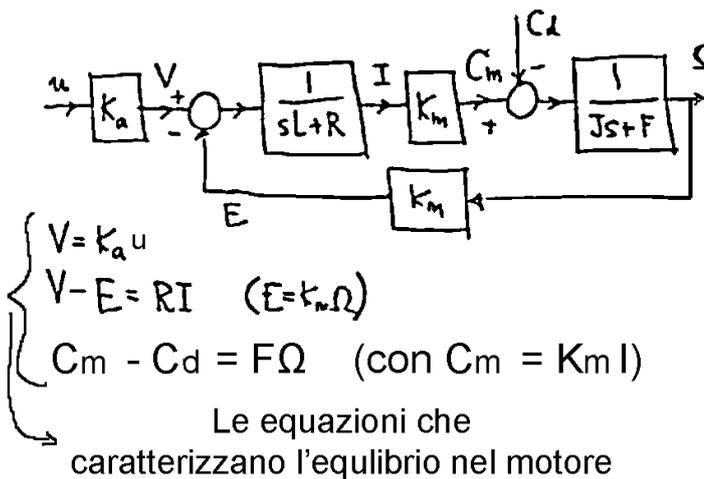
L'uscita del motore è la velocità angolare, che deve essere misurata con un dispositivo tachimetrico. L'uscita del dispositivo di misura, indicata ancora con Ω , è una grandezza che viene portata a confronto con la velocità angolare riferimento, che è un dato fornito. La differenza tra la velocità di riferimento e la velocità effettiva prende il nome di errore e si tratta di un errore di velocità. L'errore viene elaborato da un dispositivo di controllo. Questo è lo schema base di un controllo in retroazione di una velocità.

Tutto il lavoro consisterà nello sviluppare metodi di analisi e, successivamente, metodi di progetto per la parte che è stata indicata come controllo nel blocco.

Prime analisi quantitative

Prime analisi quantitative

- Equazioni di equilibrio. Vogliamo vedere cosa succede il sistema quando tutto è costante, quando le diverse grandezze (corrente, tensione, coppia, velocità) sono costanti.



La relazione fra V e u è una relazione cosiddetta statica, quindi possiamo sempre dire che $V = k_a u$.

Per quanto riguarda l'equazione che determina la corrente, se la corrente è costante, la sua derivata rispetto al tempo è nulla, quindi $V - E = RI$. Dobbiamo inoltre ricordarci che la quantità E è $E = k_m \Omega$.

Per quanto riguarda la coppia, se la velocità angolare è costante la sua derivata rispetto al tempo è nulla, quindi la coppia motrice meno la coppia disturbante è

uguale a $F\Omega$, ovvero $C_m - C_d = F\Omega$. Ci dobbiamo ricordare che $C_m = K_m I$.

Queste tre equazioni sono quelle che caratterizzano l'equilibrio nel motore.

Il motore è un oggetto che ha per ingresso u , C_d , e come uscita Ω .

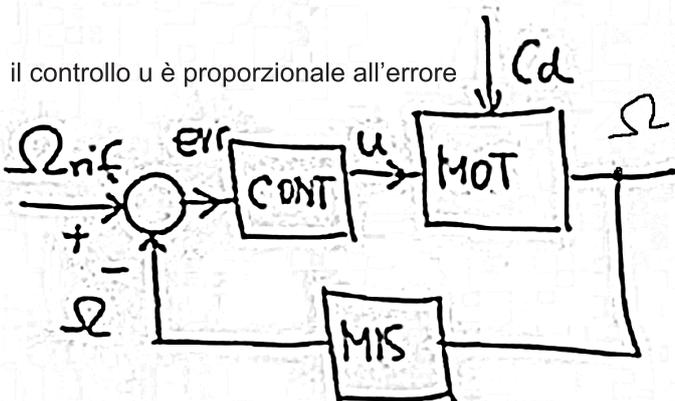
Alcune variabili possono essere eliminate, in particolare quelle intermedie, ovvero V e I . Quindi si deve ottenere una relazione che esprime Ω in funzione di u e C_d .

Si devono eliminare le variabili V e I dalle relazioni. Quello che si ottiene è:

$$\frac{\Omega}{\Omega_{\text{output}}} = \left[\frac{1}{FR + K_m^2} \right] \left[K_a K_m u - R C_d \right]$$

Relazione statica che lega la velocità angolare, il comando dell'amplificatore, la coppia disturbante, nel caso in cui il sistema sia in equilibrio.

Relazione relativa al motore, siccome esso è controllato in retroazione, ci sono altre relazioni.



il controllo u è proporzionale all'errore

A fianco lo schema del controllo a retroazione.

Interessa vedere come la velocità angolare Ω è legata alla coppia disturbante C_d e alla Ω di riferimento, che sono gli ingressi del sistema completo.

Gli ingressi del motore sono u e C_d , dal momento che è stato chiuso l'anello di controllo, il sistema completo ha come ingressi la velocità angolare di riferimento e la coppia disturbante.

Si tratta di riscrivere una nuova equazione e, di nuovo, di eliminare le variabili. La nuova equazione ci dice come u dipende dall'errore.

$$u = K_c (\Omega_{\text{rif}} - \Omega)$$

↪ K del controllo

Coefficiente del controllo, omega di riferimento ed effettivo

Il caso più semplice è quello in cui il controllo u è proporzionale all'errore.

Dalle equazioni possiamo eliminare la u , che gioca il ruolo di variabile intermedia tra le due equazioni.

$$\Omega = \frac{K' K_m K_a K_c}{1 + K' K_m K_a K_c} \Omega_{\text{rif}} - \frac{K' R}{1 + K' K_m K_a K_c} C_d$$

$$\text{ove } K' = \frac{1}{FR + K_m^2}$$

Dalla eliminazione della u si ricava l'equazione a lato.

Dalla equazione ricaviamo delle osservazioni interessanti. La formula della seconda riga riassume un certo numero di coefficienti. La formula principale mostra

come la velocità angolare effettiva dipende dal valore di riferimento che è il valore desiderato e dipende dalla coppia disturbante che è un agente esterno al sistema. Ci sono poi un certo numero di parametri. Alcuni dipendono dal motore (R , la resistenza interna del motore, K_m , la coppia motrice, e F , l'attrito viscoso) perché sono parametri costruttivi del motore, su cui non si può fare nulla. Altri parametri possono in qualche modo essere scelti, in particolare i parametri K_a e K_c , in cui K_a rappresenta il guadagno, il coefficiente di amplificazione dell'alimentatore che alimenta motore; K_c rappresenta, nel dispositivo di controllo, il legame di proporzionalità tra errore e comando dell'alimentatore. Per va-

lori molto grandi di questi due parametri la velocità effettiva tende a quella di riferimento, cioè l'errore è il più piccolo possibile.

Quindi, applicando le prime analisi quantitative, avevamo stabilito le equazioni di equilibrio, ora siamo giunti a osservare delle proprietà del controllo a retroazione.

Le proprietà osservate sono le seguenti.

- Quanto più K_a e K_c sono grandi, tanto più l'errore piccolo.

Di conseguenza

- Protezione da disturbi esterni (coppia disturbante nel nostro esempio)

- Protezione dagli errori di modello (cioè derivanti dagli altri parametri del sistema)

$$\Omega = \frac{K' K_m K_a K_c}{1 + K' K_m K_a K_c} \Omega_{ref} - \frac{K' R}{1 + K' K_m K_a K_c} C_d$$

$$\text{ove } K' = \frac{1}{FR + K_m^2}$$

Questa formula molto importante in quanto riassume l'essenza stessa del controllo a retroazione. Aumentando il valore di certi guadagni si può rendere piccola la differenza tra il valore desiderato e il valore effettivo della grandezza controllata.

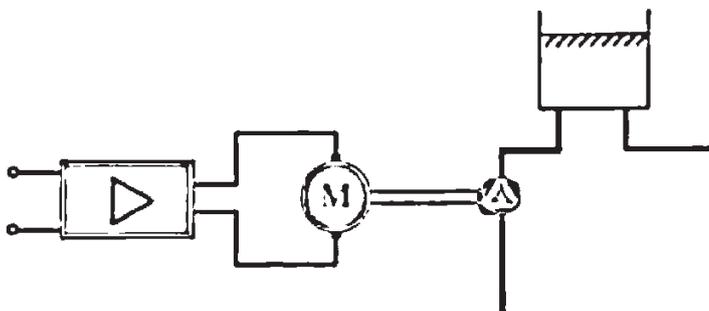
Dobbiamo però fare attenzione ad una cosa, in realtà non siamo libere di scegliere i valori dei due parametri grande piacere.

Ovviamente ci sono delle limitazioni tecniche, ma ci sono anche delle limitazioni concettuali per quanto riguarda il funzionamento del sistema.

Scegliendo K_a e K_c molto grandi il sistema di controllo può diventare instabile, possono venir fuori delle oscillazioni, per cui la velocità angolare non tende all'equilibrio desiderato.

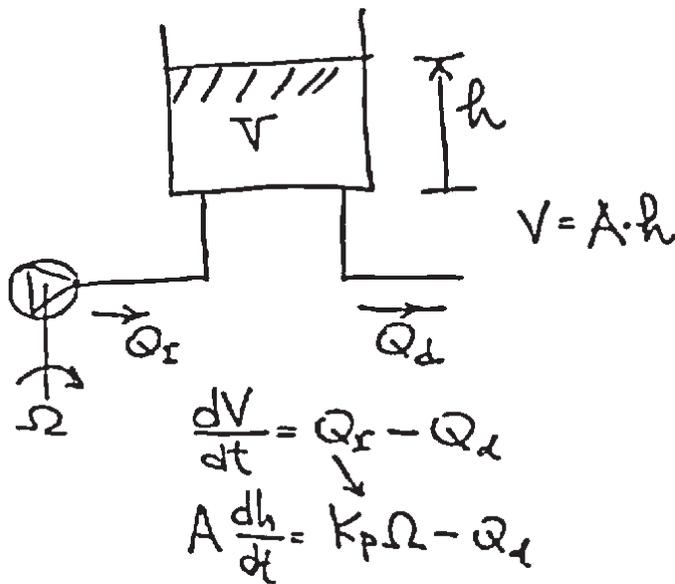
Il modello di un regolatore di livello

L'approccio a questo modello è simile al precedente, faremo una semplice modellistica e poi trarremo delle considerazioni qualitative.



Il problema è che, dato un serbatoio che contiene dell'acqua, vogliamo controllare il livello dell'acqua nel serbatoio. Il serbatoio a due connessioni idrauliche, una è verso una utenza che, in generale, è imprevedibile. La seconda è un rifornimento con una pompa che per regola acqua da un acquedotto e tende a mantenere il livello costante nel serbatoio. La pompa è comandata da un motore che è uguale a quello visto nel precedente modello. Cioè è un motore a corrente continua a eccitazione indipendente. Il motore è a sua volta alimentato da un alimentatore con le proprietà già viste in precedenza, nel controllo di velocità.

Quello che dobbiamo analizzare è il modello del serbatoio e il modello del motore (in corrente continua). Poi effettuare una composizione dei modelli.



Il serbatoio può essere schematizzato come nella figura a lato, in cui h è il livello desiderato. Poi ci sono due condotte, quella di rifornimento a sinistra caratterizzata dalla sua portata, definita come Q_r ; e quella che porta l'acqua all'utenza, caratterizzata dalla portata Q_d , viene utilizzata la lettera d perché rappresenta il disturbo in quanto rappresenta un qualcosa che non possiamo conoscere. È dunque un disturbo dal punto di vista del controllare il livello.

Il modello matematico che deriva dallo schema è semplice perché si tratta di un

equilibrio di volumi.

In sostanza la variazione del volume nel tempo (dV/dt) è uguale all'acqua che entra meno l'acqua che esce ($Q_r - Q_d$).

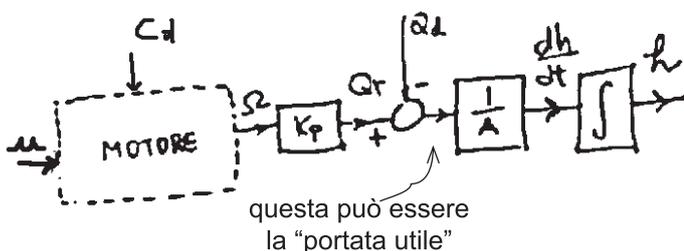
Vogliamo controllare l'altezza immaginiamo che il volume dell'acqua sia relativo ad un'area costante, quindi pari ad un'area per l'altezza h .

Quindi la derivata di V rispetto al tempo diventa A che moltiplica la derivata di h rispetto al tempo.

Dobbiamo stabilire quanto vale la portata di acqua di rifornimento: essendoci una pompa si immagina che tale portata sia proporzionale alla velocità di rotazione della pompa secondo un certo coefficiente, che definiamo K_p .

Quindi $Q_r = K_p \Omega$. Q_d è una quantità esterna, che scriviamo a parte.

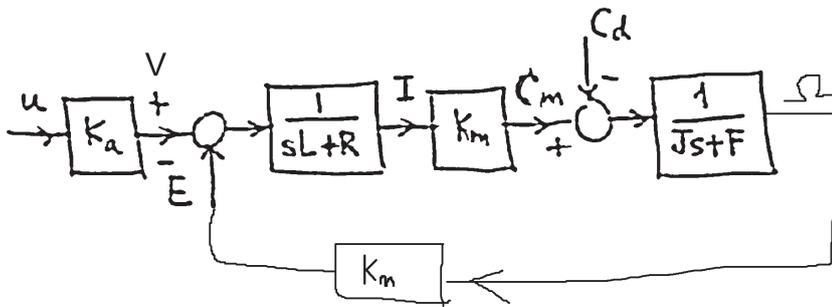
La relazione trovata ($A dh/dt \dots$) può essere descritta con uno schema a blocchi.



Questo è il modello della pompa, con il motore che alimenta la pompa.

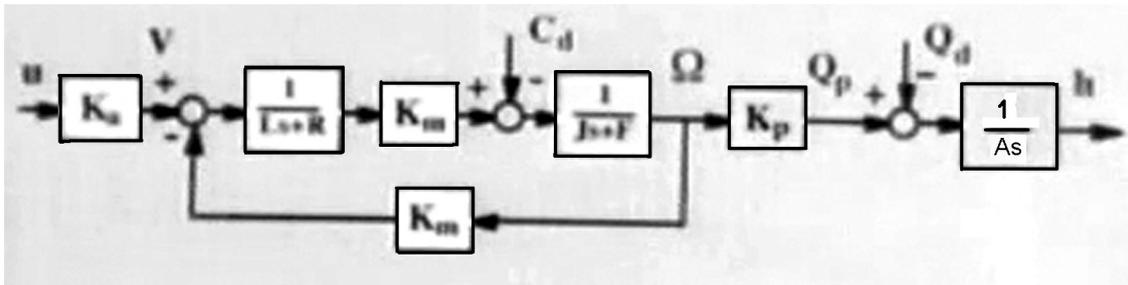
Il motore ha un ingresso u che è il comando del motore. Nel motore deve essere considerata una coppia disturbante, che può rappresentare l'effetto di attriti indesiderati, o di avarie che si presentano nel motore durante il funzionamento.

Il modello matematico del motore è quello ricavato precedentemente.

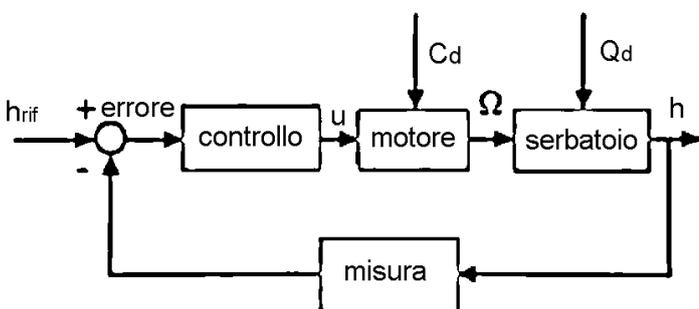


Questo è il modello del motore.
 Notare che Ω è l'ingresso al modello del controllo del livello.

Di seguito uno schema a blocchi che rappresenta la composizione dei modelli nel nostro sistema di controllo.



Passiamo a descrivere il controllo a retroazione.



Basandoci sul paradigma del controllo a retroazione dobbiamo fare una misura di una grandezza controllata, che è l'altezza del liquido nel serbatoio. Questo può essere fatto a mezzo di un galleggiante e tradurre la posizione del galleggiante su una grandezza elettrica.

Ottenuta la misura della grandezza controllata essa viene confrontata con il valore desiderato e viene definito l'errore, lo spostamento dal valore desiderato rispetto a quello misurato. Sulla base dell'errore sviluppiamo l'azione di controllo.

Dallo schema sopra, si evince l'anello di controllo.

Il controllo sarà il riferimento dello studio.

Passando alle prime analisi quantitative, studiamo le equazioni di equilibrio del sistema. Le condizioni di equilibrio del motore sono le stesse considerate in precedenza.

Quella di riempimento del serbatoio è semplicemente $Q_r - Q_d = 0$. E, date le relazioni che intercorrono, si ha che $K_p \Omega = Q_d$.

$$\Omega = K' (K_a K_m u - R C_d)$$

Condizioni di equilibrio del motore.

$$u = K_c (h_{rif} - h)$$

Mettendo tutto insieme, eliminando le variabili intermedie (u e Ω), si ottiene :

$$h - h_{rif} = \frac{1}{K_p K' K_m K_a K_c} Q_d + \frac{1}{K_m K_a K_c} C_d$$

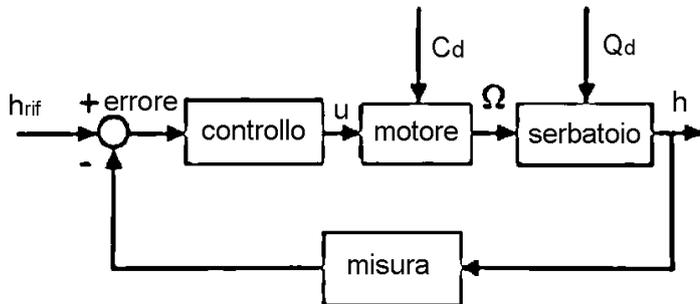
La formula ha una struttura analoga alla precedente.

Con analoghe osservazioni.

I parametri liberi per i progettisti sono K_a e K_c .

□

Prof. Alberto Isidori
42'44''



Nella rassegna di sistemi elementari di controllo, rimane da concludere l'argomento relativo al controllo di livello finendo le analisi quantitative che avevamo iniziato a fare.

Il sistema in studio è quello indicato dallo schema blocchi a lato.

$$h - h_{rif} = \frac{1}{K_p K' K_m K_a K_c} Q_d + \frac{1}{K_m K_a K_c} C_d$$

Nella relazione che esprime l'errore i parametri che possono essere in qualche modo scelti sono K_a e K_c , mentre gli altri sono dipendenti dalla struttura del sistema,

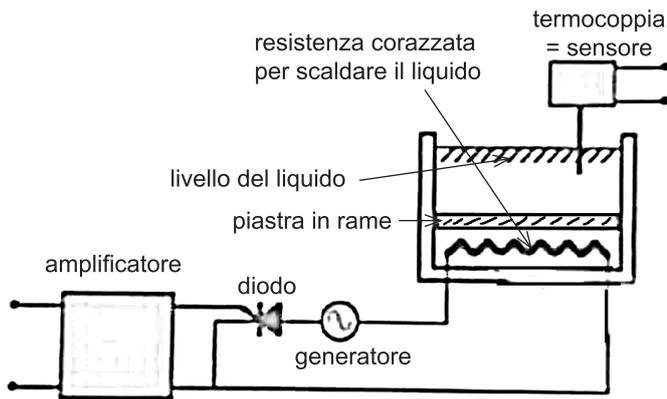
in maniera analoga all'esempio studiato del motore elettrico.

Scegliendo tali parametri grandi otteniamo un piccolo effetto sull'errore di eventuali disturbi di coppia sul motore. Questo ha come conseguenza la protezione la disturbi e la protezione da errori di modello, che sono una nostra scarsa conoscenza sui parametri che caratterizzano i diversi componenti del sistema.

I vantaggi del controllo a retroazione sono che ignorare l'effetto dei parametri o l'effetto di variazioni nel tempo dei parametri è attenuato dal sistema stesso.

Un valore troppo elevato dei parametri non può essere scelto a causa della possibilità di fenomeni di instabilità.

Modello di un regolatore di temperatura



Lo schema è abbozzato a lato, con uno scambiatore di calore.

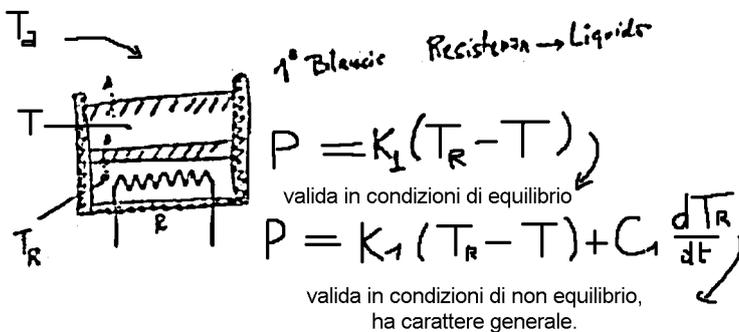
Abbiamo una resistenza, in cui si dissipa potenza, alimentata da un circuito elettrico. La modalità di alimentazione è abbastanza interessante, è una modalità di alimentazione che consente di sprecare poca energia nel processo di controllo. Nel circuito abbiamo un generatore (\sim), con un diodo controllato che comanda il

passaggio della corrente a seconda di certe indicazioni che arrivano dall'amplificatore, posto a sinistra, un amplificatore un po' speciale che, dal punto di vista funzionale elabora un comando in ingresso per aprire la conduzione del diodo e fare in modo che sulla resistenza venga dissipata la quantità di calore desiderata.

In alto abbiamo un sensore, una termocoppia che è lo strumento destinato alla misura.

Per prima cosa analizzeremo il modello matematico degli scambiatori di calore.

Abbiamo una piastra di rame che assicura una buona conduzione del calore, una resistenza R , una parte alta in cui c'è il liquido. Assumiamo che lo scambio di calore avvenga solamente tra la resistenza e il liquido e dal liquido verso l'ambiente esterno, e che le pareti siano un isolante perfetto.



Dobbiamo scrivere dei bilanci termici. Il primo è lo scambio di calore tra la resistenza e il liquido.

Sulla resistenza R si dissipa una certa potenza P che verrà trasmessa dalla resistenza al liquido. Interviene un coefficiente di trasmissione K_1 ; la quantità di calore trasmessa dipende dalla differenza tra la temperatura T_r del riscaldatore e quella del liquido, temperatura T , che sarà la variabile da controllare nel nostro problema.

$P = K_1 (T_r - T)$ in condizioni di equilibrio. Ma all'accensione T_r subirà un variazione, di cui tener conto.

Della potenza che viene dissipata nella resistenza, parte se ne va nel liquido e parte contribuisce a innalzare la temperatura della resistenza stessa, proporzionale ad un coefficiente di capacità termica definito come C_1 .

La seconda relazione rappresenta il bilancio delle potenze, con la potenza dissipata che è uguale alla potenza trasmessa più la potenza che contribuisce alla variazione di temperatura. È il bilancio termico nella resistenza in condizione di non equilibrio ed è una relazione più generale. Questo è il primo bilancio, tra la resistenza ed il liquido.

Assumiamo che ci sia scambio di calore fra la resistenza e liquido perché altrimenti il riscaldatore ad un certo punto esploderebbe.



1° Bilancio Resistenza → Liquido
 2° Bilancio Liquido → Ambiente

$$P = K_1(T_R - T) + C_1 \frac{dT_R}{dt} \quad \text{non equilibrio}$$

rappresentazione di stato

variabili di stato: T_R, T

$$\begin{cases} P = K_1(T_R - T) + C_1 \frac{dT_R}{dt} & \text{non equilibrio} \\ K_1(T_R - T) = K_2(T - T_a) + C_2 \frac{dT}{dt} \end{cases}$$

ingressi: P , potenza dissipata = comando

T_a = disturbo

Poi c'è un'ulteriore bilancio tra il liquido e l'ambiente esterno.

L'energia termica che entra nel liquido è quella che viene trasmessa, pari a $K_1(T_R - T)$. Parte di questa energia viene ceduta all'esterno, all'ambiente, secondo una legge analoga a quella vista precedente, con un certo coefficiente di trasmissione, C_2 , diverso da C_1 .

$K_1(T_R - T) = K_2(T - T_a)$; in condizioni di equilibrio. Quindi, in equilibrio, il liquido dal punto di vista della generazione di potenze è passivo, riceve potenza e ritrasmette potenza.

In condizioni non di equilibrio c'è, come nel caso precedente, una variazione di temperatura.

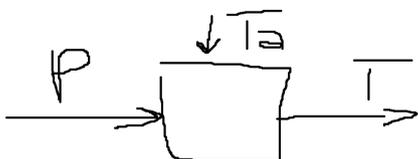
$K_1(T_R - T) = K_2(T - T_a) + C_2 dT/dt$; questa rappresenta il bilancio termico del liquido.

Abbiamo ottenuto una rappresentazione con lo spazio di stato.

Le variabili di stato sono T_R e T , le grandezze che sono derivate nelle equazioni differenziali del primo ordine.

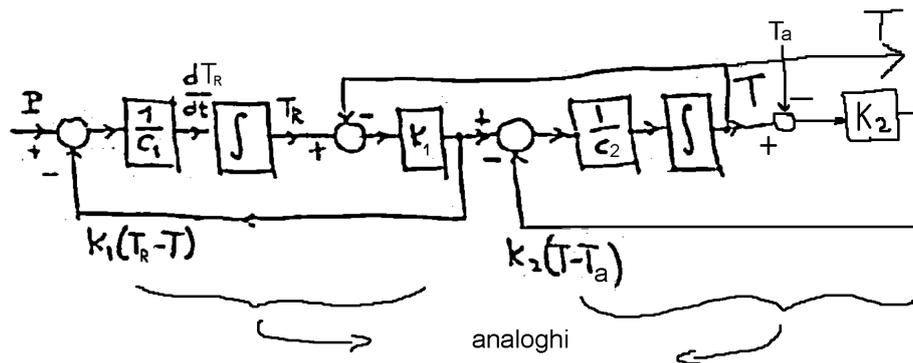
Gli ingressi sono P , che è il comando, e T_a , la temperatura dell'ambiente che è un disturbo. È un disturbo in quanto non c'è nessun modo di controllare la temperatura dell'ambiente. Possiamo controllare la potenza dissipata P intervenendo sul relativo circuito elettronico di comando, ma non possiamo controllare la temperatura dell'ambiente.

Vogliamo mantenere la temperatura del liquido ad un valore desiderato qualsiasi sia la temperatura dell'ambiente.



schema del sistema, del quale fare uno schema dettagliato

Da quello che è uno schema del sistema dobbiamo ottenere uno schema a blocchi dettagliato che descrive come è fatto il modello e come si susseguono le diverse azioni di controllo.



Nello schema si notano due moduli analoghi, ottenuti per mezzo delle due equazioni ricavate in precedenza. I due moduli hanno delle interconnessioni che complicano la successiva semplificazione dello schema.

Questa è la modellistica dello scambiatore di calore e quest'ultimo schema è lo schema dettagliato.

Si ricorda che per descrivere i modelli si possono scrivere delle equazioni di stato, si possono fare degli schemi dettagliati che traducono, operazione per operazione, quello che è scritto nelle equazioni di stato. In tali schemi ad ogni prodotto compare una moltiplicazione per un blocco, ad ogni somma compare il relativo simbolo di somma, ad ogni operazione di derivazione o di integrazione corrisponde il relativo blocco. Dagli schemi dettagliati possiamo inoltre passare a degli schemi semplificati, cosa che faremo nel caso del modello del controllo di temperatura.

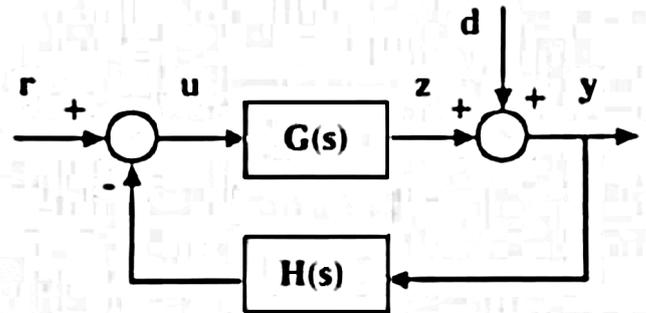
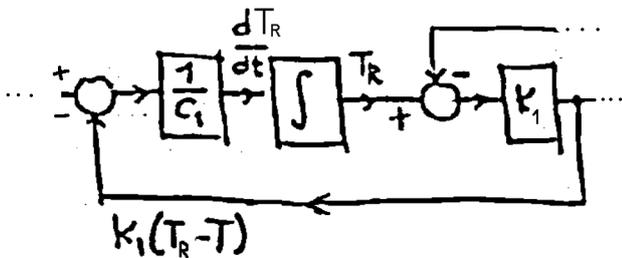
Notiamo che ci sono due anelli, quello con K1 e quello con K2. In questo caso non è facile eliminarli come nel caso del motore: il primo anello è soggetto ad un ingresso che viene dall'esterno, quello in cui si sottrae T, per cui sembra essere un anello a due ingressi. Per semplificarlo dobbiamo fare delle manipolazioni preliminari, a tal fine tratteremo una digressione sugli schemi a blocchi, per determinare la semplificazione degli schemi a blocchi di tale genere.

Digressione sugli schemi a blocchi

Analizzando l'anello abbiamo $1/C$ e successivamente il blocco di integrale, poi entra qualcosa e poi c'è un qualcosa che gira di sotto con un certo blocco (K_1).

Quello che vogliamo ottenere è riuscire ad esprimere con un formalismo generale tutto quello che succede in un blocco di questo genere

Questo schema è simile allo schema successivo, a carattere generale.



Abbiamo il cosiddetto schema base di un controllo a retroazione, di un anello, a destra.

C'è un legame tra u e z, rappresentato da una certa funzione di trasferimento G, in cui G è una funzione generale. L'uscita z viene sommata ad un certo ingresso esterno d, e si ha una uscita y, che viene moltiplicata per una ulteriore funzione di trasferimento H, generica. Il risultato di questa ultima operazione viene portato in sottrazione al riferimento r.

I segni algebrici usati sono convenzionali ed hanno effetto relativo sulla relazione finale, che determina il legame tra r, d e y.

Se essi cambiano allora dovrà essere cambiato il segno alla relativa funzione (H o G), "mutatis mutandis".

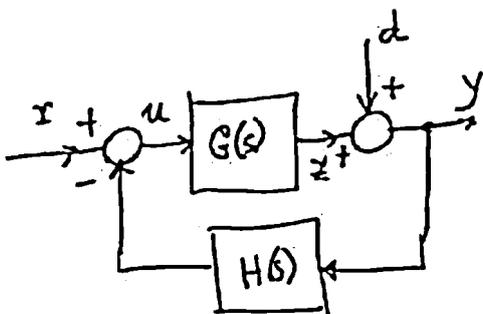
$$y = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}d + \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}r$$

Notare che z non è l'uscita del sistema, ma è una variabile accessoria.

Dallo schema si passa alle equazioni.

Le relazioni sono tutte in termini di trasformata di Laplace.

Per inciso, la trasformata di Laplace della grandezza y è uguale alla trasformata di Laplace della grandezza G più G volte la trasformata di Laplace della grandezza u.

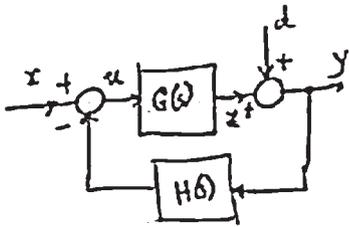


$$\begin{cases} y = d + z = d + G(s)u \\ u = r - H(s)y \end{cases}$$

Abbiamo una prima relazione che esprime il legame tra y, d e u.

Dobbiamo scrivere una seconda relazione che esprime il legame tra u, r e y.

Poi dobbiamo eliminare u, sostituendolo nella prima equazione, ottenendo una equazione $y = \dots$, si raccoglie y da una sola parte e si ottiene la relazione finale, come da immagine successiva.



$$\begin{cases} y = d + z = d + G(s)u \\ u = r - H(s)y \end{cases} \quad \text{eliminare } u$$

$$y = d + G(s)[r - H(s)y]$$

$$y = d + G(s)r - G(s)H(s)y \quad \text{FORMULA DI NOTEVOLE}$$

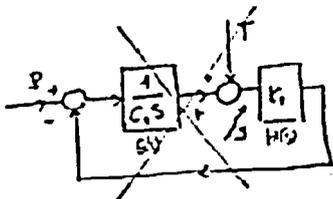
$$[1 + G(s)H(s)]y = d + G(s)r \quad \text{IMPORTANZA.}$$

Questa formula esprime il legame tra l'uscita y del sistema e i due ingressi r e d.

Il primo termine dell'equazione è la funzione di trasferimento tra d e y, tra disturbo e uscita, e rappresentano il modo in cui disturbo influenza l'uscita.

Infatti, il termine d gioca un ruolo di disturbo, il termine r gioca un ruolo di riferimento e questo spiega la terminologia adottata.

Il secondo termine dell'equazione rappresenta il modo in cui il riferimento r influenza l'uscita y.

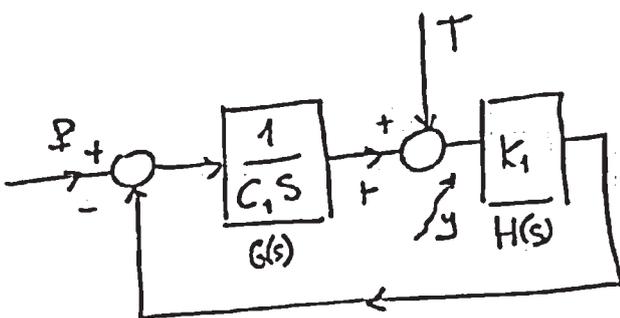


$$y = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} d + \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} r$$

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{C_1 S} K_1} T + \frac{\frac{1}{C_1 S}}{1 + \frac{K_1}{C_1 S}} P = \frac{C_1 S}{C_1 S + K_1} T + \frac{1}{C_1 S + K_1} P$$

Applicando quanto visto al modello di regolazione della temperatura, abbiamo quanto segue.

Questa è la formula finale.



Questo significa che dallo schema iniziale con l'anello possono ottenere uno equivalente semplificato.

Si parte da P per generare il relativo termine, poi si parte da T per generare il relativo termine, poi si somma e si concatena, ottenendo uno schema equivalente semplificato.

Lo schema risulta più semplice perché non ci sono anelli che si chiudono. Le funzioni di trasferimento, però, sono più complesse in quanto questo è quello che succede quando si eliminano delle variabili.

□

Prof. Alberto Isidori
41'04"

Proseguiamo con l'analisi del modello di un regolatore di temperatura.

Nella scorsa lezione abbiamo visto che il modello è uno schema complicato, abbiamo cercato di semplificarlo eseguendo alcune manipolazioni degli schemi a blocchi.

In questa lezione vedremo un ulteriore metodo di semplificazione, usando le equazioni di stato, le rappresentazioni con lo spazio di stato, per passare da una descrizione del sistema in termini di equazioni del primo ordine a una descrizione del sistema in termini di funzioni di trasferimento.

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dT_R}{dt} &= [P - K_1(T_R - T)] \\
 C_2 \frac{dT}{dt} &= K_1(T_R - T) - K_2(T - T_a)
 \end{aligned}
 \quad \begin{array}{l} \text{equazioni di} \\ \text{stato} \\ y = T \end{array}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

Ricordiamo il bilancio termico per il riscaldatore. La variazione di temperatura moltiplicata per la capacità termica è uguale alla potenza erogata dal riscaldatore P meno la potenza trasmessa al liquido riscaldato, pari a $K_1(T_R - T)$. T_R è la temperatura del riscaldatore, T è la temperatura del liquido che viene riscaldato.

C'è una seconda equazione, riguarda il bilancio termico del liquido riscaldato. La variazione di temperatura moltiplicata per la capacità termica è uguale alla potenza trasmessa dalla riscaldatore meno la potenza erogata all'esterno, proporzionale secondo un coefficiente di trasmissione K_2 alla differenza tra la temperatura del liquido e la temperatura dell'ambiente.

Le due equazioni sono equazioni differenziali del primo ordine e quindi equazione di stato del sistema.

Vogliamo manipolare le due equazioni di stato in maniera tale da arrivare a poter scrivere l'espressione delle funzioni di trasferimento che legano gli ingressi al nostro sistema, ovvero la potenza immessa dal riscaldatore e la temperatura dell'ambiente che è una

grandezza indipendente e svolge il ruolo di disturbo, all'uscita del sistema che è la grandezza che vogliamo controllare, ovvero la temperatura del liquido, che si vuole mantenere costante. Quindi $y = T$.

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_R}{dt} &= \frac{1}{C_1} [P - K_1(T_R - T)] \\
 \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{C_2} [K_1(T_R - T) - K_2(T - T_a)]
 \end{aligned}
 \quad \begin{array}{l} \text{equazioni di} \\ \text{stato} \\ y = T \end{array}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

A questo punto passiamo al formalismo delle variabili di stato, che comporta scrivere equazione nella forma $\dot{x} = Ax + Bu$, dove x è lo stato, u all'ingresso e $y = Cx$ è l'uscita.

Per fare questo dobbiamo introdurre il vettore x , calcolare la matrice A , e scrivere le equazioni conseguenti.

L'ingresso u è un vettore a due componenti, P e T_a .

Il vettore di stato x è un vettore a due componenti, T_r e T .

L'uscita y è un vettore ad una sola componente, ed è la grandezza T .

$$x = \begin{bmatrix} T_r \\ T \end{bmatrix}$$

Questo è il vettore di stato.

Per ottenere la forma desiderata occorre dividere per C_1 ambo i membri della prima equazione e per C_2 ambo i membri della seconda equazione. In questo modo isoliamo la derivata al primo membro (vd. figura precedente relativa).

Fatto questo possiamo iniziare a leggere come è fatta l'equazione di stato.

equazioni di stato

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{1}{C_1} [P - K_1(T_r - T)]$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_2} [K_1(T_r - T) - K_2(T - T_a)]$$

$y = T$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_r \\ \dot{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{K_1}{C_1} & \frac{K_1}{C_1} \\ \frac{K_1}{C_2} & (-\frac{K_1}{C_2} - \frac{K_2}{C_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_r \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{K_2}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ T_a \end{pmatrix}$$

$x = \begin{bmatrix} T_r \\ T \end{bmatrix}$

$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_r \\ T \end{pmatrix}$

$\dot{x} = Ax + Bu$ $y = T$ x B u

La matrice A ha 4 elementi. Dal prodotto righe per colonne otteniamo i termini delle due equazioni. Le righe sono i coefficienti che moltiplicano le variabili di stato, che sono il vettore colonna x .

L'equazione che descrive \dot{T}_r , ovvero dT_r/dT , è la prima riga della matrice A per il vettore colonna x , vettore di stato.

L'equazione che descrive \dot{T} , ovvero dT/dt , ovvero "T punto", si ottiene dalla lettura della stessa; dobbiamo ottenere T_r che moltiplica il coefficiente K_1 e $1/C_2$, quindi come primo elemento della seconda riga della matrice A mettiamo K_1/C_2 .

La dipendenza da T compare in due modi, con un $-K_1/C_2$ e con il coefficiente $-K_2/C_2$.
 In questo modo, scrivendo la seconda riga della matrice A , abbiamo sistemato la dipendenza di \dot{T} da T_R e da T .

Rimane la dipendenza da T_a , nella matrice B , con un K_2/C_2 .

Poi c'è uno 0 che moltiplica P .

Quello che abbiamo ottenuto è l'equazione scritta in dettaglio $\dot{x} = Ax + Bu$ per lo scambiatore di calore. Due componenti dello stato x .

L'equazione $y = Cx$, che fornisce l'uscita, è molto semplice.

y è la temperatura, la temperatura è una delle componenti dello stato, quindi quello che scriviamo è semplicemente un vettore riga che moltiplica un vettore colonna, cioè $(0 \ 1)(TR \ T)^{-1}$, che corrisponde a $y = T$.

Quindi questa è la descrizione con lo spazio di stato dello scambiatore di calore, con gli ingressi che abbiamo definito.

$$W(s) = \underset{1 \times 2}{C} \underset{2 \times 2}{(sI - A)^{-1}} \underset{2 \times 2}{B} = \left[\underset{P}{W(s)}, \underset{T_a}{W(s)} \right]$$

Questo passaggio è stato fatto in quanto sappiamo che la funzione di trasferimento del sistema, descritto in generale dalla forma $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, è $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

Facendo questo calcolo abbiamo la funzione di trasferimento, la funzione di trasferimento dello schema che stiamo studiando. C è un vettore riga; l'oggetto fra parentesi è una matrice 2×2 ; la quantità B è una matrice 2×2 . Quindi il risultato sarà un vettore 1×2 , per cui W avrà due componenti.

Chiamiamo la prima componente $W_p(s)$, con pedice p per ricordare che rappresenta influenza dell'ingresso P sull'uscita y del sistema.

Chiamiamo la seconda componente $W_{T_a}(s)$, che rappresenta l'influenza della temperatura dell'ambiente sulla uscita del sistema.

A questo punto occorre fare i conti.

Per prima cosa deve essere calcolata la matrice $sI - A$.

sI è la matrice che ha il numero complesso s sulla diagonale.

Determinata la matrice $sI - A$, occorre calcolarne la trasposta.

Si deve calcolare il determinante, dividere per il determinante e moltiplicare per la matrice dei complementi algebrici.

Il determinante è un polinomio di secondo grado, scritto genericamente come $s^2 + a_1s + a_0$.

Per quanto riguarda la matrice dei complementi algebrici, nel caso di una matrice 2×2 , gli elementi sulla diagonale vengono scambiati di posto, gli altri due elementi vengono moltiplicati per -1 , cioè vengono cambiati di segno.

Avendo tutti gli elementi possiamo fare la moltiplicazione $C(sI - A)^{-1}B$.

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} W_P(s) & W_{T_R}(s) \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{d(s)} \begin{pmatrix} s + \frac{k_1}{c_1} & \frac{k_1}{c_1} \\ -\frac{k_1}{c_2} & s + \frac{k_1 + k_2}{c_2} \end{pmatrix}$$

$d(s) = \det(sI - A) = \left(s + \frac{k_1}{c_1}\right)\left(s + \frac{k_1 + k_2}{c_2}\right) - \frac{k_1^2}{c_1 c_2} = s^2 + a_1 s + a_0$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La presenza di 0 aiuta i calcoli.

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} W_P(s) & W_{T_R}(s) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{d(s)} \begin{pmatrix} \frac{k_1}{c_2} & \vdots & s + \frac{k_1}{c_1} \end{pmatrix}$$

è una riga, B è una matrice 2 x 2

$$W(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{pmatrix} \frac{k_1}{c_1 c_2} & \vdots & \frac{k_2}{c_2} \left(s + \frac{k_1}{c_1}\right) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{k_1}{c_1 c_2} & \vdots & \frac{k_2}{c_2} \left(s + \frac{k_1}{c_1}\right) \\ d(s) & & d(s) \end{pmatrix}$$

Da questo si nota come i due termini della prima riga di $(sI - A)^{-1}$ non giocano nessun ruolo nella matrice di trasferimento.

Per ottenere $W(s)$ devo moltiplicare il risultato ottenuto per B.

A lato $W(s)$ finale, la matrice delle funzioni di trasferimento, formata da due funzioni razionali.

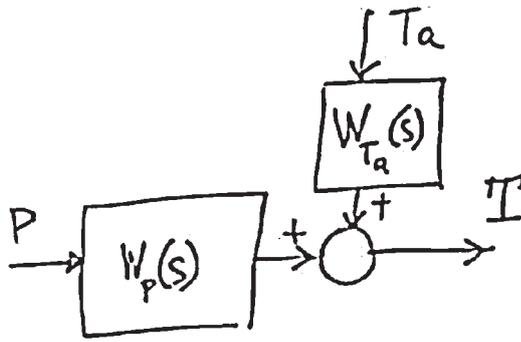
La prima ha per numeratore una costante e per denominatore un polinomio di secondo grado.

La seconda funzione razionale ha per numeratore un polinomio di primo grado e per denominatore un polinomio di secondo grado.

Tutte cose previste dalla teoria dei sistemi.

La prima funzione è la funzione che lega la potenza P all'uscita, la seconda funzione

è la funzione che lega la temperatura dell'ambiente T_a all'uscita.

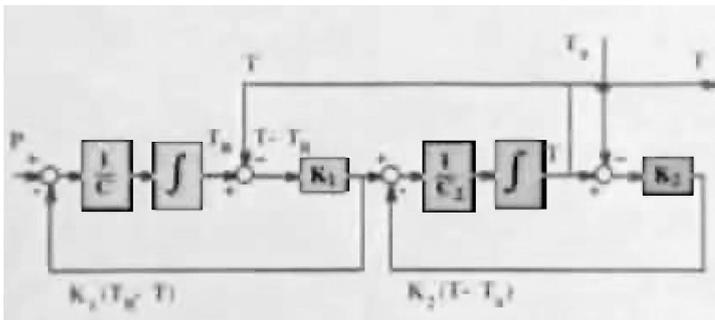


Si può realizzare lo schema sintetico per indicare i legami di dipendenza funzionale fra le grandezze.

Entrano P e T_a . P viene moltiplicato per la funzione $W_P(s)$, T_a viene moltiplicato per la funzione $W_{T_a}(s)$. Le quantità vengono sommate e quello che si ottiene la temperatura T , l'uscita dello scambiatore di calore.

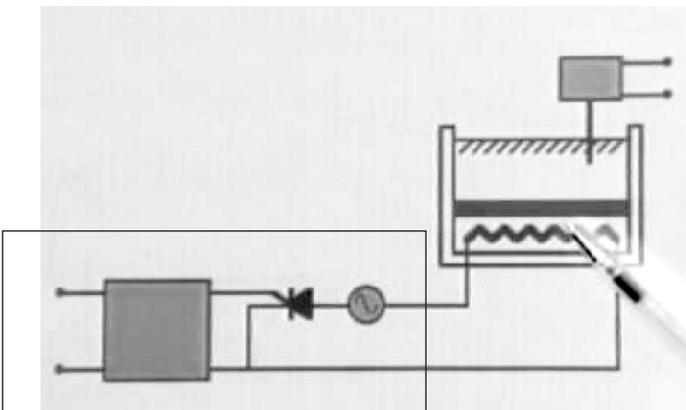
Questo è un modo di semplificare lo schema alternativo a quello già visto.

Questa è un'alternativa allo scrivere la semplificazione applicando la metodologia vista quando abbiamo un anello.



Lo schema con anelli.

Ora descriveremo un ulteriore elemento del sistema.



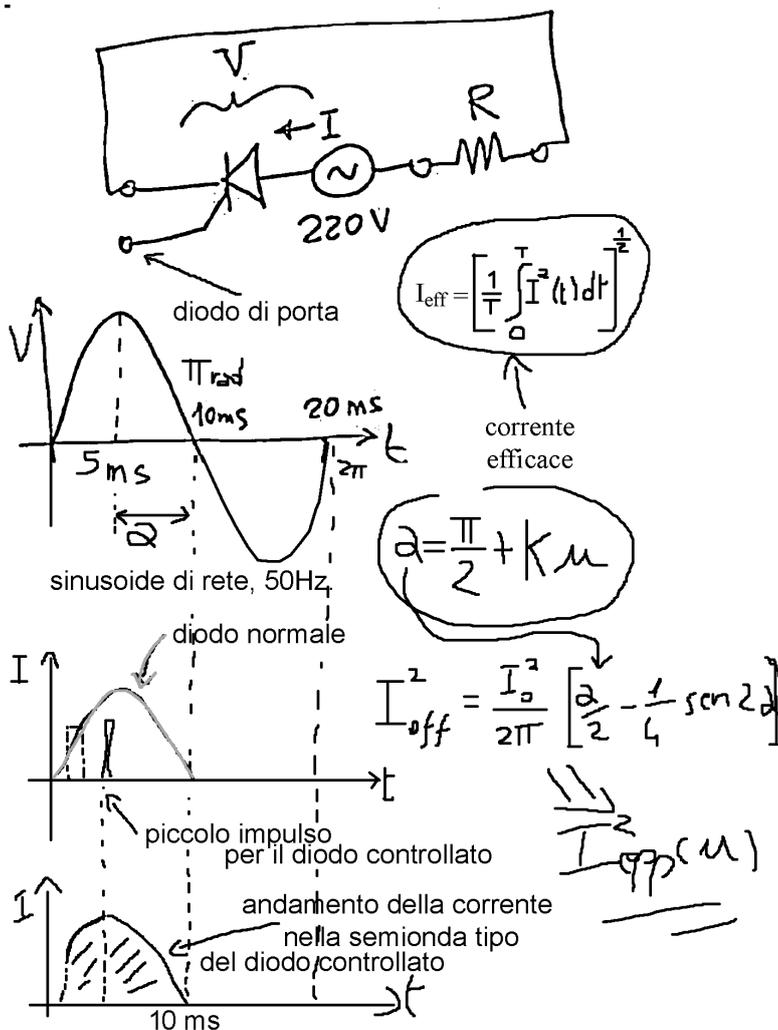
Un modello di alimentatore a diodi controllati.

Riprendendo lo schema del sistema di controllo, abbiamo lo scambiatore, di cui abbiamo fatto la modellistica, e poi abbiamo l'alimentatore che alimenta un diodo controllato che serve a controllare la corrente che fluisce nel riscaldatore in modo tale che la temperatura venga regolata al livello voluto.

Il problema tecnologico che si pone è quello di poter variare la temperatura nella resistenza che riscalda il liquido in maniera il più possibile economica, senza dissipare troppo potenza nel processo di controllo. La potenza deve essere dissipata nel riscaldatore, ma non vogliamo che il rendimento sia basso. Non vogliamo che il dispositivo che controlla la corrente circolante nella resistenza che scalda il liquido sia un dispositivo in cui si perde potenza.

Tale problema può essere risolto con l'uso di un diodo controllato.

Un diodo è un dispositivo che fa passare corrente in un certo verso. Abbiamo un alimentatore in corrente alternata, di tensione 220V. Nel diodo controllato è presente un terzo elettrodo che ha funzione di porta, mettendo il diodo in conduzione solo in certe condizioni e non solo quando la tensione è positiva a valle e a monte del diodo, ma



anche quando arriva un certo segnale sull'elettrodo di porta, che in figura è quello libero.

Per aiutarci, tracciamo i grafici che illustrano la dipendenza fra la tensione e la corrente in funzione del tempo.

In un diodo normale nella semionda positiva la corrente passa sarà limitata dalla resistenza interna del diodo che in genere è piuttosto bassa, quindi sarà limitata dalla resistenza R del riscaldatore.

Nei diodi controllati la corrente non può passare finché non arriva un comando (o controllo) sul diodo di porta. Il comando è un piccolo impulso. La corrente non passa finché non arriva all'impulso, in quel momento il diodo si comporta come un diodo ordinario, prima dell'arrivo dell'impulso il diodo si comporta come un circuito aperto. Quando la tensione si inverte il diodo si spegne.

Quindi per controllare la quantità di corrente che passa, visto che a noi interessa controllare la potenza che si dissipa nel riscaldatore, quindi il valore efficace, quindi l'area della figura, occorre posizionare diversamente l'impulso di comando, ponendolo prima e ottenendo una sinusoide di conduzione un po' più ampia.

Normalmente si vuole controllare la potenza che si dissipa, in un senso e nell'altro. Rispetto ad un quantitativo nominale di potenza si deve poter far salire e scendere. Questo significa che il posizionamento del segnale di comando si deve collocare rispetto a 5 millisecondi, a metà della semionda positiva, un po' più avanti è un po' più indietro. Interessa il valore della corrente efficace, che è pari alla media sull'intervallo di conduzione del quadrato della corrente effettiva.

Dato α come in figura, ci sarà un angolo α di $\pi/2$, più una certa quantità proporzionale al comando, $K\mu$.

Per determinare come la potenza sia legata all'angolo di comando occorre fare l'integrale.

Il valore dell'integrale è $I_{eff}^2 = I_0^2/2\pi [\alpha/2 - \sin(2\alpha)/4]$.

Sostituendo il valore di α in tale risultato otterremo la dipendenza della corrente efficace dal comando μ all'ingresso dell'amplificatore.

$$I_{eff}^2 = \frac{I_0^2}{2\pi} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right]$$

Tale formula è semplificabile in quanto se il valore di α è abbastanza piccolo possiamo approssimare il seno con l'angolo.

$$I_{eff}^2(u)$$

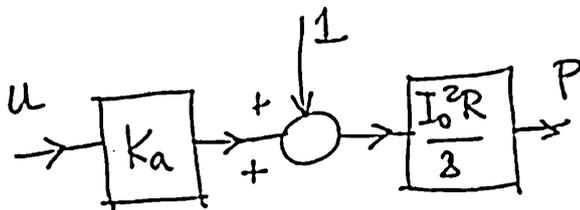
$$\sin 2\alpha \approx 2\alpha$$

$$I_{eff}^2(u) \approx \frac{I_0^2}{8} [1 + K_a u]$$

L'espressione della dipendenza della corrente efficace dal comando u si semplifica come scritto a lato.

$$P = R I_{eff}^2(u) \approx \frac{I_0^2 R}{8} [1 + K_a u]$$

La potenza dissipata è pari a R volte la corrente efficace.



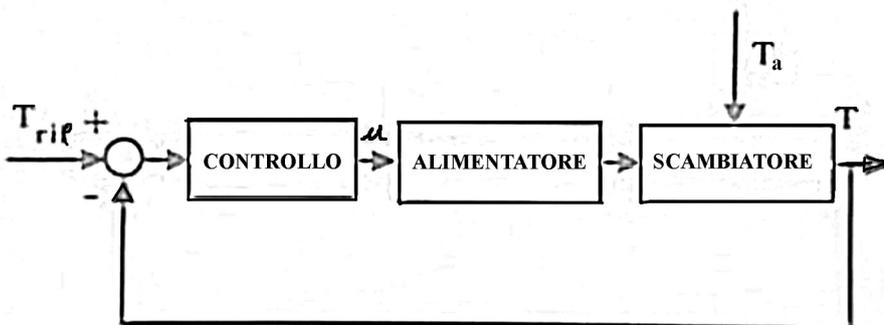
Dal punto di vista del controllo, il dispositivo si comporta come uno schema come riportato a lato.

Entra u che viene moltiplicato per K_a . Poi viene aggiunto un 1. Poi tutto è moltiplicato per il successivo termine e si ottiene la potenza P .

Questo è lo schema a blocchi dello scambiatore di calore.

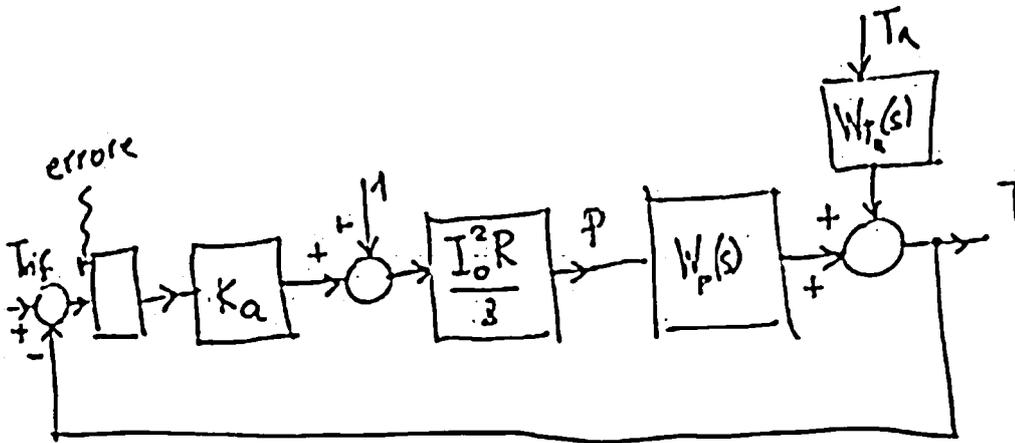
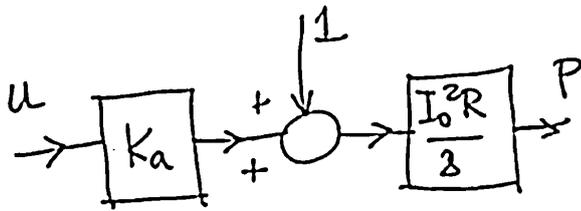
Così come abbiamo fatto la volta scorsa possiamo passare a completare lo schema, disegnando come è fatto il controllo a retroazione, che è composto da tre parti.

La grandezza u proviene come uscita di un sistema di controllo il quale è attivato dalla grandezza di errore, ovvero la differenza fra la temperatura di riferimento, quella che si vuole mantenere nello scambiatore di calore, e la temperatura effettiva.



Passando allo schema dettagliato, peraltro semplice, otteniamo quanto segue.

Si riporta lo schema a lato, al quale si fa seguire quello dello scambiatore di calore, ottenendo quanto segue.



Quello che abbiamo ottenuto è lo schema del sistema di controllo di temperatura.

A questo punto, da quanto abbiamo ottenuto, dobbiamo trarre delle considerazioni quantitative.

Le prime analisi quantitative sono le equazioni di equilibrio.

Nel caso in esame, le equazioni di equilibrio sono semplici anche se lo schema a blocchi non lo è.

Nello scambiatore, se ci troviamo in equilibrio, le temperature sono costanti e quindi la potenza dissipata nella resistenza viene tutta trasmessa, secondo un certo coefficiente K_1 , al liquido che deve essere riscaldato.

Questo si formalizza nella relazione $P = K_1(T_R - T)$. Questa è l'equazione che rappresenta il bilancio termico tra il riscaldatore e il liquido in condizioni di equilibrio.

C'è anche un bilancio termico in condizioni di equilibrio tra il liquido e l'ambiente, per cui, la stessa potenza K_1 viene tutta ceduta all'esterno secondo un coefficiente K_2 , che è proporzionale alla temperatura del liquido e alla temperatura dell'ambiente.

Questo si formalizza nella relazione $K_1(T_R - T) = K_2(T - T_a)$.

Dobbiamo eliminare la quantità T_R che è una variabile intermedia, in realtà possiamo eliminare tutto il prodotto.

Quello che otteniamo è $P = K_2(T - T_a)$. Questa è l'equazione all'equilibrio.

Quindi all'equilibrio la temperatura T è legata a T_a e a P dalla semplicissima relazione $P = K_2(T - T_a)$.

$$\left. \begin{aligned} P &= K_1 (T_R - T) \\ K_1 (T_R - T) &= K_2 (T - T_a) \end{aligned} \right\} P = K_2 (T - T_a)$$

Il successivo passo sarà quello di vedere le altre equazioni di equilibrio, quelle che riguardano l'elemento di controllo della corrente.

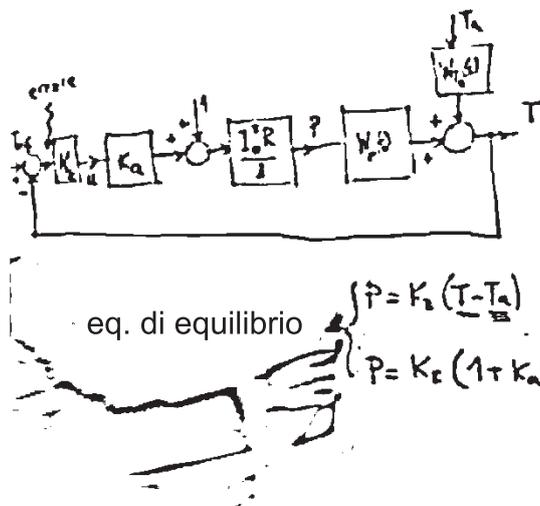
Verrà scritto che l'errore è uguale alla temperatura di riferimento meno la temperatura effettiva e questa sarà espressa in funzione delle altre grandezze d'ingresso.

□

Prof. Alberto Isidori
40'42"

Concludiamo con questa lezione l'analisi della situazione di equilibrio del regolatore di temperatura. Rimane da aggiungere una coppia di equazioni e poi passare alle analisi quantitative.

Vd.(1) la relazione tra la temperatura del liquido, quella dell'ambiente, e la potenza. Dobbiamo poi scrivere le altre equazione di equilibrio.



eq. di equilibrio

$$\begin{cases} \dot{P} = K_2 (T - T_a) \\ P = K_c (1 + K_a K_c (T_{rif} - T)) \end{cases} \quad (1)$$

La potenza P è uguale a un certo coefficiente ($I_0^2 R / 8 = K_r$) che moltiplica quello che viene in ingresso.

Il comando u è proporzionale all'errore secondo un certo coefficiente K_c . Per esprimere questa grandezza basta scrivere $1 + K_a K_c$ che moltiplica l'errore, che è la differenza tra la temperatura di riferimento e quella effettiva.

Le equazioni di equilibrio sono due, e molto semplici.

$$K_2 T - K_2 T_a =$$

$$K_r + K_r K_a K_c T_{rif} - K_r K_a K_c T$$

Per sapere ora come la temperatura in uscita, la grandezza T, è legata ai due ingressi, cioè il disturbo T_a e la temperatura di riferimento T_{rif} basta eliminare la variabile P, scrivendo l'uguaglianza fra i due membri delle due equazioni e risolvendo in T.

$$T = \frac{K_R K_a K_c}{K_2 + K_R K_a K_c} T_{rif} + \frac{K_R + K_2 T_a}{K_2 + K_R K_a K_c}$$

Risultato finale.

È l'espressione della temperatura, l'uscita del sistema, in funzione degli ingressi, il disturbo T_a e T_{rif} .

A questo punto possiamo trarre delle conclusioni relative alle prime analisi quantitative sulle proprietà del controllo a retroazione.

Tali conclusioni sono molto simili a quanto già visto per altri esempi.

Quanto più K_a e K_c sono grandi, tanto più l'errore è piccolo (*di nuovo*), ovvero $T - T_{rif}$ tende a 0.

Questo risultato è rilevante in quanto vale a prescindere di quali siano i valori degli altri coefficienti. In particolare quali siano i valori del coefficiente K_r che tiene conto in qual-

che modo della temperatura del riscaldatore, e quale sia i valori due coefficienti K_1 e K_2 che tengono conto della trasmissione del calore.

Il vantaggio della retroazione è quello di produrre una protezione dai disturbi: la temperatura esterna rappresenta un disturbo del sistema, la temperatura del liquido deve essere la stessa qualunque sia la temperatura esterna. La formula dimostra che scegliendo K_a e K_c molto grandi l'effetto della temperatura esterna sull'errore può essere reso arbitrariamente basso.

Un altro vantaggio è la protezione da errori di modello: se il coefficiente K_r , che tiene conto dei parametri del riscaldatore, e se il coefficiente K_2 che tiene conto dei parametri dello scambiatore di calore, variano nel tempo oppure non sono conosciuti esattamente, non importa. Scegliendo K_a e K_c molto grandi possiamo avvicinare il più possibile il valore della temperatura effettiva a quella di riferimento.

Ma dobbiamo fare attenzione a non scegliere valori troppo grandi altrimenti c'è il rischio di andare verso l'instabilità.

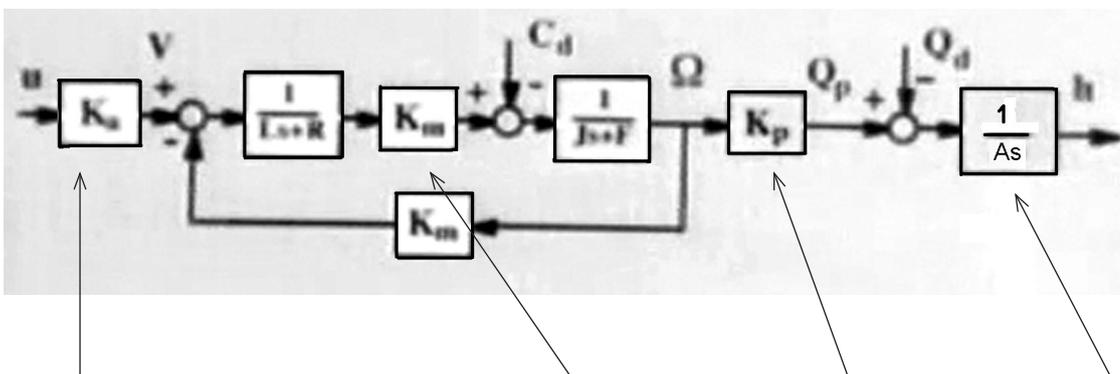
ATTENZIONE!

Perché K_a e K_c non possono essere arbitrariamente grandi?

Semplicemente per limiti tecnici. K_c si è il coefficiente di amplificazione di un dispositivo che compare nel sistema di controllo. Non è detto che si possano mettere di valori arbitrariamente elevato, ci sono dei limiti, ci sono delle saturazioni. Se si tratta di un amplificatore elettrico esso è alimentato da una certa tensione, di circa 20V. I valori dell'uscita non possono essere aumentati arbitrariamente, non possiamo aumentare arbitrariamente il valore del guadagno.

C'è inoltre un ulteriore limite sostanziale, di tipo sistemistico, che è la perdita di stabilità.

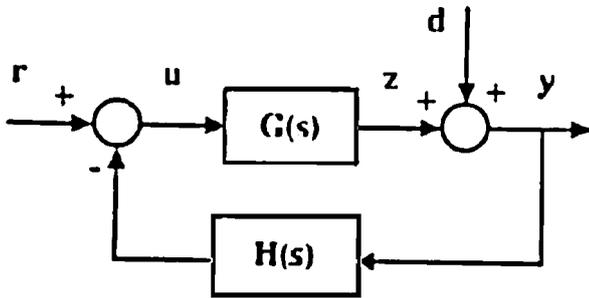
Vediamo dunque un esempio di cosa succede quando si aumentano troppo i valori dei coefficienti di guadagno che sono presenti nell'anello di reazione, riprendendo l'esempio del controllo di livello, dalla lezione 16, partendo dallo schema sotto riportato.



amplificatore - motore che comanda la pompa - la pompa - riempimento serbatoio

Partendo dallo schema faremo una analisi di stabilità e vedremo che se il valore di K_a è troppo elevato il sistema può diventare instabile.

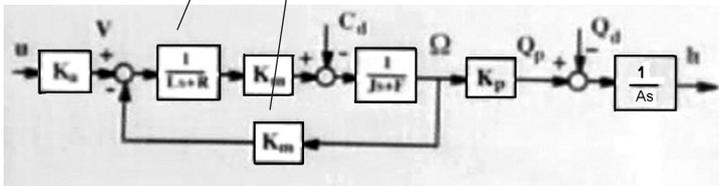
Per fare l'analisi di stabilità occorre semplificare lo schema e occorre passare alla funzione di trasferimento, calcolare il denominatore e calcolare i poli del sistema stesso e per fare questo occorre fare delle semplificazioni.



Poiché abbiamo un anello elementare, del tipo degli anelli elementari visti in precedenza (figura a lato), applicheremo la relativa formula.

$$y = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} d + \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} r$$

$G/(1 + GH)$ è la funzione di trasferimento da r a y , in un anello elementare di tale tipo.



Osservando le similitudini con il caso in esame, possiamo applicare la formula e procedere con l'analisi di stabilità.



Il motore e la sua rappresentazione, nella forma $G / (1 + GH)$.

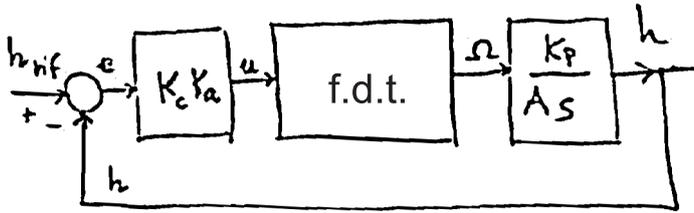
$Ls + R$ è l'impedenza elettrica.

$Js + F$ è l'impedenza meccanica.

Questa è la funzione di trasferimento dal punto u al punto Ω . La funzione può essere semplificata.

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{k_m}{(Ls+R)(Js+F)}}{1 + \frac{k_m^2}{(Ls+R)(Js+F)}} =$$

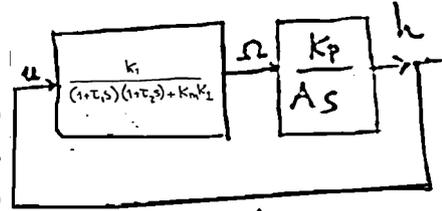
$$= \frac{k_m}{(Ls+R)(Js+F) + k_m^2} = \text{f.d.t.} \text{ Questa è la funzione che deve comparire nel blocco.}$$



Per fare l'analisi di stabilità si può riscrivere la funzione di trasferimento in una nuova forma.

schema complessivo del regolatore di livello nel serbatoio

Ottenuto lo schema a lato, esso può essere ulteriormente semplificato passando ad uno schema in cui nel ramo che va dall'errore verso l'uscita ci sta un blocco solo.



$$\frac{k_1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K_m K_1} = \frac{K_m / R F}{(s + R)(J s + F) + K_m^2 / R F}$$

$$k_1 = \frac{K_m}{R F} \quad \tau_1 = \frac{L}{R} \quad \tau_2 = \frac{J}{F}$$

Si chiami K il prodotto $K_c K_a$, e K_2 il prodotto nell'ultimo blocco a destra.

τ_1 costante di tempo del circuito di armatura
 τ_2 costante di tempo associata alla impedenza meccanica

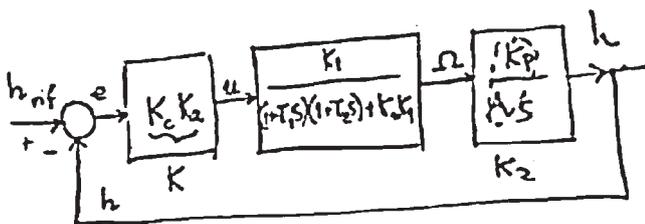
Quello che si ottiene è la descrizione più sintetica possibile del sistema.

Si noti che nel fare questi conti è stato trascurato l'effetto del disturbo, cioè la portata che tendeva a svuotare il serbatoio.

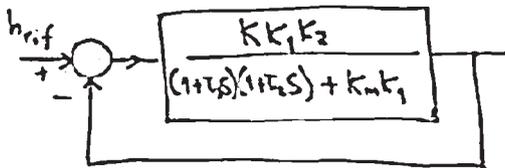
Questo perché l'interesse è verso una analisi della stabilità, per la quale non occorre tener conto degli ingressi agenti sul sistema, cioè dei segnali agenti sul sistema, ma basta vedere le proprietà delle funzioni di trasferimento.

Per analizzare la stabilità, occorre vedere la collocazione sul piano complesso dei poli della funzione di trasferimento.

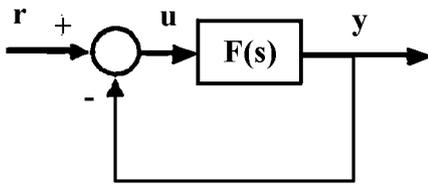
Se tali poli sono tutti a sinistra dell'asse immaginario del piano complesso, il sistema è stabile, altrimenti non lo è.



Dallo schema a fianco dobbiamo passare alla funzione di trasferimento per poterne esaminare i poli.



A tal fine useremo delle relative alla manipolazione degli schemi a blocchi, come indicato di seguito.



$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

Nello schema accanto abbiamo un blocco caratterizzato da una unica funzione $F(s)$, una uscita y , un ingresso u , un riferimento r , e un'operazione algebrica. Questo schema è un caso particolare di quello visto in precedenza, in cui le funzioni erano due, $G(s)$ e $H(s)$. In questo caso la funzione $H(s)$ è unitaria, quindi la funzione di trasferimento tra il riferimento r e l'uscita y è semplicemente pari a $W(s) = F(s) / (1 + F(s))$.

Per quanto riguarda l'analisi di stabilità è utile ricordare che la funzione $F(s)$ è un rapporto di polinomi, con un numeratore ed un denominatore, rispettivamente $N(s)$ e $D(s)$. Quindi nella funzione $W(s)$ posso sostituire $F(s)$ con l'esplicitazione rappresentata dal rapporto di polinomi e ottengo la funzione di trasferimento finale $W(s)$, tra riferimento e uscita, in funzione del numeratore e del denominatore di $F(s)$.

La formula finale ottenuta dice che, prendendo un anello elementare a retroazione del tipo indicato in figura, il numeratore della funzione di trasferimento è il numeratore della funzione $F(s)$ e questo vuol dire che gli zeri della funzione di trasferimento ingresso / uscita del sistema sono uguali agli zeri della funzione F che caratterizza il sistema che sta all'interno dell'anello.

Viceversa, i poli della funzione di trasferimento ingresso / uscita del sistema sono pari alle radici del polinomio $D(s) + N(s)$.

Quello che faremo è analizzare la struttura del polinomio, al fine di determinare la stabilità.

$$\frac{K K_1 K_2}{[(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s) + k_m k_i] s}$$

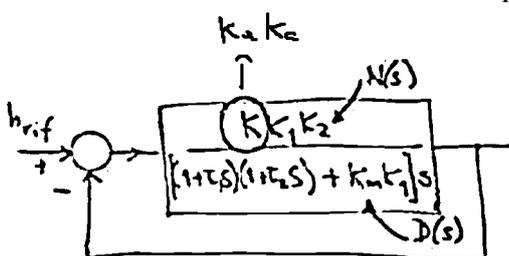
aggiunto s
per tenere conto del riempimento
del serbatoio

D(s)

$$D(s) + N(s) = s[(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s) + k_m k_i] + K K_1 K_2$$

$$= A[s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0] K$$

comparare solo qui



Il polinomio in esame è un polinomio di terzo grado in s , che può essere scritto in una forma generica.

Si deve notare che il guadagno del sistema è il coefficiente K , che compare solamente nel termine noto dell'equazione $D(s) + N(s)$.

Tutti gli altri parametri sono della pompa o del motore o del serbatoio, invece l'amplificatore che alimenta il motore, cioè il controllore, è caratterizzato da un guadagno $K_a K_c$ che è stato definito il coefficiente K .

Poiché vogliamo vedere come il coefficiente K influenza la stabilità, K viene tenuto separato e moltiplica un coefficiente generico a_0 .

$$D(s) + N(s) = s[(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K_m k_1] + \frac{K}{s} K_1 K_2$$

$$= A[s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 k]$$

Studiare la stabilità (Routh)

1	a_1
a_2	$a_0 k$
$\frac{a_2 a_1 - a_0 k}{a_2}$	
$a_0 k$	

1a colonna

CONDIZIONI DI STABILITA'

$$a_2 > 0$$

$$a_2 a_1 - a_0 k > 0$$

$$a_0 k > 0$$

Il problema diventa quello di studiare la stabilità di un sistema la cui equazione caratteristica è un'equazione del terzo grado nella forma come indicata in figura a lato. Il coefficiente A non ci interessa in quanto ci interessano le radici, che dipendono solamente dal polinomio dentro le parentesi quadre.

Un criterio molto semplice, pratico è conveniente per polinomi di grado non elevato, per studiare la stabilità è il criterio di Routh.

Tale criterio prevede il calcolo di una certa tabella, in cui vanno presi coefficienti del

polinomio, vanno ordinati e su questi fare certe operazioni.

Devo prendere i coefficienti dispari e metterli sulla prima riga della tabella: quindi 1 che è il coefficiente di s^3 e a_1 .

La seconda riga è formata dai coefficienti di posto pari. Poi tabella di Routh continua e il coefficiente che sta al primo posto nella terza riga è calcolato come il rapporto tra il determinante della matrice 2×2 sopra, cambiato di segno e il coefficiente sopra (a_2).

La stessa regola vale per la quarta riga.

1	a_1
a_2	$a_0 k$
$\frac{a_2 a_1 - a_0 k}{a_2}$	
$a_0 k$	

Questa è la tabella di Routh del polinomio caratteristico in esame.

Il criterio di Routh dice che le radici dell'equazione caratteristica sono tutte con parte reale negativa (e quindi il sistema è stabile asintoticamente) se e solo se gli elementi che stanno sulla prima colonna sono tutti elementi positivi.

Quindi quello che dobbiamo fare è imporre

la positività di tali elementi.

La prima riga è una costante positiva e non interessa. Quindi le condizioni sono tre.

Per la seconda riga della tabella si impone $a_2 > 0$.

Per la terza riga della tabella, avendo già imposto $a_2 > 0$, basta imporre positivo il numeratore, cioè $a_2 a_1 - a_0 k > 0$.

Per la quarta riga della tabella si impone $a_0 k > 0$.

Se e solo se valgono le tre disuguaglianze allora il sistema è stabile.

Il termine a_2 dipende da certi parametri del sistema, il prodotto fra τ_1 e τ_2 , che sono due numeri positivi perché sono rapporti di costanti fisiche, resistenza, induttanza, coefficiente di attrito, momento di inerzia. Quindi la prima condizione è soddisfatta.

Per quanto riguarda la terza condizione $a_0 k > 0$, il termine a_0 è il prodotto di due coefficienti K_1 e K_2 che contengono il parametro di guadagno del motore, il parametro di guadagno della pompa e sono numeri positivi anch'essi. Quindi se a_0 è positivo allora

deve essere positivo anche K. Questo è realizzabile attraverso la costruzione dell'amplificatore.

Ottenuta le due condizioni di positività, la prima e la terza, per quanto riguarda la seconda, essa è la più importante di tutte. Facendo un semplice calcolo otteniamo che $a_2 a_1 / a_0 > K$.

I parametri a_2, a_1, a_0 sono tutti positivi perché legati a parametri fisici del sistema.

Il parametro K è quello che possiamo scegliere.

Per rendere piccolo l'errore K dovrebbe essere elevato, ma non deve essere troppo elevato altrimenti avremmo instabilità nel sistema.

$$\frac{a_2 a_1}{a_0} > K > 0$$

$$a_2 > 0$$

$$a_2 a_1 - a_0 K > 0$$

$$K \text{ positivo} \leftarrow$$

$$a_0 K > 0$$

In sostanza, ricapitolando:
Per un'equazione caratteristica

$$s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + k a_0 = 0$$

si ha stabilità se e solo se

$$a_2 > 0 \quad k a_0 > 0 \quad k < \frac{a_1 a_2}{a_0}$$

In pratica quello che si ottiene dall'analisi è che abbiamo un limite alle prestazioni del sistema. Il valore di K non può essere scelto arbitrariamente elevato, con lo scopo di rendere l'errore arbitrariamente piccolo, perché altrimenti il sistema diverrebbe instabile. Questo dualismo tra stabilità e precisione è uno dei problemi che cercheremo di risolvere con metodi più sofisticati nel seguito del corso.



Fino a questo punto abbiamo analizzato tre semplici schemi elementari di controllo, illustrandone i componenti fondamentali di ogni schema, ma, soprattutto, per ognuno dei componenti fondamentali abbiamo fatto dei modelli e a partire da parametri di tali modelli siamo stati in grado di trarre delle prime considerazioni quantitative.

In particolare di vedere come le grandezze che ci interessano, in particolare l'errore, sia legato ai parametri il sistema stesso, e ai parametri a disposizione del progettista.

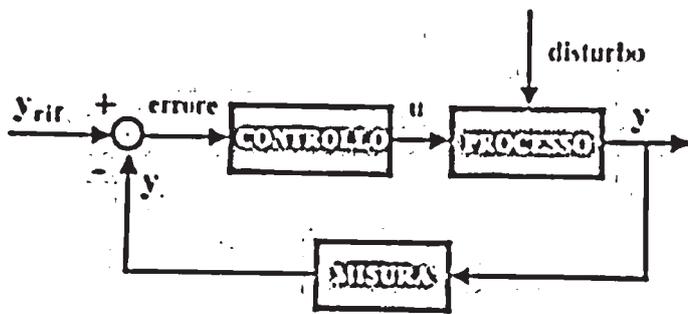
Da ora in poi lasciamo il contesto dei singoli esempi, cominciando a ragionare in modo più generale e astratto.

Abbiamo cioè un sistema di controllo, del quale descriveremo i diversi componenti attraverso le funzioni di trasferimento, cercheremo di trarre le conclusioni più estese possibili.

Dunque, per fare questo, occorre analizzare lo schema fondamentale.

Esso riflette il paradigma del controllo a retroazione.

Abbiamo un processo affetto da disturbi. Ci sono delle grandezze utilizzate come comandi (u), ci sono delle grandezze che vogliamo controllare (y). Le uscite del sistema sono misurate e riportate a confronto con le grandezze di riferimento. Dal confronto si



calcola un errore e l'errore aziona il sistema di controllo.

Se il coefficiente di amplificazione del dispositivo di controllo è elevato allora il sistema funziona bene, per le seguenti ragioni.

Supponendo di avere un certo disturbo e una certa grandezza controllata y , occorre un certo valore dell'ingresso.

Se il guadagno, ovvero l'amplificazione del dispositivo di controllo, cioè di quello che chiamiamo controllore, è molto elevato. A parità del valore del comando, sarà piccolo l'errore.

Tutto questo succede qualunque siano i parametri che possono comparire nelle equazioni, e qualunque siano i disturbi.

Una volta che si vuole avere un certo comando, a parità del valore del comando, l'errore è tanto più piccolo quanto è più piccolo il coefficiente di amplificazione.

Analisi delle prestazioni in un sistema a retroazione

- Analisi dei segnali esterni che agiscono sul sistema
- Individuazione dei parametri di progetto, i parametri a disposizione del progettista (quelli sui quali è possibile intervenire)
- Definizione delle specifiche, quello che ci aspettiamo da un sistema di controllo, cioè un errore che sia più piccolo possibile, la stabilità (se il sistema non è stabile, una grandezza controllata non evolverà verso il regime desiderato), specifiche riguardanti il passaggio da un regime all'altro (regolazioni differenti, ad esempio, di un certo parametro), con relativo transitorio del passaggio, che vogliamo sia il più breve possibile.

In relazione ai segnali esterni che possono intervenire sul sistema si fa uso di una nomenclatura diffusa.

Si precisa che parlando di segnali si fa riferimento sia ai riferimenti, cioè alle grandezze che fungono da paradigma al quale le grandezze controllate si devono adeguare, sia alle grandezze disturbante. Quindi i segnali sono quelli di riferimento, di tipo desiderato, e i disturbi, di tipo indesiderato. Nella analisi dei segnali si parla di sistemi di regolazione e di sistemi di asservimento.

- Sistemi di regolazione (segnali costanti nel tempo, l'obiettivo è mantenere costante il valore della grandezza controllata)
- Sistemi di asservimento (segnali variabili nel tempo, problemi di asservimento sono ad esempio un'antenna che segue un aeroplano, la traiettoria della mano di un robot, eccetera)

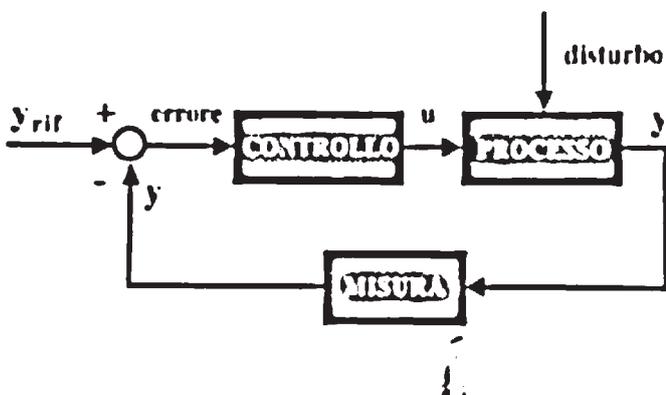
□

Prof. Alberto Isidori
41'03"

Vediamo in questa lezione le considerazioni introduttive all'analisi dei sistemi di controllo.

Alla fine della scorsa lezione abbiamo visto la classificazione dei sistemi in funzione dei segnali che devono essere inseguiti dall'uscita.

Abbiamo parlato di asservimento quando l'uscita deve inseguire dei segnali comunque variabili nel tempo, abbiamo parlato dei sistemi di regolazione quando l'uscita deve mantenere un valore costante, deve cioè inseguire dei segnali costanti.



Riprendendo lo schema di controllo che riassume tutti i dati fondamentali, quando il riferimento è una grandezza costante si dice che si ha a che fare con un sistema di regolazione. Quando il riferimento è una grandezza variabile nel tempo si dice che si ha a che fare con un sistema di asservimento.

Una tale distinzione non viene fatta per quanto riguarda i disturbi, sia perché

nella maggioranza dei casi i disturbi vengono considerati costanti sia perché non si usa considerare i disturbi come varianti nel tempo.

Quello che ora serve fare è sviluppare delle formule per semplificare gli schemi di controllo.

Semplificazioni dello schema

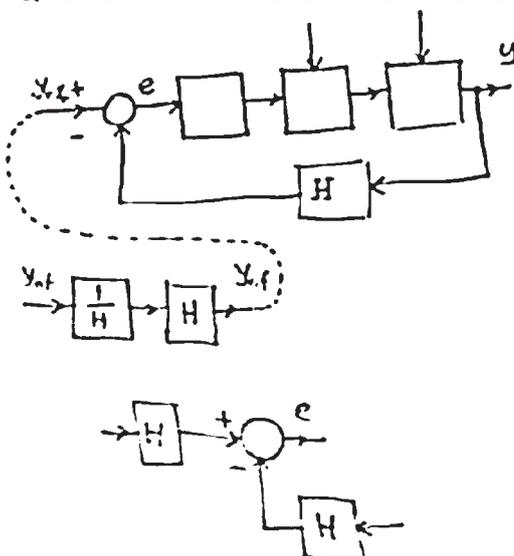
Un primo passo da fare nella semplificazione dello schema è la riduzione a reazione unitaria.

Quando abbiamo un sistema di controllo a retroazione abbiamo un certo numero di blocchi che seguono il dispositivo che produce il segnale di errore, eventualmente in questi blocchi intervengono dei segnali esterni disturbanti, poi ad un certo punto abbiamo l'uscita che l'obiettivo del sistema di controllo, c'era grandezza che deve essere comandata.

L'uscita deve essere riportata attraverso uno o più dispositivi verso l'ingresso fino a definire l'errore.

Per convenzione le frecce entranti nei blocchi indicano gli ingressi e le frecce uscenti indicano le uscite.

Supponiamo che il blocco in uscita abbia una certa funzione di trasferimento H (che può essere una co-



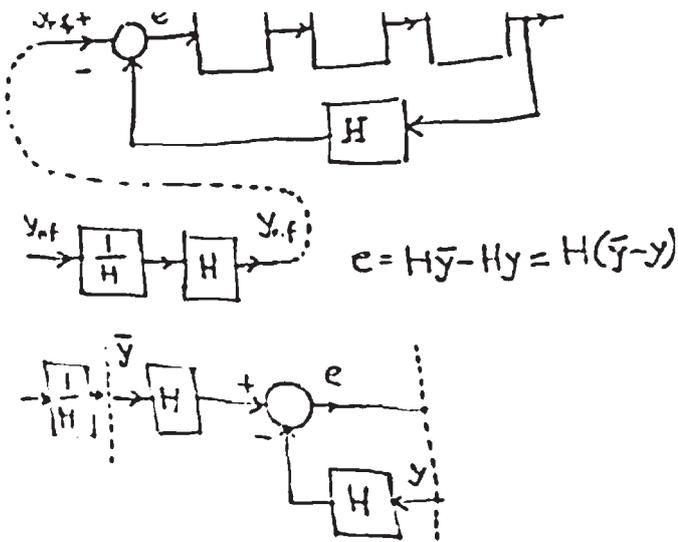
stante oppure una funzione di s).

Quello che vogliamo ricondurre ad uno schema in cui il ramo che va dall'uscita verso il dispositivo di somma che definisce l'errore sia unitario.

Quello che occorre fare è introdurre una ulteriore operazione, in due blocchi: dividere per H e moltiplicare per H .

Questa inserzione a monte del punto indicato con y_{rif} non modifica nulla, quindi il punto y_{rif} è sia a valle e a monte della inserzione.

Si immagina allora di effettuare una connessione tra i due punti, indicata dalla linea tratteggiata. A questo punto ci accorgiamo che il dispositivo che definisce l'errore presenta sui due rami che caratterizzano l'ingresso un blocco con funzione di trasferimento H ,



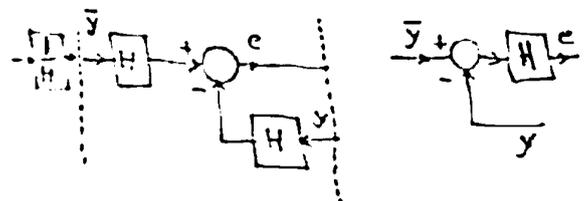
dal basso il ritorno dall'uscita, e un blocco con funzione di trasferimento H proveniente da sinistra.

Concentrandosi sul tale porzione di schema, che ha per uscita e , scrivendo le relative relazioni, vediamo che esse sono molto semplici.

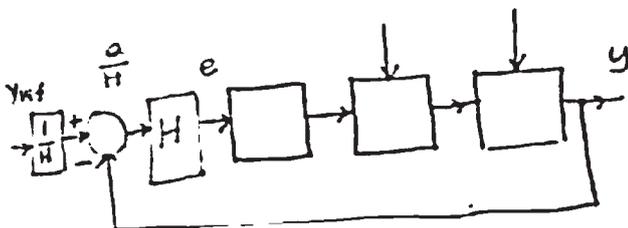
In sostanza abbiamo che

$$e = H\bar{Y} - Hy = H(\bar{Y} - y).$$

Lo schema tra le due barre tratteggiate è equivalente ad uno schema della seguente forma, in cui entra il segnale \bar{Y} , entro il segnale $-y$, il tutto che moltiplica H .



Facendo in questo modo si ottiene un vantaggio, quello di poter manipolare lo schema di partenza sostituendo la parte ottenuta dalla manipolazione, che rappresenta un blocco equivalente.



Lo schema che si ottiene è uno schema a reazione unitaria.

In questo l'errore si presenta in una posizione diversa, mentre nella posizione precedente c'è l'errore diviso per H .

Il vantaggio di questa operazione è essersi ricondotti ad uno schema a reazione unitaria tra il punto $1/H$ e l'uscita del sistema.

Questo semplifica le formule.

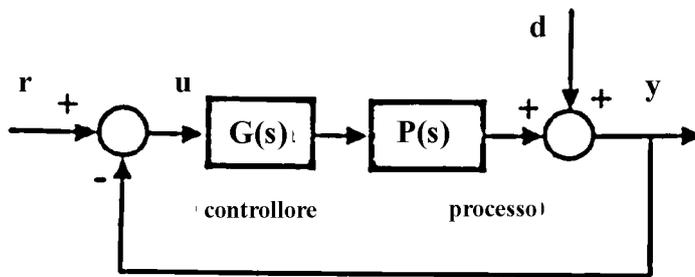
Nella procedura di semplificazione dello schema, se possibile, è anche molto utile effettuare la separazione tra il processo ed il controllore. La separazione processo/controllore, dal punto di vista della progettazione, significa una separazione tra le parti sulle quali non è possibile intervenire progetto, cioè i componenti di cui parametri sono fissi

dai componenti di cui parametri sono a disposizione del progettista.

Può benissimo accadere che tali parametri sia talmente mescolati da non poter essere separati, ma questo accade nella minoranza dei casi.

Normalmente c'è una connessione in cascata tra i componenti fissi e non.

Una volta fatta la separazione fra controllo del processo è abbastanza naturale, nella rappresentazione attraverso lo spazio di stato o attraverso le funzioni di trasferimento, portarsi appresso questa differenza e adottare simboli diversi per l'uno e per l'altro componente.



Lo schema precedente si trasforma nello schema a fianco dopo aver fatto la trasformazione.

La reazione unitaria si scrive, nei suoi legami funzionali, nel modo riportato a lato, ragionando in termini di trasformate di Laplace.

Quindi rappresentiamo sistemi con la loro funzione di trasferimento.

Il processo è rappresentato dal relativo blocco $P(s)$, ma può includere anche il disturbo. Nello schema riportato il disturbo

$$F(s) = P(s)G(s)$$

F = "feedback" = retroazione

$$\frac{\text{uscita}}{\text{riferimento}} = \frac{F(s)}{1 + F(s)} \quad \frac{\text{uscita}}{\text{disturbo}} = \frac{1}{1 + F(s)}$$

bo è una grandezza che interviene direttamente sull'uscita. Negli esempi pratici corrisponde ad una variazione di carico, come esempio del controllo di velocità.

La parte aggiunta, detta controllore, ha una sua funzione di trasferimento indicata con il simbolo $G(s)$.

La reazione è unitaria.

Dello schema vogliamo scrivere le funzioni di trasferimento che ci interessano.

Tali funzioni sono quelle che legano gli ingressi in gioco all'uscita controllata.

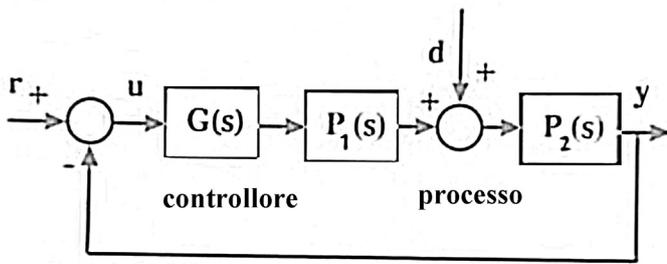
Gli ingressi in gioco sono il riferimento r , la grandezza cui l'uscita si deve conformare, ed eventualmente il disturbo.

Quindi ci interessano le funzioni di trasferimento tra r e y e tra d e y .

F è il prodotto delle funzioni di trasferimento P e G che si trovano sul cosiddetto ramo diretto (il ramo di reazione è un ramo unitario, sul quale non c'è niente).

In figura sono riportati le funzione di trasferimento del riferimento e dell'uscita e del disturbo e dell'uscita, rispettivamente uscita/riferimento e uscita/disturbo. Tali funzioni sono facilmente ricavabili.

Lo schema visto abbastanza particolare perché è stato immaginato che il disturbo agisca direttamente sull'uscita del processo controllato. Questa non è la situazione più generale, perché in generale il disturbo agisce in qualche punto intermedio della catena di azioni che si svolgono tra comando e uscita del processo.



$$F(s) = P(s)G(s)$$

$$\frac{\text{uscita}}{\text{riferimento}} = \frac{F(s)}{1 + F(s)} \quad \frac{\text{uscita}}{\text{disturbo}} = \frac{P_2(s)}{1 + F(s)}$$

In generale si potrà presentare uno schema come riportato a fianco.

Si noti come il disturbo agisca in un punto intermedio della catena diretta.

In questo caso continuiamo a chiamare con processo l'insieme formato dal blocco P_1 , dal blocco indicato con P_2 , e con il punto intermedio di accesso del disturbo.

Normalmente, secondo il principio di separazione tra processo e controllore, si immagina che le funzioni P_1 e P_2 siano

delle quantità fisse, mentre si immagina il controllore, rappresentato dalla funzione di trasferimento $G(s)$, sia una funzione a disposizione del progettista.

L'uscita controllata è, al solito, y .

In questo caso il legame funzionale tra ingressi, r e d , e uscita controllata dal sistema sarà più generale, ma comunque facile da ricavare, risolvendo una semplice equazione.

Si noti infatti che $y = P_2(d + P_1Gu)$; $u = r - y$. Si elimina la u e si risolve y in funzione di r , oppure y in funzione di d .

Si continua a chiamare $F(s)$ la funzione di trasferimento totale del ramo diretto.

Definendo $P(s) = P_2(s)P_1(s)$, abbiamo che $F(s) = P(s)G(s)$.

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento tra riferimento e uscita, ovvero uscita/riferimento, essa è uguale alla precedente. Questo significa che è ininfluente la posizione del disturbo, sia esso alla fine del ramo diretto o no. È quello che ci aspettavamo in quanto si tratta del legame tra riferimento e uscita.

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento tra disturbo e uscita, ovvero uscita/disturbo, abbiamo una espressione come riportata in figura, che è una formula diversa da quella vista in precedenza, per la presenza del fattore P_2 al numeratore, mentre in precedenza c'era 1 (P_2 non c'era ed il valore 1 significa che non c'è un blocco e si ha funzione di trasferimento unitaria).

Questa analisi copre la maggior parte dei casi di interesse.

Possono essere più complicata in quel disturbo agisce sul ramo di retroazione, non è difficile ricavare le relazioni corrispondenti.

Un ulteriore passo, il terzo, come preparazione allo studio dei sistemi di controllo è vedere cosa ci aspettiamo dal controllo stesso, la cosiddetta definizione delle specifiche di progetto.

Definizione delle specifiche

- **Stabilità.** Un sistema deve essere stabile asintoticamente. Questo significa che in un sistema, quando tutti i segnali esterni sono assenti, il sistema deve convergere asintoticamente verso una situazione di riposo, verso una situazione di equilibrio in cui tutto sia a riposo. Questo è abbastanza naturale, per il fatto che, aspettandoci un sistema di controllo sia in grado di inseguire grandezze costanti oppure grandezze variabili nel tempo, il sistema dovrà essere in grado di inseguire grandezze nulle. Quindi quando rimuoviamo le sollecitazioni, ovvero quando rimuoviamo segnali esterni, il sistema deve convergere verso una situazione di riposo. Questo è il requisito intuitivo che sta alla base del concetto di stabilità asintotica.
- **Precisione.** Si richiede che il sistema sia preciso. La precisione è legata al concetto di errore, nel controllo. L'errore è definito come la differenza tra l'andamento desiderato dell'uscita e l'andamento effettivo dell'uscita, che è la grandezza controllata. Questo si materializza in un segnale in un punto preciso del sistema, che corrisponde ad una esigenza concettuale. Diremo che il sistema è preciso se l'errore è basso.
- **Robustezza.** Essa è la capacità del sistema di controllo di continuare a funzionare bene anche quando i parametri che caratterizzano i componenti fisici del sistema stesso sono diversi da quelli che sono stati immaginati in sede di progetto. Questo può succedere in quanto i parametri che caratterizzano i componenti fisici possono essere diversi da quelli immaginati in sede di progetto sostanzialmente per due motivi. Uno riguarda le tolleranze di costruzione. L'altro riguarda la variazione dei parametri estesa nel tempo, per invecchiamento oppure per effetto di condizioni ambientali. La robustezza indica la capacità di un sistema di controllo di comportarsi bene anche se ci sono delle variazioni dei parametri rispetto ai valori immaginati in sede di progetto.

Metodologia di progettazione di un sistema di controllo

- Stabilire una corrispondenza diretta dalle specifiche indicate e i parametri di progetto
- Dare la preferenza (almeno inizialmente) ai metodi grafici

Ci sono dunque un certo numero di principi generali a cui attenersi.

Uno di questi è quello di stabilire una corrispondenza diretta dalle specifiche indicate e i parametri di progetto, cioè i componenti del sistema, i singoli parametri. Questo al fine di riconoscere facilmente se il sistema di controllo si comporta bene o male.

Un altro principio è quello di dare la preferenza (almeno inizialmente) ai metodi grafici, che sono molto importante nella ingegneria perché consentono di stabilire un contatto visuale immediato tra il risultato di certe scelte e quello che succederà al sistema progettato. Ci sono anche dei metodi analitici, importanti, che vedremo più avanti.

Vediamo come si mettono in relazione le specifiche di comportamento di un sistema di controllo ai parametri che compongono il sistema stesso. Si ricorda che le specifiche si raggruppano in tre grandi categorie: stabilità, precisione, robustezza.

La stabilità dei sistemi a retroazione

I metodi per studiare la stabilità sono:

- Criterio di Routh.
- Criterio di Nyquist
 - Margine di stabilità

Il criterio di Routh non è un criterio specifico per sistemi a retroazione, ma è un criterio molto comodo se in esame c'è un polinomio di grado non troppo elevato per giudicare se le radici di un polinomio sono tutte a parte reale negativa.

Il criterio di Nyquist è un criterio che è stato messo a punto esattamente per studiare la stabilità di un sistema a retroazione. Uno dei principali vantaggi è la possibilità di definire un margine di stabilità, che è un primo segnale all'interesse alla robustezza. Il margine di stabilità dice quanto, eventuali variazioni dei parametri, possono danneggiare la proprietà del sistema prima di essere stabili o meno. L'informazione data è di tipo qualitativo molto generico ma comunque importante.

Esempio di margini di stabilità e criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist è relativo allo studio della stabilità di un sistema a retroazione che ha uno schema elementare come raffigurato a lato. Abbiamo un blocco sul ramo diretto avente funzione di trasferimento $F(s)$ e abbiamo una reazione unitaria. L'ingresso è y_{rif} , l'uscita è y , l'ingresso al blocco è u .

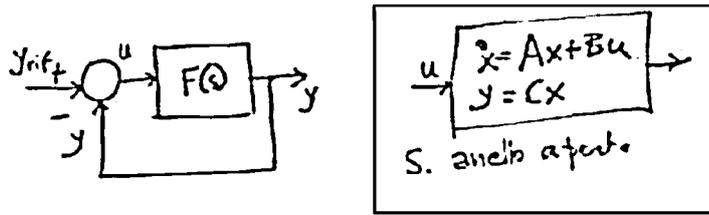
Il criterio di Nyquist lega tra loro le proprietà dell'anello aperto e le proprietà dell'anello chiuso. In particolare ci dà informazioni sulla stabilità del sistema ad anello chiuso a partire da alcuni dati relativi al sistema ad anello aperto.

Scrivendo la rappresentazione con lo spazio di stato del sistema ad anello aperto, ovvero $\dot{x} = Ax + Bu$ e $y = Cx$, questo è quanto è "contenuto" in un blocco con $F(s)$, appunto, in un sistema ad anello aperto.

Quando si va a chiudere la retroazione quello che sostanzialmente viene fatto è porre $u = y_{rif} - y$ e, in questo caso, la rappresentazione del sistema cambia e diventa un sistema diverso.

Il sistema a retroazione si ottiene dal sistema ad anello aperto effettuando la sostituzione $u = y_{rif} - y$ in $\dot{x} = Ax + Bu$, considerando che $y = Cx$.

Criterio di Nyquist



$$u = y_{rif} - y$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(y_{rif} - Cx) \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A - BC)x + By_{rif} \\ y = Cx \end{cases}$$

S. anello chiuso

rappresentazione con lo stato
una volta chiuso l'anello

Il problema è quello ora di legare le proprietà di stabilità dei due sistemi, quello ad anello aperto e quello ad anello chiuso.

Abbiamo una FORMULA FONDAMENTALE, che vale senza ipotesi di sorta.

Con riferimenti ai sistemi con un solo ingresso ed una sola uscita abbiamo quanto segue.

FORMULA FONDAMENTALE
(sistemi 1-ingresso 1-uscita)

$$1 + F(s) = \frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)}$$

\nearrow polinomio caratt. anello CHIUSO $\rightarrow \det(sI - (A - BC))$
 \searrow polinomio caratt. anello APERTO $\rightarrow \det(sI - A)$

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

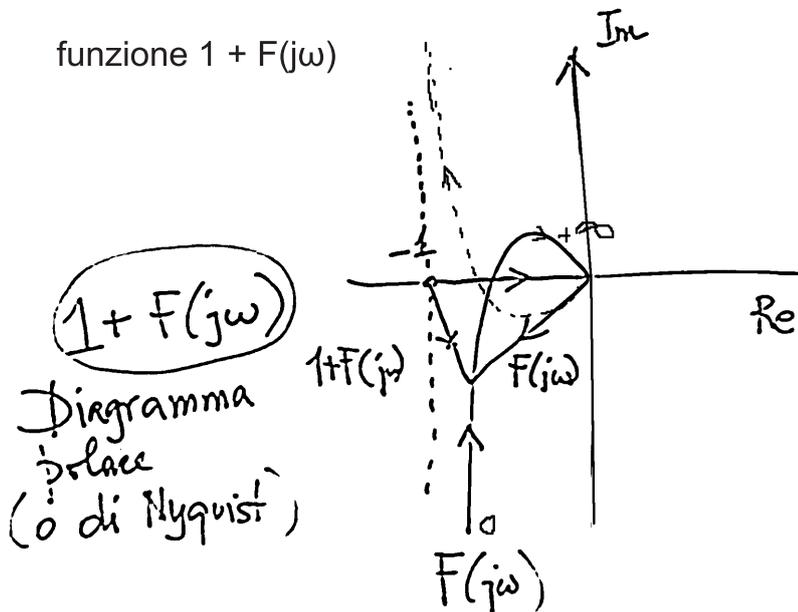
$F(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto, quindi nella forma $F(s) = C(sI - A)^{-1}B$, in cui C , A e B sono le matrici che rappresentano i parametri che caratterizzano il sistema ad anello aperto.

La formula dice che $F(s)$ è uguale al rapporto di due polinomi, al numeratore c'è il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso e al denominatore c'è il polinomio caratteristico del sistema ad anello aperto.

Se il sistema ha più ingressi e più uscite la formula ha una variante, che consiste nel fatto che al posto di $1 + F(s)$ c'è il determinante della matrice $I + F(s)$. Questo perché, nel caso di sistemi a più ingressi e più uscite, u è un vettore e y è un vettore ed essi sono delle stesse dimensioni, altrimenti non si potrebbe fare la differenza, $y - u$.

Quindi in questo caso la matrice di trasferimento del sistema ad anello aperto, $F(s)$, è una matrice quadrata.

Nyquist ha usato questa formula fondamentale per trarre informazioni importanti sulla stabilità. In particolare ha osservato quanto segue.



Si prende la funzione $1 + F(j\omega)$ e si effettua su di essa il diagramma polare, detto anche diagramma di Nyquist, che è un diagramma sul piano immaginario. Il diagramma avrà una certa forma.

Di norma quello che si fa in pratica è rappresentare la funzione $F(j\omega)$ e pensarla vista rispetto al punto -1 .

In realtà la funzione $1 + F(j\omega)$ è il grafico della funzione $F(j\omega)$ prendendo come punto di riferimento il punto -1 .

Quindi la funzione $1 + F(j\omega)$ si ottiene andando a rappresentare in un diagramma polare la funzione $F(j\omega)$ e leggerla pensando che l'origine del sistema di coordinate sia stata traslata nel punto -1 .

Nel diagramma ω è variabile, cioè ω è una variabile corrente sul diagramma da 0 a più infinito, dopodiché si deve completare la curva tenendo conto anche della parte con valori negativi di ω . Questa parte è simmetrica rispetto all'asse reale, per valori da meno infinito a 0.

\vec{N} n. rotazioni orarie

Si esegue il diagramma e si va a calcolare il numero N di rotazioni orarie che la funzione compie quando ω va da più infinito a meno infinito, ovvero il vettore rappresentativo della funzione $1 + F(j\omega)$ compie quando ω va da più infinito a meno infinito.

$$\vec{N} = Z_{CH} - Z_{AP}$$

Nyquist, partendo dalla formula fondamentale, ha osservato che il numero N è equivalente alla differenza tra il numero di radici con parte reale positiva del polinomio CH e il numero di radici con parte reale positiva del polinomio AP .

Questo è un criterio per valutare la stabilità dei sistemi sarà usato nelle prossime lezioni.

Dunque, Z_{CH} è il numero di radici con parte reale positiva del polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso; Z_{AP} è il numero di radici con parte reale positiva del polinomio caratteristico del sistema ad anello aperto.

□

Prof. Alberto Isidori
41'12"

Di seguito alcuni commenti sul criterio di Nyquist.

FORMULA FONDAMENTALE
(risolvi 1-ingresso 1-uscite)

$$1 + F(s) = \frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)}$$

$d_{CH}(s)$ → polinomio caratt. anello CHIUSO → $\det(sI - (A - BC))$
 $d_{AP}(s)$ → polinomio caratt. anello APERTO → $\det(sI - A)$

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Dalla formula fondamentale ricaviamo quello che serve per valutare la stabilità, cioè la formula del calcolo di N. Le informazioni richieste dalla formula figurano nei due punti indicati. Essi sono dati relativi al sistema ad anello aperto. A destra abbiamo numero di radici con parte reale positiva del polinomio caratteristico del sistema ad anello aperto, a sinistra, sempre relativamente al sistema ad anello aperto, abbiamo il numero di rotazioni in senso orario che la funzione $1 + F(j\omega)$ compie attorno alla propria origine quando ω va da -infinito a + infinito.

\curvearrowright
 N n. rotazioni orarie
 \curvearrowright
 $N = \sum_{CH} - \sum_{AP}$
 ↑ ↑
 dati risposta dati

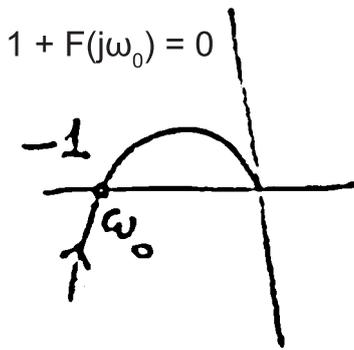
A partire dai dati la formula ci fornisce la risposta, ovvero quante radici con parte reale positiva sono presenti nel polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso. Vorremmo che il risultato fosse zero.

La formula vale quando entrambi i polinomi caratteristici non hanno radici esattamente sull'asse immaginario, perché in questo caso non è possibile fare il passaggio dalla formula fondamentale alla formula che calcola il numero di rotazioni.

Si deve tener presente che non sappiamo se il polinomio caratteristico ad anello chiuso ha radici sull'asse immaginario, questa è una cosa che vogliamo sapere, è l'incognita del problema nello studio della stabilità; quello che eventualmente sappiamo se il polinomio caratteristico del sistema ad anello aperto ha radici sull'asse immaginario

Quando uno dei due polinomi caratteristici ha radici sull'asse immaginario la formula che calcola il numero delle rotazioni è inutilizzabile.

Però la formula fondamentale ha sempre validità.

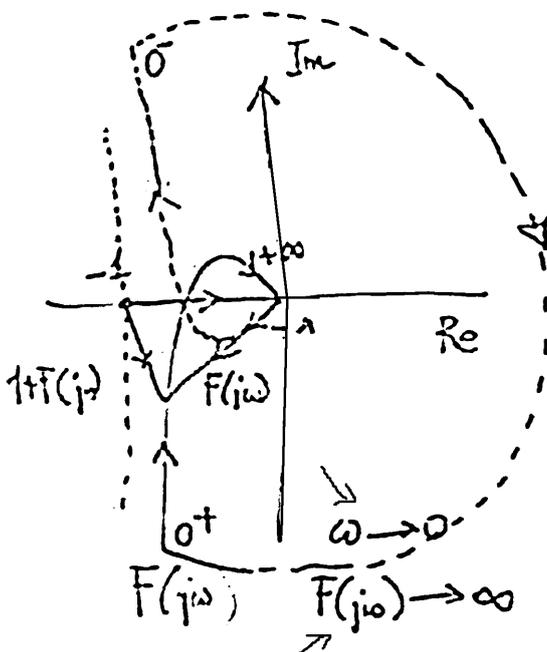


Quindi, supponendo che il polinomio d_{CH} abbia una radice sull'asse immaginario mentre il polinomio d_{AP} non ce l'abbia, succede che per un certo valore immaginario puro, $s = j\omega_0$, il polinomio al numeratore si annulla, mentre il polinomio al denominatore non si annulla, quindi $1 + F(j\omega_0) = 0$, e quindi la funzione F passa per il punto -1 , per un certo valore ω_0 .

Questa è un'informazione che possiamo rilevare dal grafico stesso, se la funzione passa per il punto -1 , allora il numeratore della formula fondamentale si annulla, mentre non si annulla denomi-

natore.

In questo caso il sistema ad anello chiuso non può essere stabile asintoticamente, potrebbe essere stabile in senso semplice, ma quello che vogliamo è che sia stabile asintoticamente.



Supponiamo ora che sia il polinomio d_{AP} abbia una radice sull'asse immaginario: per un $s = j\omega_0$ abbiamo $d_{AP}(j\omega_0) = 0$, il che vuol dire che il sistema ad anello aperto ha una radice sull'asse immaginario. Questo vuol dire che il sistema dell'anello aperto non è stabile asintoticamente, ma ciò non è un problema perché siamo interessati alla stabilità del sistema ad anello chiuso, quindi sarà la chiusura dell'anello di reazione che eventualmente potrà stabilizzare il sistema.

Se dunque il denominatore diventa nullo per un certo valore $j\omega_0$, il rapporto fra i due polinomi va all'infinito, quindi la funzione F va all'infinito. Dunque per ω tendente a zero, la funzione $F(j\omega)$ tende a infinito.

Questo vuol dire che il sistema anello aperto ha un polo sull'asse immaginario. Ma questo non pregiudica la stabilità del sistema ad anello chiuso, ma pregiudica l'uso immediato della formula significativa. Per poterla usare devono essere fatte delle approssimazioni, immaginando che la radice presente sull'asse immaginario, ω_0 , sia leggermente a sinistra, quindi la collochiamo tra le radici "buone", quelle con parte reale negativa.

Fatto questo, il diagramma di Nyquist non va più all'infinito, ma quando ω diventa molto piccolo, il diagramma rimane finito e va completato con una rotazione in senso orario, da valori molto piccoli negativi di ω , 0^- , a valori molto piccoli positivi di ω , 0^+ .

Il diagramma compie tanti mezzi giri in senso orario quanta è la molteplicità dell'eventuale polo sull'asse immaginario della funzione d_{AP} .

Quello che è stato fatto è in sostanza un piccolo artificio, riconducendoci ad una situazione in cui l'anomalia non è presente, per cui la formula di calcolo del numero di giri è applicabile. Poiché abbiamo collocato le radici che erano sull'asse immaginario un poco più a sinistra, queste radici non compaiono più nella formula e quindi possiamo andare

avanti nei calcoli.

Se entrambe le funzioni d_{CH} e d_{AP} avessero una radice su uno stesso punto immaginario, allora i due fattori si cancellerebbero e la funzione $1 + F(s)$ avrebbe un punto di regolarità nella radice in questione e non andrebbe all'infinito.

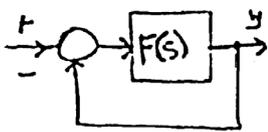
Dunque, sapendo già in partenza che il sistema ad anello chiuso ha una radice sull'asse immaginario, ad esempio in ω_0 , e, se andando a fare il diagramma di Nyquist della funzione $1 + F(s)$, questa non va all'infinito, allora l'unica possibilità del fatto che la funzione $1 + F(s)$ non va all'infinito è che ci sia una radice al numeratore nello stesso punto. Questa è una condizione che non vogliamo capiti in quanto significa che il sistema ad anello chiuso ha una radice sull'asse immaginario e quindi non è stabile asintoticamente.

Tutte le volte che ci sono dubbi sulla interpretazione del criterio di Nyquist dovuti alla presenza di radici sull'asse immaginario, è sempre utile fare riferimento alla formula fondamentale, mentre l'altra va letta con un minimo di attenzione.

~~~~~

### Applicazione del criterio di Nyquist

Per fare un esempio dell'applicazione del criterio di Nyquist consideriamo il regolatore di livello; in questo esempio verranno anche mostrati i margini di stabilità.



$$F(s) = \frac{kk_1k_2}{s[(1+\tau_1s)(1+\tau_2s) + k_mk_1]}$$

Il regolatore di livello è un sistema descritto da uno schema a blocchi come a lato figurato.

Sulla stabilità di questo sistema sappiamo trovare, con il criterio di Routh, il valore massimo di  $K$  che lascia il sistema stabile.

Vediamo come ricavare informazioni sulla stabilità attraverso applicazione del criterio di Nyquist.

Per fare Nyquist occorre fare come prima cosa il diagramma di Bode, attraverso il quale si riesce a disegnare il diagramma di Nyquist. Quelli che saranno disegnati saranno diagrammi approssimati, per fare un diagramma di Bode preciso dovrebbe essere usata una applicazione dedicata del tipo MatLab.

Il diagramma di Bode consiste nel modulo della funzione  $F$  in funzione di  $\omega$  in scala semilogaritmica e nella fase della funzione  $F$  in funzione di  $\omega$  in scala semilogaritmica. Nella scala semilogaritmica i valori saranno 1, 10, 100 ecc.

La funzione  $F$  ha un guadagno  $K$  e tre poli di cui uno nell'origine.

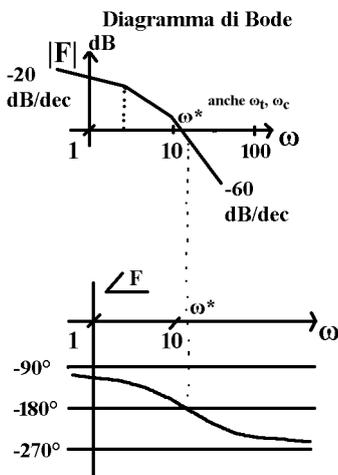
Poiché la funzione  $F$  non ha nessuno zero e ha tre poli, il modulo avrà come rappresentazione grafica di tre spezzate.

Il modulo parte con una pendenza di -20 decibel per decade (-20 dB/dec) e finisce con una pendenza di -60 dB per decade.

Il diagramma di Bode va da +infinito a -infinito con un andamento di questo genere. I due punti nella spezzata rappresentano le radici del polinomio al denominatore, esclusa la radice nell'origine, di forma generica del tipo  $a(s + p_1)(s + p_2)$ , in  $s$ , con  $s = j\omega$ .

Per quanto riguarda la fase, abbiamo tre radici, poli, di cui una nell'origine, data da  $s$ . Per questa ragione ci sarà un termine costante di fase  $-90^\circ$ , poi ci saranno due termini dovuti alla presenza di due poli, quelli nella espressione generica.

Nyquist ← Bode Si riportano delle strisce corrispondenti ai valori delle fasi,  $-90^\circ$ ,  $-180^\circ$ ,  $-270^\circ$ , valori entro i quali rientra la fase.



La fase parte da  $-90^\circ$  e va a scendere. Va a scendere perché le radici  $p_1$  e  $p_2$  hanno parte reale negativa, i numeri sono quindi positivi.

Osservando il polinomio relativo, è un polinomio di secondo grado con tutti coefficienti positivi, per cui le sue radici, essendoci due permanenze, hanno parte reale negativa.

Per questa ragione la fase tende a diminuire, a partire da  $-90^\circ$  fino a  $-270^\circ$ .

Dunque siamo riusciti a fare un andamento qualitativo del diagramma di Bode, nel caso del regolatore di livello, di un processo ad anello aperto.

A questo punto vogliamo passare al diagramma di Nyquist.

Nel diagramma di Nyquist si riporta la parte reale di  $F$  sull'ascissa e la parte immaginaria di  $F$  sull'ordinata.

Aver disegnato il diagramma di Bode ci aiuta ora in quanto la fase di  $F$  è tutta compresa fra  $-90^\circ$  e  $-270^\circ$ . Sul piano complesso il luogo dei punti la cui fase è compresa fra  $-180^\circ$  in  $-270^\circ$  è il terzo quadrante, perché partendo dall'asse della parte reale in senso antiorario si hanno valori negativi.

Quindi, per valori di  $\omega$  molto piccoli, da 0 fino al valore di  $\omega$ , definito come  $\omega^*$ , che corrisponde all'intersezione con la fase pari al valore di  $-180^\circ$ , la fase è inferiore a  $-90^\circ$  ma superiore a  $-180^\circ$  per cui è compresa nella regione del terzo quadrante. L'asse in cui la fase vale  $-180^\circ$  sarà attraversato per il valore di  $\omega$  pari a  $\omega^*$ . Per sapere il punto si

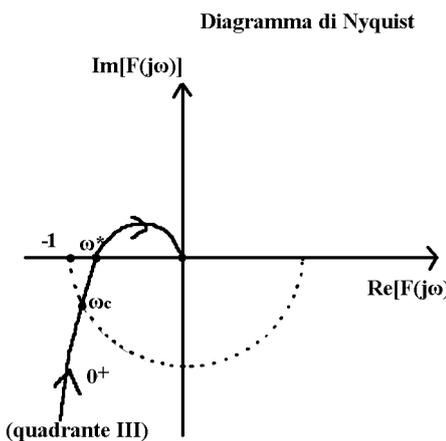
ricava il valore nel diagramma dei moduli, ricavando l'ampiezza del modulo. Poiché il modulo è rappresentato in decibel, a valori negativi in decibel corrispondono ampiezze del valore inferiore a uno.

Quindi l'attraversamento del diagramma della funzione  $F$  dell'asse reale avviene ad un valore della pulsazione  $\omega^*$  in cui il modulo è negativo in decibel quindi è minore di uno. La fase in corrispondenza di tale punto vale  $-180^\circ$ .

La coppia di valori modulo e fase viene riportata su un unico punto nel diagramma di Nyquist.

Per valori precedenti il modulo era via via più alto fino ad andare all'infinito e questo vuol dire che sul diagramma di Nyquist si parte da vettori molto grandi con fase di valore  $-90^\circ$ , quindi vettori che puntano nella direzione di  $-90^\circ$ .

Poi si passa oltre il valore di  $-180^\circ$ , per cui la fase è compresa tra il valore di  $-180^\circ$  e  $-270^\circ$ . Il luogo dei punti nel piano complesso è il secondo quadrante, per cui la curva si troverà tutta compresa in tale quadrante e indefinitamente perché al variare di  $\omega$  la



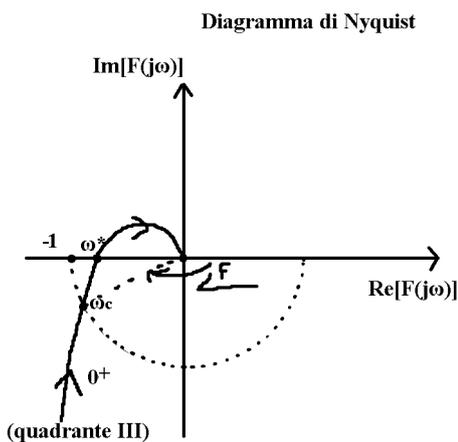
curva si troverà sempre in tale quadrante, come si nota da diagramma di Bode. Il modulo parte dal valore  $\omega^*$  e decresce in decibel fino a  $-\infty$  e questo vuol dire che le ampiezze, espresse numeri naturali, vanno da un certo valore fino a zero, perché in decibel  $-\infty$  corrisponde a zero, mentre la fase rimane compresa tra il valore di  $-180^\circ$  e  $-270^\circ$ , tendendo a raggiungere il valore di  $-270^\circ$ . Questo significa che il vettore relativo nel piano complesso tende a disporsi in modo verticale, il che ci permette di completare il diagramma in modo qualitativo.

$\omega^*$  è la frequenza per la quale la fase vale  $-180^\circ$  e per la quale, nel diagramma di Nyquist, si ha l'attraversamento del semiasse reale negativo. Tale frequenza è chiamata anche  $\omega_t$ , di taglio, oppure  $\omega_c$ , crossover.

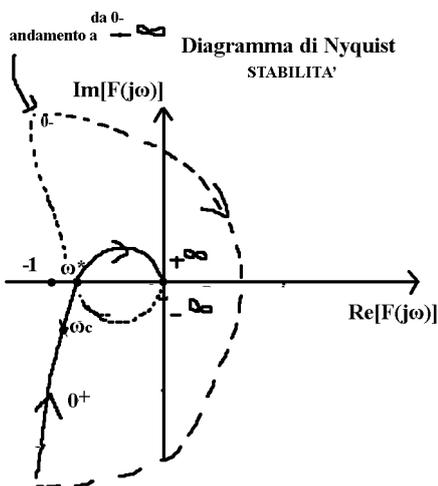
C'è un altro punto interessante da notare, la frequenza per la quale il modulo, nel diagramma di Bode, vale zero decibel, ovvero ampiezza unitaria. Quindi è il valore della frequenza per la quale il vettore  $F$  nel diagramma di Nyquist ha ampiezza unitaria. Questo equivale a dire il valore della frequenza per cui viene traversato un cerchio di raggio unitario centrato sull'origine, il salvabile dall'intersezione di tale cerchio con il tracciato qualitativo dell'andamento.

Ci sono due verifiche che stabiliscono che non abbiamo fatto errori nel passare da un diagramma all'altro, una è che  $\omega_c$  deve venire prima di  $\omega^*$ .

Inoltre la fase della funzione  $F$  nel punto indicato deve essere maggiore di  $180^\circ$ , in valore assoluto. Valore che si ottiene dal diagramma di Bode relativo alla fase, in cui sono evidenziate le varie fasce entro cui i valori possono stare.



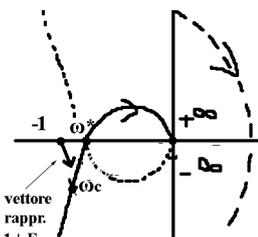
Inoltre la fase della funzione  $F$  nel punto indicato deve essere maggiore di  $180^\circ$ , in valore assoluto. Valore che si



Per quanto riguarda la stabilità, si considera il diagramma di Nyquist, riportando anche l'andamento da  $-\infty$ , perché risulta speculare rispetto a quello a  $+\infty$ .

Ci troviamo in uno dei casi anomali in cui il diagramma va all'infinito per la presenza di una radice con parte reale nulla, in particolare una radice nell'origine della funzione  $F(s)$ . Immaginando di spostare la radice un pochino a sinistra nel piano complesso, il diagramma di Nyquist si modificherebbe in un modo tale che, invece di andare all'infinito, si chiuderebbe al finito percorrendo un mezzo giro in senso orario (sempre in senso orario, in numero pari alla molteplicità della radice) da  $0-$  a  $0+$ .

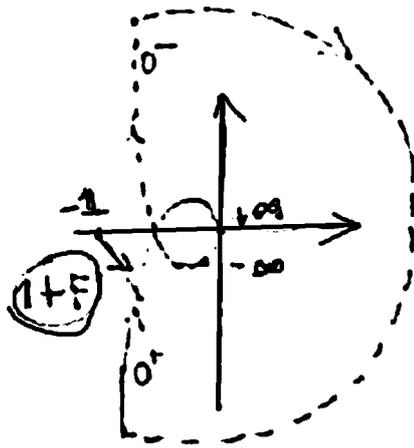
Abbiamo dunque il diagramma completo.



Quello che dobbiamo fare ora è contare le rotazioni, prendendo il vettore rappresentativo.

Esso parte da meno infinito, posizionato nel centro delle coordinate, e in senso orario segue l'estremo della curva.

In questo caso non fa nessun giro completo, nel senso orario né in senso antiorario, quindi  $N = 0$ .

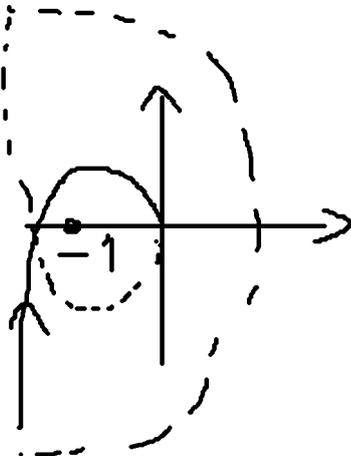


$Z_{AP} = 0$ , perché il sistema all'aperto non ha radici con parte reale positiva, quella con parte reale nulla l'abbiamo confusa tra quelle con parte reale negativa, quindi la conclusione è che  $Z_{CH} = 0$ , il sistema ad anello chiuso non ha radici con parte reale positiva e quindi il sistema è stabile asintoticamente.

$$\left. \begin{array}{l} N=0 \\ Z_{AP}=0 \end{array} \right\} Z_{CH}=0$$

Questo è in sostanza l'impiego tipico del criterio di Nyquist.

La grande utilità di tale criterio sta nell'indicarci graficamente e quindi in maniera molto immediata dove può essere persa la stabilità.



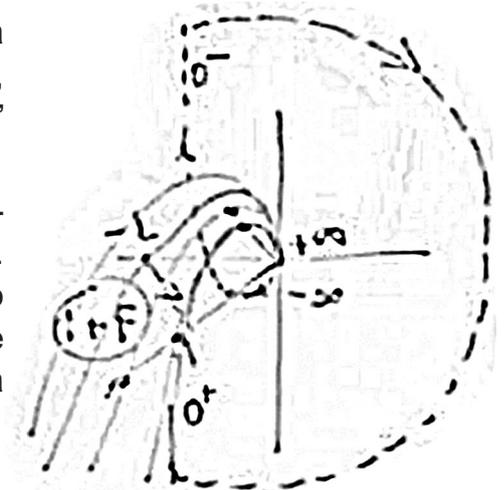
Quello che deve essere evitato è avvicinarsi troppo al punto -1.

Se il diagramma passa per il punto -1 ha una radice sull'asse immaginario.

Se il diagramma passa oltre il punto -1 e completo il diagramma, contando il numero di rotazioni si scopre che esse sono due, quindi  $N = 2$ . Ma  $Z_{AP} = 0$ , come prima, in quanto il sistema ad anello aperto non è cambiato, quindi  $Z_{CH} = 2$ , cioè il sistema ad anello chiuso ha due radici con parte reale positiva per cui è instabile.

Quindi i due diagrammi danno in un caso una risposta soddisfacente e nell'altro una risposta insoddisfacente, e la differenza sta nel fatto che la seconda curva è un po' più grande della prima.

Il passaggio alla seconda curva avviene semplicemente aumentando il guadagno del sistema, il parametro  $K$ . La variazione è proporzionale, tutti i vettori si allungano dello stesso fattore e, ad un certo punto, all'aumentare del valore, si oltrepassa il punto -1, quindi si oltrepassa il limite di stabilità.



Si riscontra sul diagramma di Nyquist lo stesso risultato riscontrato applicando il criterio di Routh.

Il sistema a retroazione ha un valore limite del guadagno, il punto critico, per cui per valori inferiori si ha stabilità e per valori superiori si ha instabilità.

Il punto critico nel diagramma di Bode è il punto -1 a parte reale e 0 a parte immaginaria.

### La robustezza

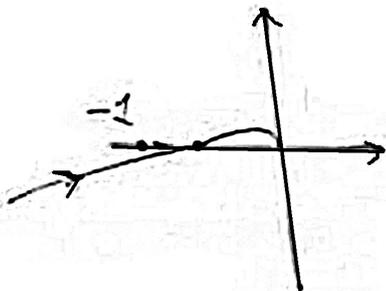
La robustezza indica conservazione delle proprietà anche in presenza di variazioni, non conosciute, non controllate, dei parametri.

Se i parametri variano allora varierà la rappresentazione nel relativo diagramma. Quello che può succedere è di avvicinarsi alla condizione di instabilità. Quindi, per garantire in maniera qualitativa la conservazione della stabilità in presenza di variazioni dei parametri, è consigliabile tenersi lontani dal punto critico. A tal ragione si possono introdurre i cosiddetti margini di stabilità, che è una distanza dal punto -1.

Misurare la distanza del diagramma dal punto -1 consiste ad esempio nel misurare la distanza dal punto -1 al punto che il diagramma interseca l'asse reale. Se tale distanza (è un segmento) è grande allora le variazioni dei guadagni possono essere ampie prima di arrivare al pericolo di instabilità. Questa quantità è il cosiddetto margine di guadagno, che può essere definito anche in altri modi.

Il margine di guadagno è  $|F(j\omega)|$  con  $\omega$  tale che la fase di  $F(j\omega)$  sia  $-180^\circ$ . Il modulo può essere espresso sia in numeri naturali che in decibel.

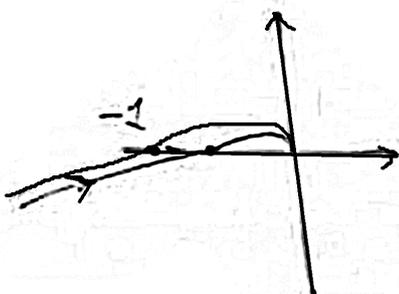
Se il valore del margine di guadagno è, ad esempio  $1/2$ , allora il guadagno può variare fino a un fattore due, il che vuol dire una variazione del 100% nella guadagno del sistema, senza che il sistema vada in instabilità.



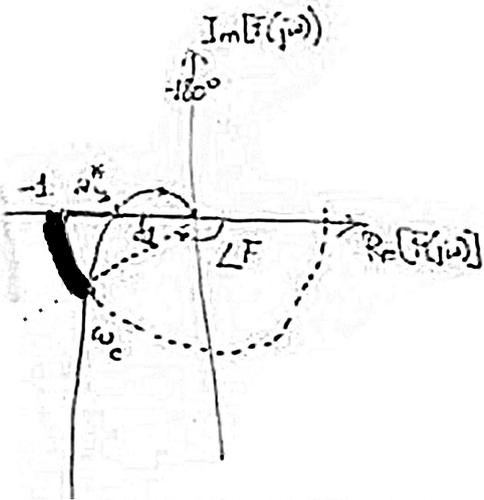
In una figura come quella riportata a lato si può ancora pensare di tollerare variazioni del guadagno dell'ordine massimo del 100%.

Ci possono essere variazioni di alcuni parametri che possono spostare anche di poco la figura, ma lo spostamento è tale che porta lo stato in instabilità.

Quindi occorre aggiungere un'altra distanza, quella che corrisponde all'angolo mostrato.



Dal punto di vista euristico, si immagina che se entrambe le distanze sono ampie, allora sarà poco probabile passare ad uno stato instabile.

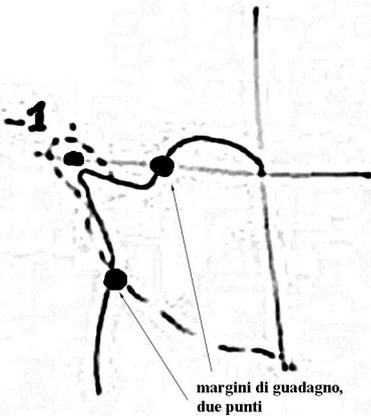


Come ultima figura caso estremo, poco probabile, meno frequente, ma che, nel caso in cui si verifichi, sarà il progettista che dovrà evitare la combinazione di parametri e componenti tali per cui il sistema possa andare in uno stato di instabilità.

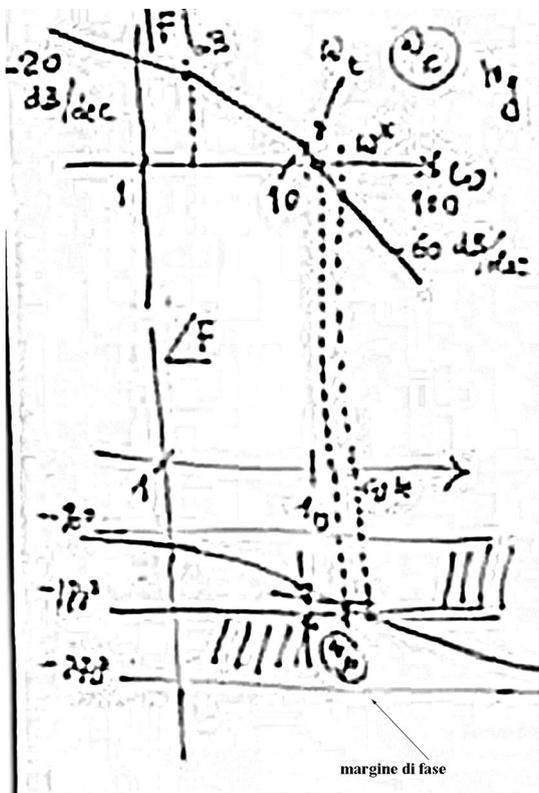
La seconda grandezza si chiama margine di fase,  $m_\phi$ , che è quanta fase manca ad arrivare a  $-180^\circ$  quando il modulo vale uno.

Il suo valore è calcolato come  $180^\circ - (-F(j\omega))$ , il - davanti a F perché è già una quantità negativa.

Se la retta è disposta a  $45^\circ$  allora il margine di fase è  $45^\circ$ .



Il margine di fase può essere anche riscontrato sul diagramma di Bode, senza ricorrere al diagramma di Nyquist.

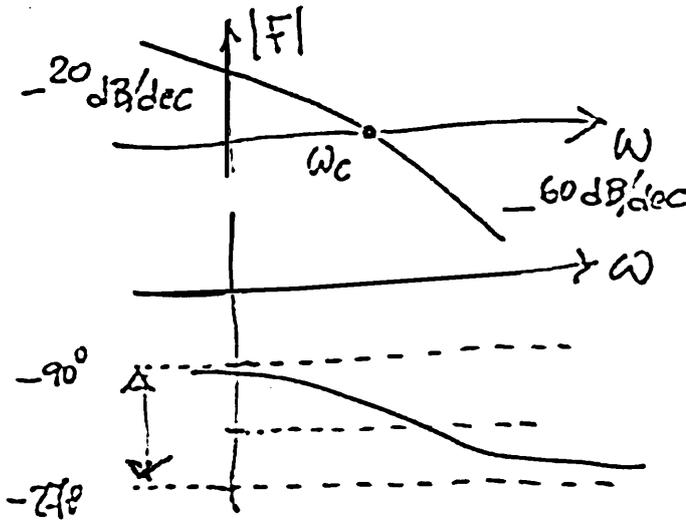


□

Prof. Alberto Isidori  
36'36"

Continuiamo la rassegna di applicazioni del criterio di Nyquist.

$$F(s) = \frac{K}{s(s^2 + a_1s + a_0)}$$



Continuando dalla lezione precedente abbiamo una funzione di trasferimento ad anello aperto che ha un guadagno (K), un polo nell'origine (s) e una coppia di poli con parte reale negativa ( $s^2 + a_1s + a_0$ ).

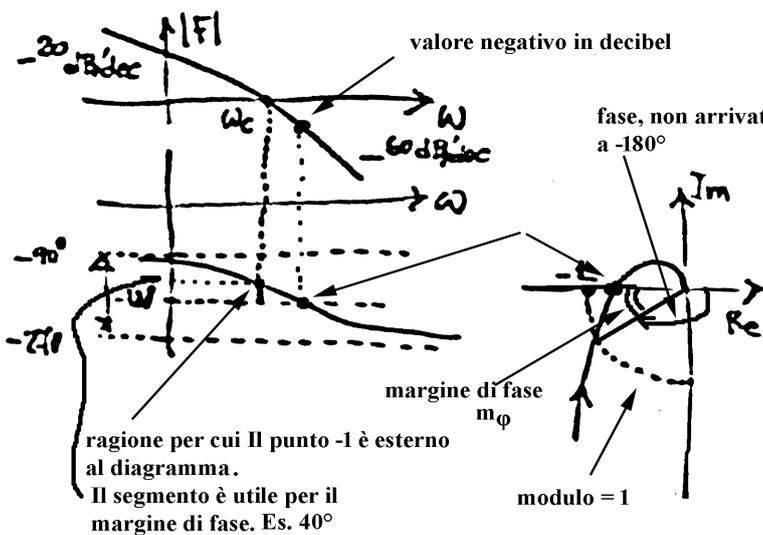
Come già spiegato, volendo fare il diagramma di Nyquist è utile fare prima il diagramma di Bode.

Quindi nel disegnare il diagramma di Bode si traccia modulo e fase di F in funzione di ω, in scala semilogaritmica.

L'andamento dei moduli è decrescente, si parte da una pendenza di -20 decibel per decade e si finisce con una pendenza di -60 decibel per decade.

Il valore della pulsazione per cui i moduli sono nulli, in decibel, quindi modulo unitario, si chiama frequenza di attraversamento e viene indicata con ωc.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi, in questo caso, siccome è presente un polo nell'origine e tutti gli altri poli sono con parte reale negativa, si ha un diagramma che è tutto compreso nella fascia tra -90° e -270°.



Si può disegnare di conseguenza il diagramma di Nyquist, con il punto -1 che si trova esterno al diagramma. Questo si riesce a stabilire dal diagramma di Bode in quanto ci si accorge che quando il modulo vale uno, ovvero in corrispondenza della pulsazione di attraversamento, la fase non è ancora arrivata a -180°, ma è di un valore un po' superiore. Questo corrisponde al fatto di trovarci nel terzo quadrante.

Quando il modulo vale 1 vuol dire che stiamo attraversando il cerchio di raggio unitario nel terzo quadrante.

La fase non è arrivata  $-180^\circ$  e quello che manca è chiamato margine di fase,  $m_\phi$ , che è una misura di quanto siamo distanti dal pericolo di perdita di stabilità.

Il margine di fase si legge sul diagramma di Bode prendendo il segmento e vedendo dove incontra l'ordinata.

Un'altra pulsazione di interesse è la pulsazione per la quale la fase vale  $180^\circ$ , che è il punto di attraversamento del diagramma di Bode sulla linea dei  $-180^\circ$ . Il nome di questo punto non è definito.

Nel diagramma di Nyquist è il punto di attraversamento del semiasse reale negativo.

È un punto importante perché sappiamo che per avere stabilità il valore del modulo, quando la fase vale  $-180^\circ$ , deve essere minore di uno. Questo vuol dire che in decibel deve essere un valore negativo. È una grandezza che serve per definire il margine di guadagno.

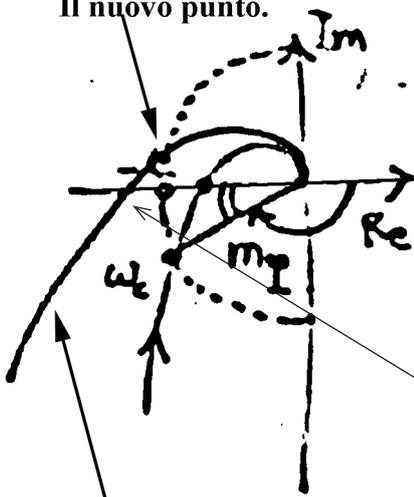
Per essere sicuri che variazioni non troppo grandi dei parametri grande del sistema instabile è utile mantenere dei margini di fase dell'ordine dei  $40^\circ$ - $45^\circ$ , e mantenere dei margini di guadagno dell'ordine di 2, che corrisponde a dire che possiamo tollerare variazioni del 100% del guadagno senza perdere la stabilità.

L'uso dei due diagrammi, quello di Bode e quello di Nyquist, rendono facile vedere cosa succede al variare di certi parametri, ad esempio il guadagno.

Nel diagramma di Bode aumentare il guadagno significa traslare verso l'alto uniformemente il diagramma dei moduli della quantità aumentata.

Aumentando il guadagno si può vedere dal diagramma di Bode stesso che si può passare da una situazione di stabilità ad una situazione di instabilità.

**Effetto della traslazione  
Il nuovo punto.**

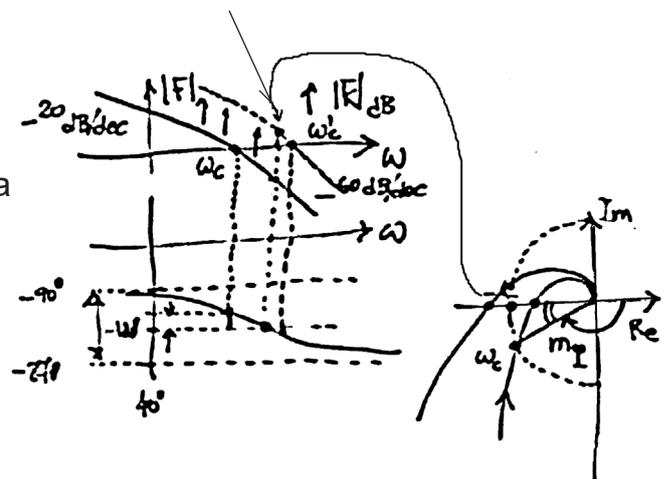


**Effetto della traslazione**

La traslazione comporta un nuovo valore di  $\omega_c$  che, se corrisponde ad un punto nel diagramma delle fasi che è minore di  $-180^\circ$ , implica che il sistema è andato in instabilità.

Questo vuol dire che nel diagramma di Nyquist l'attraversamento del cerchio unitario avviene per valori della fase inferiori a  $-180^\circ$  (superiori in modulo).

Nuovo punto in cui la fase vale  $-180^\circ$ .



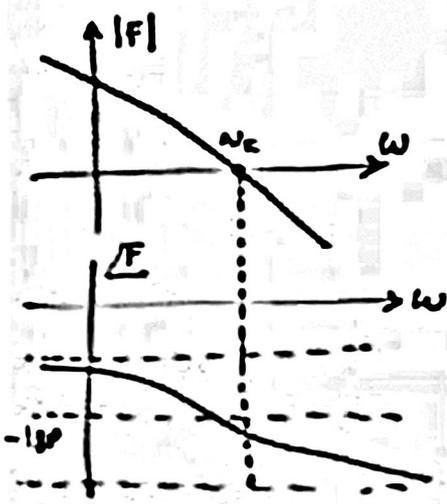
L'effetto finale è stato quello di passare dalla stabilità alla instabilità.

Esempio 2: attraversamenti multipli dell'asse delle frequenze

Si tratta del caso in cui ci sono attraversamenti multipli dell'asse delle frequenze sia per quanto riguarda il diagramma dei moduli sia per quanto riguarda il diagramma delle fasi.

$$F(s) = \frac{\bar{k}(k)}{s(s^2 + a_1s + a_2)}$$

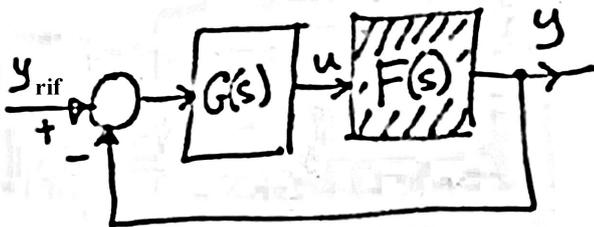
$\bar{k} > 1$



Ci riallacciamo all'esempio precedente immaginando di aver scelto il valore del guadagno in un modo troppo elevato, un valore che rende il sistema instabile. Questo è stato fatto con lo scopo di ridurre l'errore, quindi con lo scopo di aumentare la precisione.

Abbiamo dunque un diagramma dei moduli e un diagramma delle fasi. Il diagramma delle fasi è tale per cui il sistema ha instabilità. Quindi al valore  $\omega_c$  (frequenza di attraversamento) nel diagramma dei moduli corrisponde un valore nel diagramma delle fasi inferiore a  $-180^\circ$ . Non c'è quindi un margine di fase, o, come si dice, c'è un margine di fase negativo.

Quindi in un diagramma di Bode in cui i moduli sono unitari e la fase è al di sotto dei  $-180^\circ$ , il relativo sistema è instabile.



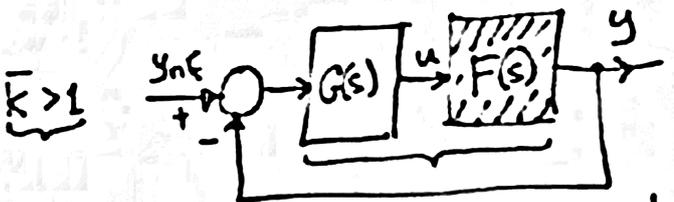
Si immagina fine di avere un sistema del genere, che fa parte di un anello a retroazione. Nel relativo schema è assegnata la parte di guadagno a  $F(s)$ , mentre viene aggiunta la parte  $G(s)$ .

Immaginiamo che la funzione  $G(s)$  sia

$$G(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

che il punto  $1/\tau_1 < 1/\tau_2$ .

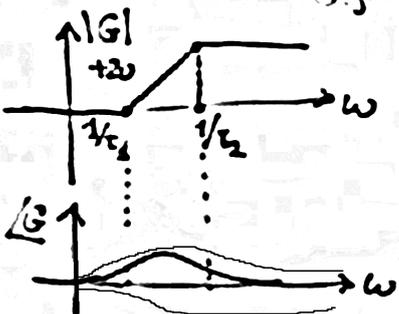
Quello che vogliamo vedere è l'effetto della aggiunta di questa funzione  $G(s)$ , in cascata sul ramo diretto, dal punto di vista della stabilità del sistema.



$\bar{k} > 1$

$$G(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

$\frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_2}$



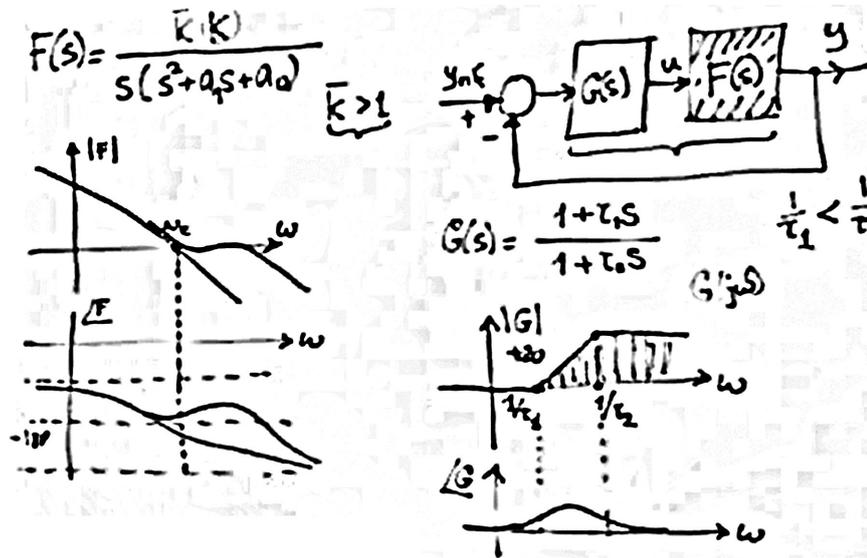
Si applica il criterio di Nyquist disegnandone il diagramma. Per prima cosa disegniamo il diagramma di Bode della funzione  $G(s)$ . L'effetto su tutto il sistema sarà quello di sommare i moduli e le fasi. Il diagramma di Bode della funzione  $G(j\omega)$  ha, al solito, modulo e fase di  $G$ .

il guadagno della funzione è unitaria e come si parte dal valore nullo, arrivati al punto  $1/\tau_1$ , che è la frequenza associata allo zero della funzione, abbiamo una crescita con pendenza  $+20$  decibel per decade fino al valore della pulsazione

$1/\tau_2$ , da questo punto il modulo ha valore costante, perché il guadagno all'infinito è pari a  $\tau_1/\tau_2$ .

L'andamento qualitativo di Bode del modulo della funzione è a spezzate.

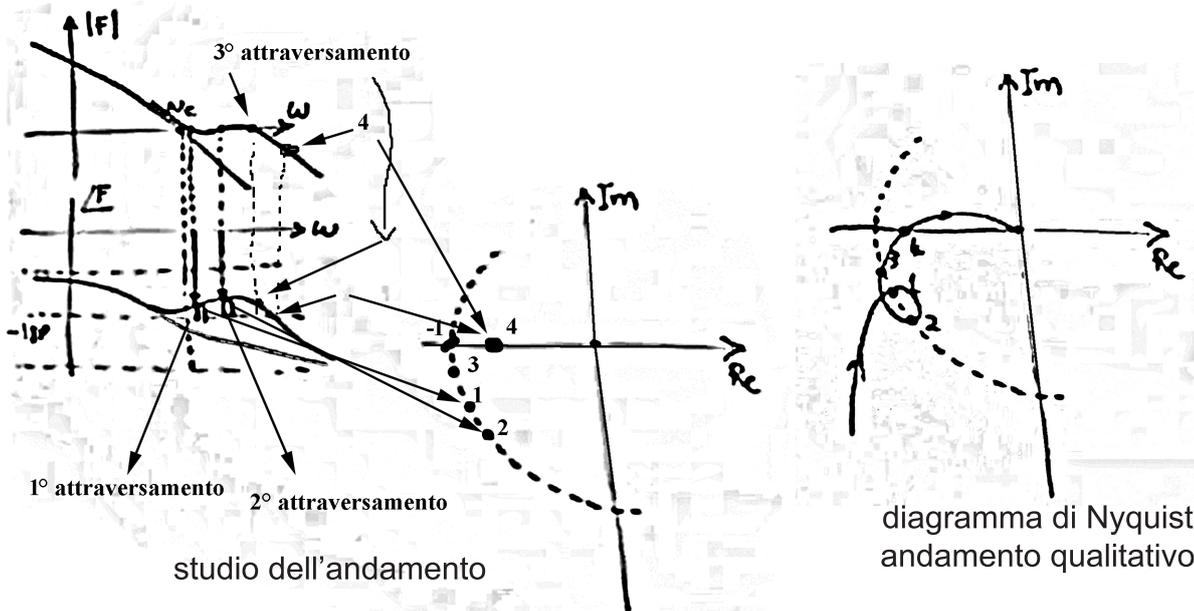
Per quanto riguarda le fasi, poiché lo zero viene prima del polo, si avrà un andamento a salire dovuto allo zero, si avrà un andamento a scendere dovuto al polo, la somma di due andamenti è una specie di campana.



Dobbiamo sommare i diagrammi dei moduli e delle fasi della funzione F e della funzione G al fine di ottenere quelli del sistema completo.

Si nota che nel diagramma dei moduli ci sono tre attraversamenti, ci sono tre pulsazioni di attraversamento.

Questo vuol dire che ci sono tre pulsazioni per le quali il modulo è nullo in decibel quindi è unitario.



Questo significa che nel diagramma di Nyquist, facendo il cerchio unitario, abbiamo tre attraversamenti del cerchio unitario. Per determinare dove saranno questi attraversamenti dobbiamo andare a vedere sul diagramma di Bode delle fasi.

Notiamo che la prima pulsazione si trova al di sopra dei  $-180^\circ$ , ad esempio  $-170^\circ$ , che corrisponde ad un valore nel terzo quadrante del piano complesso del diagramma di Nyquist.

Per quanto riguarda la seconda pulsazione vediamo che la fase è aumentata, quindi potrebbe avere un valore ad esempio di  $-160^\circ$ , e che corrisponde ad un ulteriore valore

sul diagramma di Nyquist.

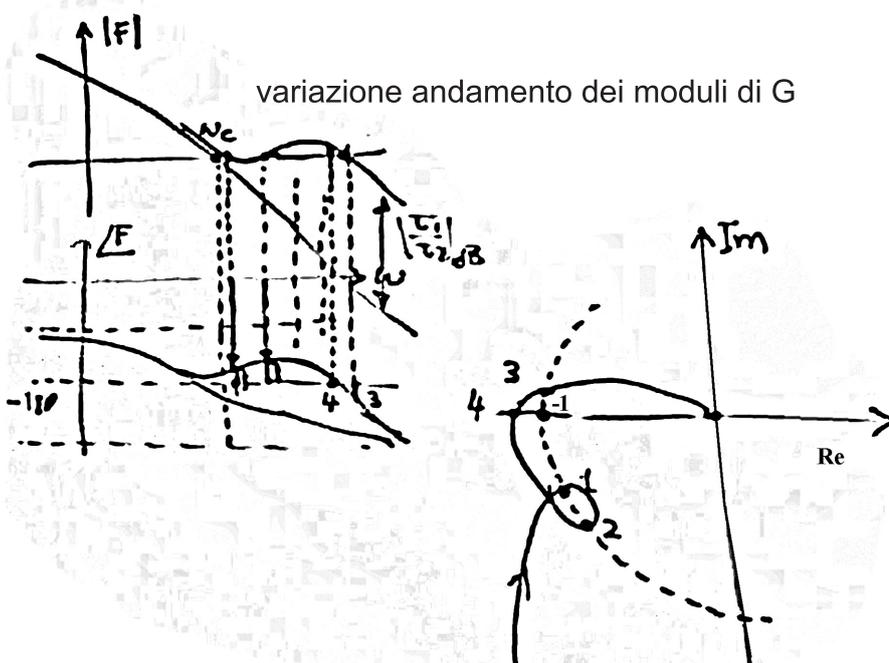
La terza pulsazione di attraversamento corrisponde ad una fase al di sopra dei  $-180^\circ$ .

Quello che fa il diagramma di Nyquist è partire da 0-, attraversare il punto 1, tornare indietro attraversando il punto 2, e portandosi sul punto 3. L'asse reale sarà attraversato in un punto tale per cui la fase nel diagramma di Bode vale  $-180^\circ$  andando a vedere il valore nel diagramma di Bode dei moduli. Si nota che è una quantità minore di 1 (sotto l'ascissa dei moduli), tale frequenza viene denominata frequenza numero 4 e viene riportata sul diagramma di Nyquist.

L'andamento qualitativo viene mostrato nella relativa figura.

Dal punto di vista della stabilità non è successo niente.

Completando il diagramma andando a considerare le frequenze negative e contando il numero di rotazioni, si arriva alla conclusione che il sistema è stabile.



Se però l'andamento dei moduli dovuto all'introduzione della funzione G fosse stato più elevato, quindi con un rapporto  $\tau_1/\tau_2$  molto elevato, il terzo attraversamento nel diagramma dei moduli avviene per valori delle fasi che sono al di sotto di  $-180^\circ$ , cioè un valore ad esempio di  $-190^\circ$ . Il punto numero 3, della relativa frequenza, sarà dunque non più dov'era prima, ma sarà nel secondo quadrante, ovvero dove la parte immaginaria è positiva e la parte reale è negativa.

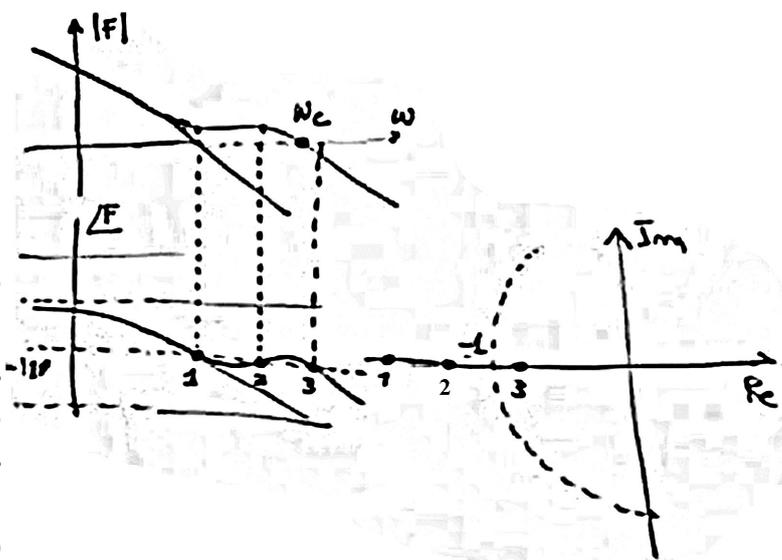
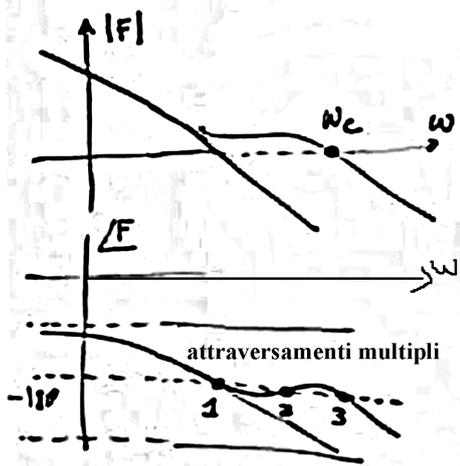
Inoltre, per la frequenza numero 4, per cui il valore delle fasi è  $-180^\circ$ , si osserva un modulo maggiore di zero in decibel, ovvero un modulo maggiore di 1, quindi tale frequenza sul diagramma di Nyquist è a sinistra di -1. Il diagramma di Nyquist ha dunque un andamento diverso.

È stato dunque scavalcato il punto critico -1, dal punto di vista dell'analisi della stabilità; ci accorgiamo che il sistema è diventato instabile.

La verifica completa consiste nel disegnare parte simmetrica corrispondente ai valori negativi delle  $\omega$ , andare a contare le rotazioni in senso orario, che sono 2, quindi  $N = 2$ . Inoltre il sistema non ha poli con parte reale positiva, l'anello è aperto per cui il sistema ad anello chiuso avrà due radici con parte reale positiva: il sistema ad anello chiuso è diventato instabile.

Questo è il caso di attraversamento multipli dell'asse delle  $\omega$  nel diagramma dei moduli. Una situazione analoga si può avere nel diagramma delle fasi.

Vediamo quindi ora è il caso in cui il diagramma dei moduli è attraversato una sola volta, per cui c'è una sola frequenza di attraversamento, mentre quello delle fasi più volte, 3 volte. Ci sono quindi tre valore della frequenza per cui la fase vale  $-180^\circ$ .



Determiniamo ora il corrispondente diagramma di Nyquist.

Poiché c'è un solo attraversamento nel diagramma dei moduli, cioè c'è una sola frequenza di attraversamento, si deduce che c'è un solo attraversamento del cerchio di raggio unitario nel diagramma di Nyquist. In altre parole il diagramma dei moduli attraverso una sola volta il cerchio di raggio unitario.

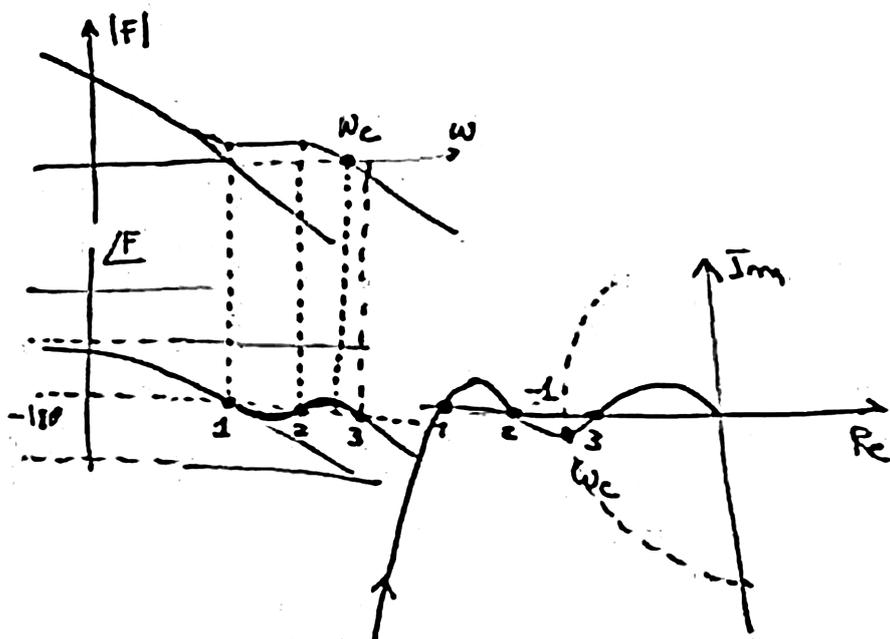
Nel diagramma delle fasi ci sono tre attraversamenti della linea  $-180^\circ$ , quindi nel diagramma di Nyquist ci sono tre attraversamenti del semiasse reale negativo.

Nel diagramma di Bode il primo attraversamento è in corrispondenza di un modulo maggiore di 1, quindi vuol dire che nel diagramma di Nyquist il punto è a sinistra del punto -1.

In corrispondenza del secondo attraversamento il modulo è ancora maggiore di 1.

In corrispondenza del terzo attraversamento il modulo è minore di 1.

Si noti erano dunque le tre frequenze riportate sul diagramma di Nyquist.



si proviene da infinito con fase  $90^\circ$

La frequenza  $\omega_c$  nel diagramma dei moduli corrisponde ad una frequenza nel diagramma delle fasi di valore maggiore di  $-180^\circ$ , ad esempio  $-170^\circ$ . Questo colloca il punto relativo nel diagramma di Nyquist, sul cerchio unitario, nel terzo quadrante, che è il punto di attraversamento del cerchio unitario.

Determinato questo punto il diagramma di Nyquist è tracciabile.

Il punto 3 è sull'asse reale; il punto  $\omega_c$  sul cerchio di raggio unitario.

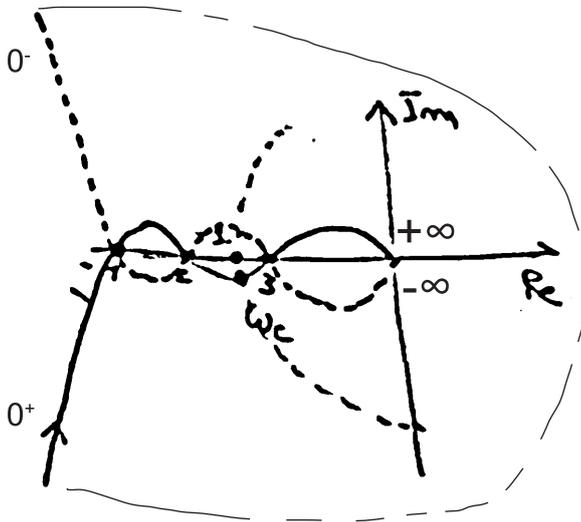
L'essere andati un po' sopra il diagramma di Nyquist tra i punti 1 e 2 corrisponde al fatto che le fasi scendano nel relativo diagramma delle fasi di Bode al di sotto di  $-180^\circ$ .

I valori inferiori a  $-180^\circ$  ( $-190^\circ$  ad es.) nel diagramma delle fasi di Bode sono quelli che stanno nel secondo quadrante.

I valori superiori a  $-180^\circ$  sono quelli che stanno nel terzo quadrante.

Il tracciato si conclude andando all'infinito.

Questo diagramma è molto interessante dal punto di vista dello studio della stabilità.



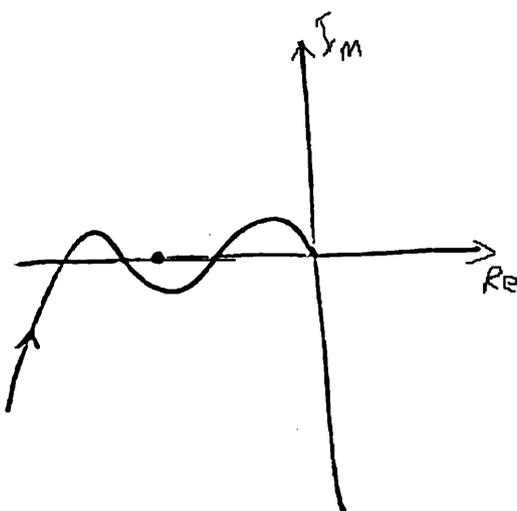
Per fare l'analisi il diagramma va completato con la porzione del diagramma corrispondente a frequenze negative, porzione che è simmetrica rispetto all'asse reale.

C'è poi la chiusura da  $0-$  a  $0+$  facendo tanti giri, in senso orario, quanto è la molteplicità del polo questo caso è 1.

Se contiamo le rotazioni, immaginiamo un vettore centrato nel punto  $-1$  che segue la curva.

In dettaglio dal punto  $-\infty$  a 3 non c'è nessuna rotazione, da 3 a 2 c'è una mezza rotazione in senso antiorario ( $-1/2$ ), dal punto 2 a 1 non c'è

nessuna rotazione, dal punto 1 al punto che incontra l'asse reale abbiamo una mezza rotazione in senso orario ( $1/2$ ), dall'ultimo punto precedente al punto 1 c'è una mezza rotazione in senso orario ( $1/2$ ), dal punto 1 al punto 2 non c'è nessuna rotazione, dal punto 2 al punto 3 c'è una mezza rotazione in senso antiorario ( $-1/2$ ), dal punto tre al punto  $+\infty$  non c'è nessuna rotazione. La somma algebrica è 0. Quindi  $N = 0$ , il sistema è stabile perché il sistema ad anello aperto non aveva poli con parte reale positiva.

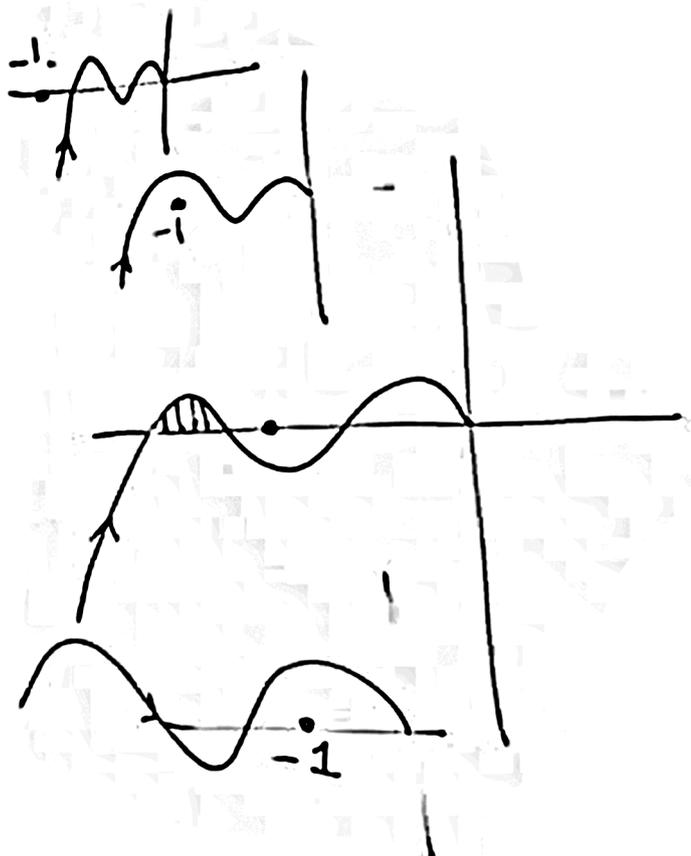


Consideriamo nuovamente il diagramma per fare delle considerazioni sui margini di stabilità.

Il sistema è instabile. Pensando al ruolo del guadagno, per quanto riguarda la stabilità, ci accorgiamo che il sistema può diventare instabile sia se aumenta il guadagno, sia se lo diminuisco.

Aumentando il guadagno la curva si ingigantisce verso sinistra, cioè vengono aumentate tutte le lunghezze e questo comporta stabilità, si hanno due giri.

Diminuendo il guadagno quello che succede è che la curva viene rimpicciolita verso destra in maniera proporzionale, il sistema permane in instabilità fino ad un certo punto.



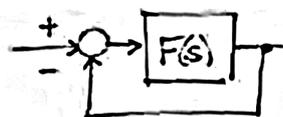
### Esempio 3. Sistema ad anello aperto instabile

Si analizza ora un sistema ad anello aperto che instabile e che diventa stabile quando si va a chiudere l'anello.

Verrà usata la formula  $N = Z_{CH} - Z_{AP}$  in un modo meno convenzionale.

Il sistema ad anello aperto ha i poli con parte reale positiva, per poter riscontrare il fenomeno che si vuole analizzare.

$$F(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-2)(s+5)}$$



Data la funzione di trasferimento, si nota che c'è un guadagno K, c'è uno zero nel punto 1 ( $s + 1$  al denominatore), c'è un polo nell'origine, un polo nel punto 2 ( $s - 2$ ), un polo nel punto

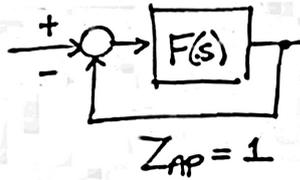
$-5 (s + 5)$ .

Il sistema ad anello aperto presenta dunque un polo con parte reale positiva.

La struttura del sistema è descritta dello schema generale relativo.

Un sistema ad anello aperto può essere instabile mentre può essere stabile un sistema ad anello chiuso, e questo è un esempio in cui la retroazione può stabilizzare un sistema che è intrinsecamente instabile.

$$F(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-2)(s+5)}$$



$$\frac{1 + \tau_1 s}{1 - \tau_1 s}$$

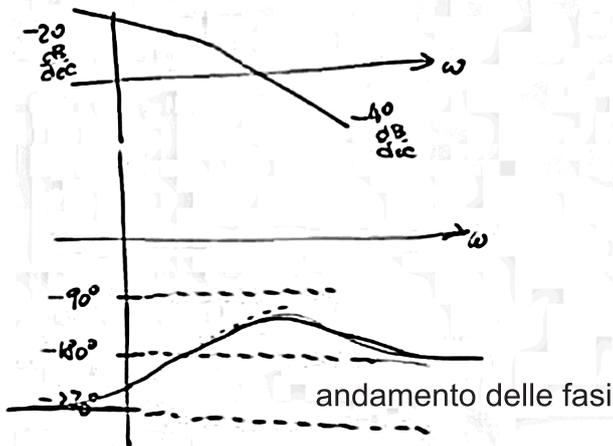
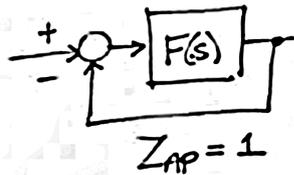
$$s-2 = -2 \left[ 1 - \frac{s}{2} \right]$$

Il numero indicato con  $Z_{AP}$  è pari a 1, il numero di poli con parte reale positiva del sistema ad anello aperto è 1, il polo è dato da  $s - 2$ .

Per fare il diagramma di Nyquist si traccia prima il diagramma di Bode.

Per portarsi in una forma conosciuta scriveremo invece di  $s - 2$ ,  $-2[1 - s/2]$ . In questo modo si identifica il termine  $1 - \tau_1$ .

$$F(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-2)(s+5)}$$



Il segno - di -2 influenzerà il diagramma delle fasi; la fase del fattore -1 è più o meno pari a  $-180^\circ$ . Il fattore -1 ha modulo unitario, quindi nullo nel diagramma di Bode, ma è un fattore che modifica le fasi in quanto abbiamo un termine aggiuntivo di  $-180^\circ$ .

Del diagramma di Bode interessano soprattutto le fasi, in quanto sui moduli c'è poco da dire.

Nei moduli, avendo un polo nell'origine, la pendenza iniziale è -20 decibel (dB) per decade.

Per quanto riguarda la pendenza finale, abbiamo tre poli (al denominatore), uno zero (al numeratore), la differenza tra zeri e poli è due, quindi abbiamo una pendenza finale di -40 decibel per decade.

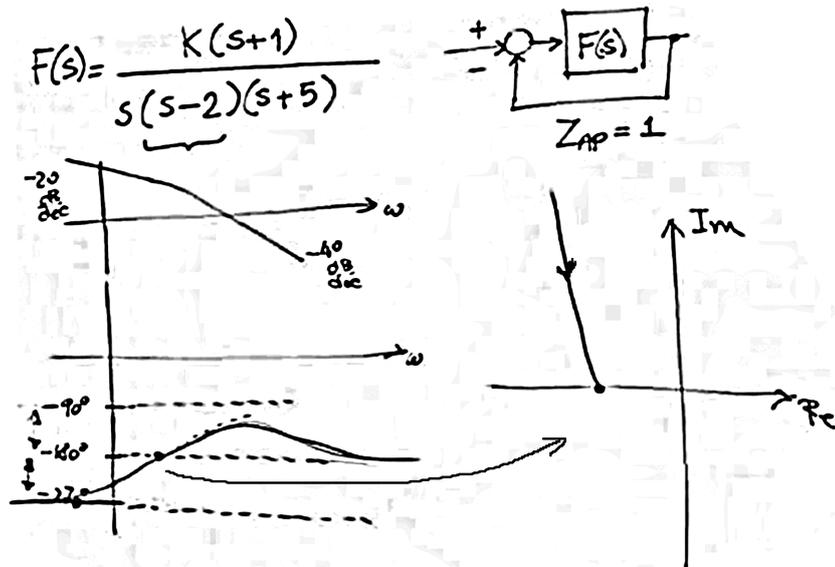
Per quanto riguarda le fasi, abbiamo un fattore  $-180^\circ$  di base, sempre, portato dal -2; ci sono poi altri  $-90^\circ$  portati dal polo nell'origine. Quindi si partirà da valori della fase vicini a  $-270^\circ$ .

Poi c'è uno zero con pulsazione di rottura uguale a 1, per cui cominceremo a salire. C'è un polo a parte reale positiva, il cui effetto sulla fase è opposto a quello dato dai poli a parte reale negativa. Quest'ultimi danno una diminuzione della fase, gli altri danno luogo ad un aumento delle fasi. La fase quindi tende ad aumentare fino ad un valore di  $-90^\circ$ , però c'è polo in 5, con parte reale negativa che riporta le fasi in basso di  $-90^\circ$  per cui alla fine tutto si assesta sui  $-180^\circ$ .

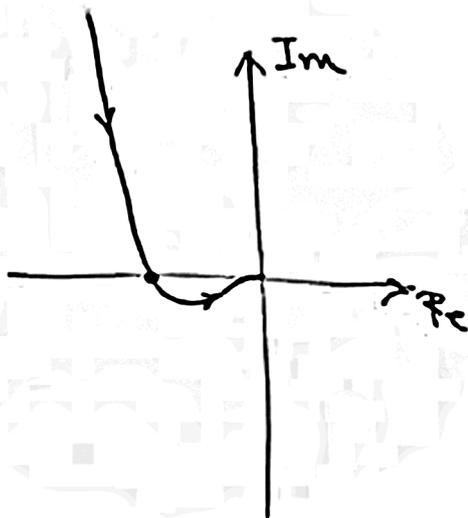
Quindi l'andamento delle fasi della funzione di trasferimento è quella mostrata in figura. Tracciato il diagramma delle fasi possiamo tracciare il diagramma di Nyquist.

È molto importante il diagramma delle fasi di Bode perché aiuta a leggere in quali quadranti si trova compresa la curva.

Si nota che le fasi sono comprese fra due fasce, la prima fra  $-90^\circ$  e  $-180^\circ$ , la seconda fra  $-180^\circ$  e  $270^\circ$ .



Inizialmente quando  $\omega$  cresce da 0 fino ad un certo valore, quello di intersezione con il valore  $-180^\circ$ , la fase è compresa fra  $-180^\circ$  e  $-270^\circ$ . Questo significa che la curva si trova nel secondo settore, quello con parte immaginaria positiva e parte reale negativa. Per valori di  $\omega$  molto bassi il modulo è molto elevato e la fase è  $-270^\circ$ . Da queste considerazioni si traccia una prima parte del diagramma.



Da quel punto in poi la fase tutta compresa nella fascia tra  $-90^\circ$  e  $-180^\circ$ . Questo vuol dire che il diagramma è compreso nel terzo quadrante, quello a parte immaginaria negativa e a parte reale negativa.

Il modulo tende a zero e la fase tende a asintoticamente a  $-180^\circ$ . Possiamo dunque tracciare la restante parte del diagramma.

Vedremo come sia possibile analizzare la stabilità del sistema a partire da questo diagramma.

□

Prof. Alberto Isidori  
40'36"

Proseguiamo nello studio della stabilità di un sistema a retroazione nel quale è presente

un polo con parte reale positiva nella funzione di trasferimento ad anello aperto. Abbiamo il diagramma di Bode, in particolare quello delle fasi, in modo qualitativo. Questo ci ha consentito di disegnare il diagramma di Nyquist.

Per  $\omega$  vicino a zero le fasi tendono a  $-270^\circ$ , crescono fino ad arrivare a  $-180^\circ$  e i moduli vanno da più infinito ad un certo valore.

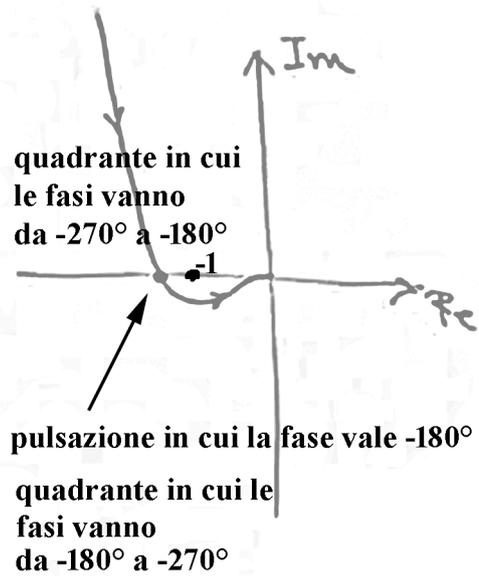
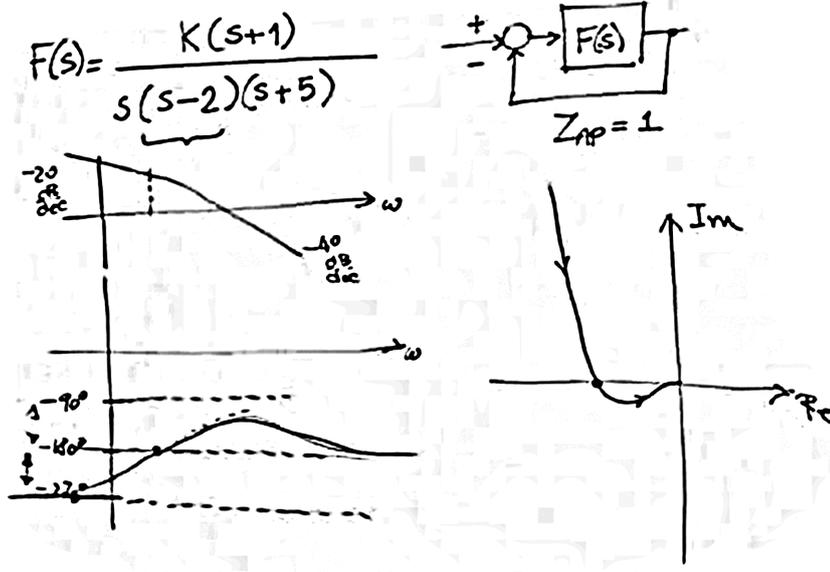
Nel punto in cui la fase vale  $-180^\circ$  il modulo è positivo in

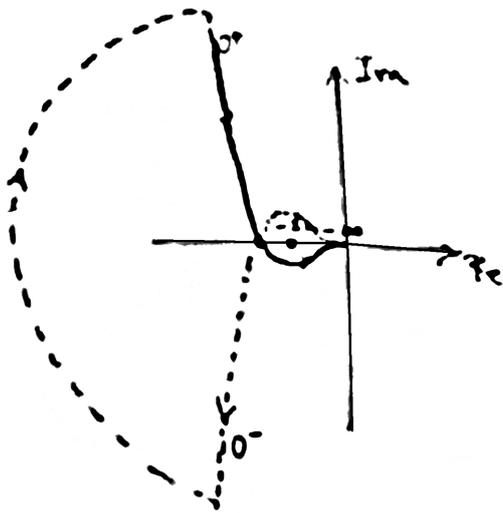
decibel quindi si riscontra che il modulo è maggiore di uno e questo vuol dire che il punto  $-1$  si trova a destra di esso.

Nel diagramma di Bode delle fasi, al crescere di  $\omega$  la fase comincia a crescere e poi si assesta intorno al valore di  $-180^\circ$ .

Il modulo tende a zero perché tende a meno infinito in decibel.

Quindi il vettore rappresentativo nel diagramma di Nyquist è ha una fase crescente, poi la fase torna indietro, e quando il vettore diventa molto piccolo, la fase tende a diventare la fase del vettore orientato verso il semiasse reale negativo.





Per studiare la stabilità occorre disegnare il diagramma di Nyquist corrispondente alle pulsazioni negative, che è simmetrico rispetto all'asse reale. In esso le frequenze vanno da meno infinito fino a 0-. Poi vanno da 0- a 0+, facendo tanti mezzi giri in senso orario quanto è la molteplicità del polo che ha causato l'allontanamento del diagramma all'infinito. Nel nostro caso il diagramma si allontana all'infinito per la presenza del polo nell'origine, quindi si deve fare un solo mezzo giro. La chiusura all'infinito del diagramma avviene come mostrato in figura.

Quello che abbiamo ottenuto è il diagramma complesso relativo alla configurazione.

A questo punto dobbiamo stabilire il numero  $N$  di rotazioni.

Partendo da meno infinito e muovendosi verso il punto di intersezione, il vettore che rappresenta la funzione  $F$ , cioè il vettore che congiunge il punto  $-1$  con la curva, compie mezzo giro in senso antiorario ( $-1/2$ ).

Arrivati a questo punto il vettore scende di sotto e arriva all'intersezione con l'asse reale e da qui verso la parte superiore del diagramma, fino al punto sull'asse reale non facendo alcun giro.

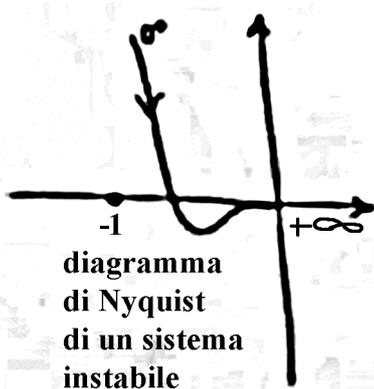
Da questo punto fino a più infinito (tratto in basso) viene fatto un mezzo giro in senso antiorario ( $-1/2$ ).

Quindi  $N = -1$ . Ricordando la formula che lega il numero di giri positivi in senso orario al numero di radici, essa è  $N = Z_{CH} - Z_{AP}$ , con  $Z_{CH}$  pari al numero di radici con parte reale positiva del sistema ad anello chiuso e con  $Z_{AP}$  pari al numero di radici con parte reale positiva del sistema ad anello aperto.

Poiché  $N = -1$  e  $Z_{AP} = 1$ , allora  $Z_{CH} = 0$ . Questo ci permette di concludere che il sistema ad anello chiuso è stabile, in quanto non ci sono radici con parte reale positiva nel sistema ad anello chiuso. Si tratta quindi di un effetto stabilizzante della retroazione.

Il sistema è venuto stabile essenzialmente per il fatto che nel diagramma di Nyquist il punto  $-1$  si trova a destra del punto di attraversamento.

Immaginiamo ora uno scenario analogo ma nel quale ci sia instabilità, tracciando il relativo diagramma di Nyquist.



Una situazione del genere è possibile diminuendo il guadagno nel sistema precedente.

Nel diminuire il guadagno, il diagramma di Bode si modifica abbassando i moduli e lasciando inalterato il diagramma delle fasi, mentre il diagramma di Nyquist si restringe verso sinistra.

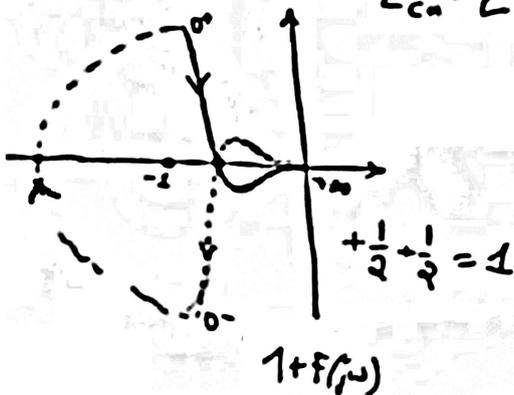
Facendo la stessa operazione di chiusura del diagramma di Nyquist e contando le rotazioni, esse sono 1.

Dunque il numero totale di rotazioni che il vettore rappresentativo della funzione  $1 + F(j\omega)$  compie attorno alla sua origine,

$$\tilde{N} = Z_{CH} - Z_{NP}$$

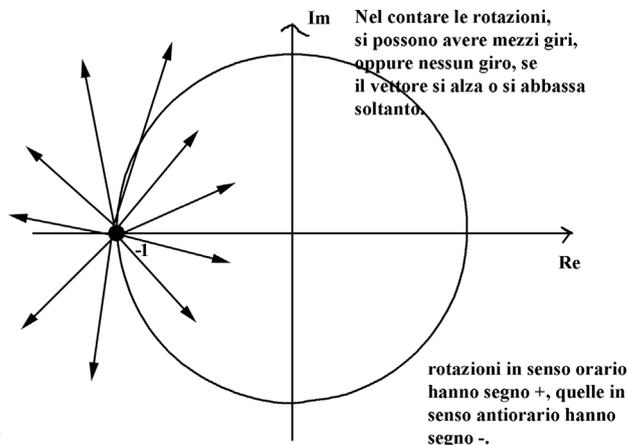
$$1 = Z_{CH} - 1$$

$$Z_{CH} = 2$$



cioè il numero di rotazioni che il vettore  $F$  compie intorno al punto  $-1$  è pari a 1.

Applicando la formula troviamo che  $Z_{CH} = 2$ . Quindi il sistema ad anello chiuso ha due radici con parte reale positiva per cui il sistema è instabile.



La figura sopra corrisponde a guadagni bassi, con instabilità del sistema.

La precedente figura, a guadagni alti, rappresentava un sistema stabile.

Abbiamo visto in sostanza come la stabilità si acquisisce aumentando il guadagno, in un sistema del tutto particolare.

Qualitativamente possiamo dire che il sistema instabile comandato con un basso guadagno permane in un sistema instabile.

Volando passare da un sistema instabile ad un sistema stabile il comando da dare deve essere abbastanza importante e questo spiega perché occorre un guadagno al di sopra di un certo valore minimo per passare da una situazione di instabilità ad una situazione di stabilità.

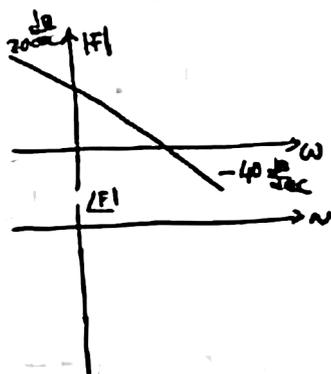
Se però il guadagno è troppo elevato può rispuntare fuori una instabilità.

Esempio 4. Un diagramma più elaborato.

$$F(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s+4)(s^2+2)}$$

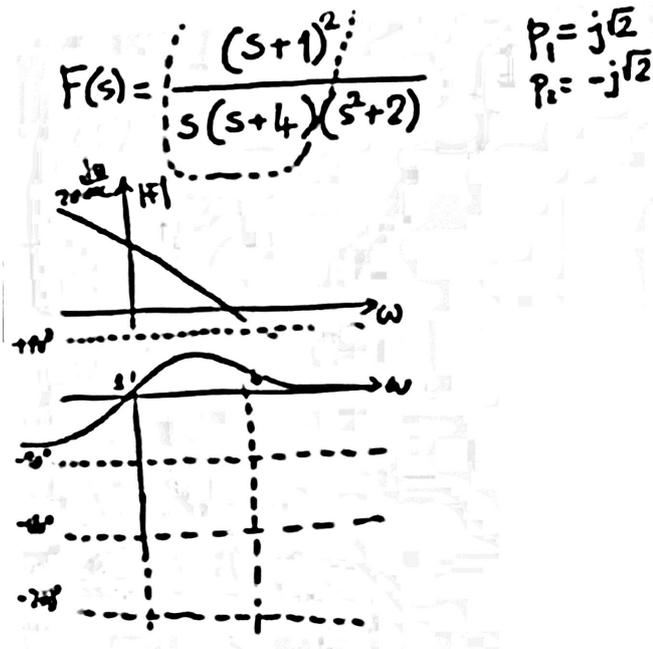
$$p_1 = j\sqrt{2}$$

$$p_2 = -j\sqrt{2}$$



Si tratta di un sistema a retroazione caratterizzato da una funzione di trasferimento ad anello aperto della forma rappresentata in figura, con due zeri nel punto  $-1$ , ovvero due zeri con parte reale negativa, un polo nell'origine, un polo nel punto  $-4$ , due poli sull'asse immaginario (il termine  $s^2 + 2$ )

Questo complica il diagramma di Nyquist. Tracciamo come prima cosa il diagramma di Bode, in modo qualitativo.



Per quanto riguarda i moduli, si parte con pendenza di -20 dB per decade perché c'è un polo nell'origine. Abbiamo in totale quattro poli e due zeri, la differenza fa due per cui ad un certo punto la pendenza diventerà -40 dB per decade.

Si noti come ai fini del tracciamento del diagramma di Nyquist il diagramma dei moduli di Bode non dia particolari informazioni. Al contrario di quello delle fasi.

Per semplificare le operazioni di studio si considera una parte della funzione, quella che non contiene i due poli sull'asse immaginario.

Abbiamo un polo nell'origine, nel punto -4 e poi ci sono due zeri con parte reale

negativa.

Per la presenza del polo nell'origine ( $s$ ) la fase partirà da  $-90^\circ$ . Ci sono poi due punti critici, 1 e 4.

La fase dalla partenza tende a salire, se ci fosse un solo polo sarebbe da  $-90^\circ$  verso lo zero, ma siccome lo zero è doppio allora tende a salire da  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ . Se non ci fosse né il polo in -4 né il successivo, da  $s^2 + 2$ , la fase andrebbe da  $-90^\circ$  verso  $+90^\circ$ , salendo con una legge dell'arcotangente. Poiché c'è il polo in -4, la fase ritorna zero.

Quindi questo è il diagramma delle fasi ottenuto considerando una parte della  $F(s)$ ; per il termine scelto, avendo due zeri (al numeratore) e due poli (al denominatore), la fase tende a zero.

Vediamo ora cosa succede considerando anche il termine  $1/(s^2 + 2)$ .

Questo termine corrisponde ad un polo nel punto  $2^{1/2}$  che si troverà più o meno a metà della campata delle fasi. Il punto  $2^{1/2}$  è in scala logaritmica la media geometrica di 4 e 1. Siccome è un polo nell'origine il modulo in quel punto,  $2^{1/2}$ , va all'infinito, per cui il diagramma dei moduli si modifica di conseguenza.

Quindi il modulo viene dall'infinito, scende fino ad un certo valore e torna all'infinito. Poi va da  $+\infty$  a  $-\infty$ .

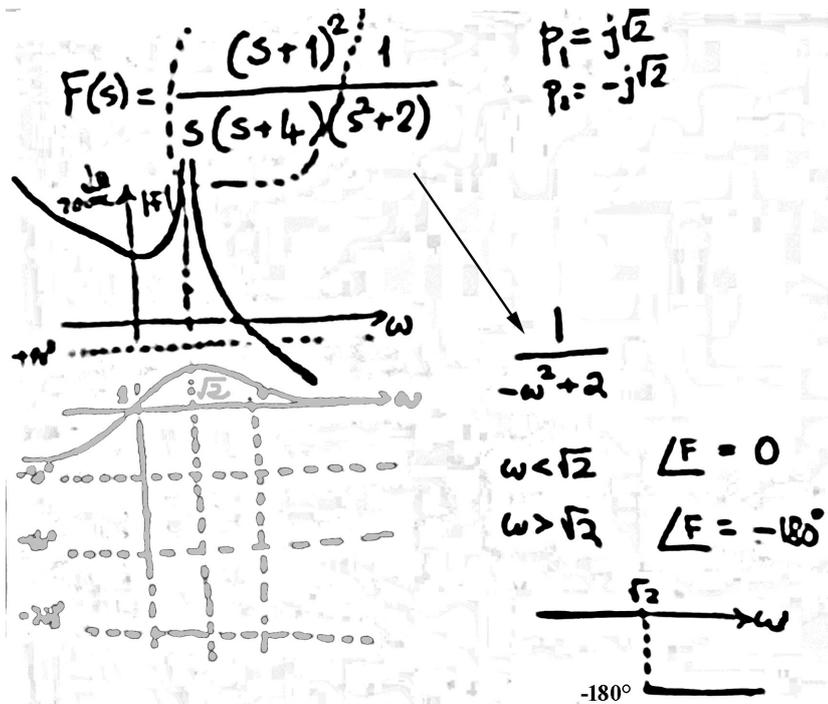
Ripetiamo che il modulo va all'infinito perché per  $\omega$  uguale a  $2^{1/2}$  il termine  $s^2 + 2$  diventa nullo e quindi la funzione  $F(j\omega)$  va all'infinito.

Il fattore  $1/(s^2 + 2)$ , per  $s = j\omega$ , è uguale a  $1/(-\omega^2 + 2)$ , che è una quantità reale per ogni  $\omega$ . Quindi le fasi sono 0 oppure  $180^\circ$  a seconda del segno.

Se  $\omega < 2^{1/2}$ , il denominatore è una quantità positiva e quindi la fase è uguale a 0.

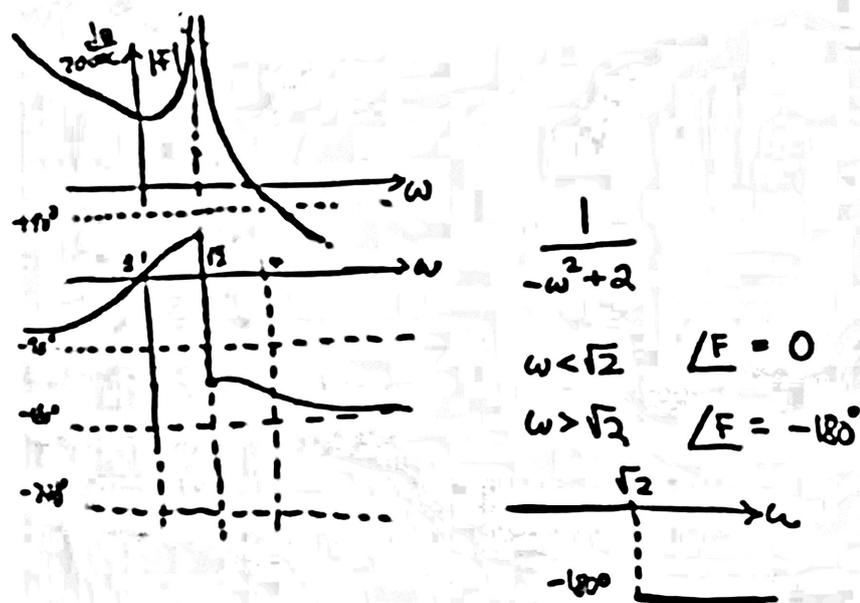
Se  $\omega > 2^{1/2}$ , il denominatore è una quantità negativa e quindi la fase è uguale a  $180^\circ$ .

Il diagramma delle fasi di questo termine vale zero fino a  $2^{1/2}$ , poi per valori maggiori vale  $-180^\circ$ .



Il diagramma delle fasi del fattore aggiuntivo deve essere raggiunto a quello precedente. Fino al punto  $\omega = \sqrt{2}$  non succede nulla, per il valore  $\omega = \sqrt{2}$  c'è un brusco abbassamento delle fasi della quantità  $-180^\circ$ .

Nel diagramma precedente ci trovavamo in un punto tra  $+90^\circ$  e  $0$ , in quello definitivo c'è uno spostamento di  $-180^\circ$  da quel punto. Dopodiché la curva replica quella che c'era prima, solo più in basso.



Questo è dunque il diagramma di Bode finale, con la presenza di una discontinuità nelle fase, dovuta alla presenza del polo sull'asse immaginario della funzione  $F$ .

Tracciamo ora il diagramma di Nyquist.

Per  $\omega$  che va da  $0+$  a crescere, quello che succede è

che quando  $\omega$  cresce il modulo inizialmente è infinito, la fase inizialmente è  $-90^\circ$ , con valori leggermente superiori. Questo significa che nel diagramma di Nyquist la curva è tutta compresa nel quarto quadrante, oppure il primo quadrante in senso orario, quello con parte reale positiva e con parte immaginaria negativa. Il modulo tende a diminuire fino ad una pulsazione in cui la fase è diventata zero e questo vuol dire attraversare il semiasse positivo nel diagramma di Nyquist.

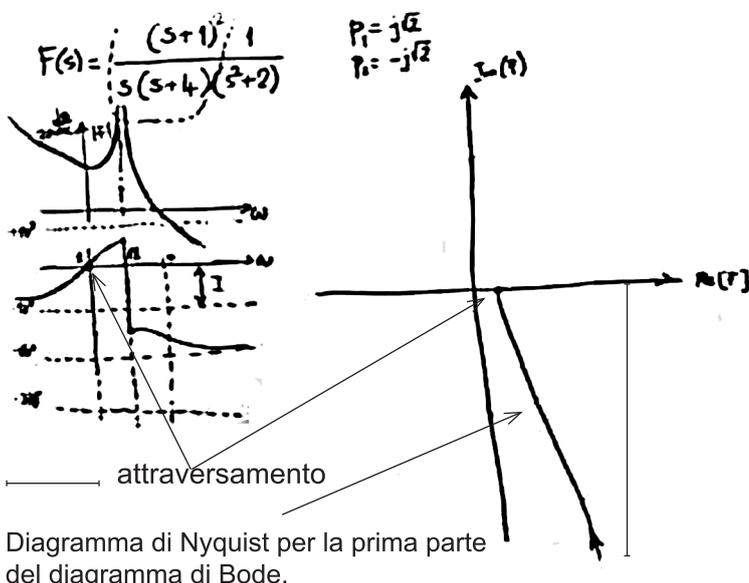
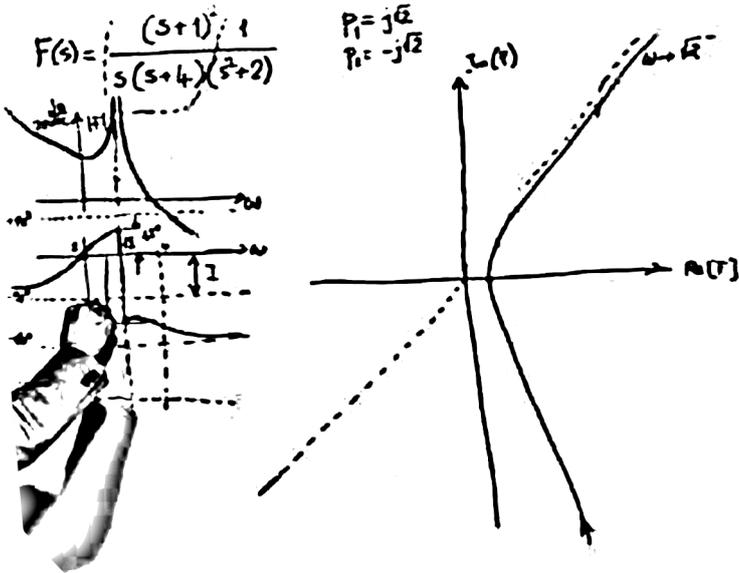
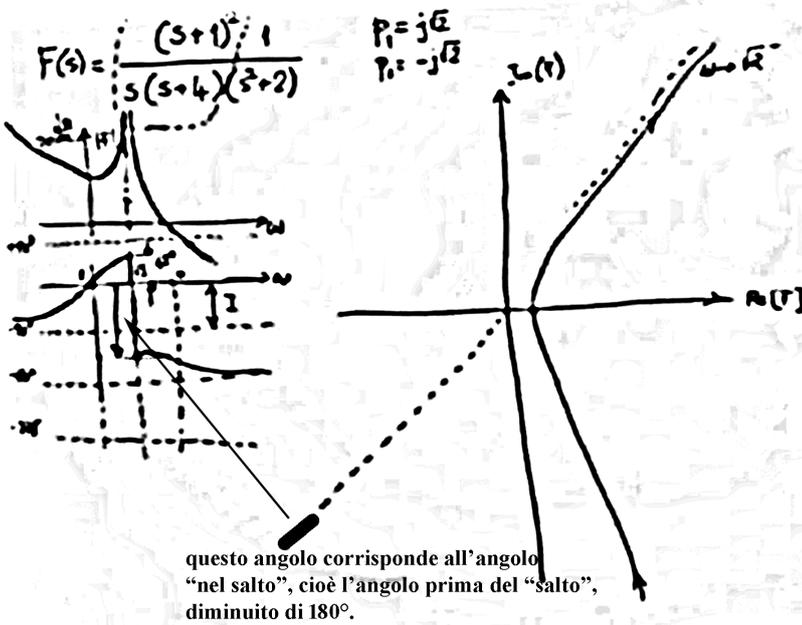


Diagramma di Nyquist per la prima parte del diagramma di Bode,



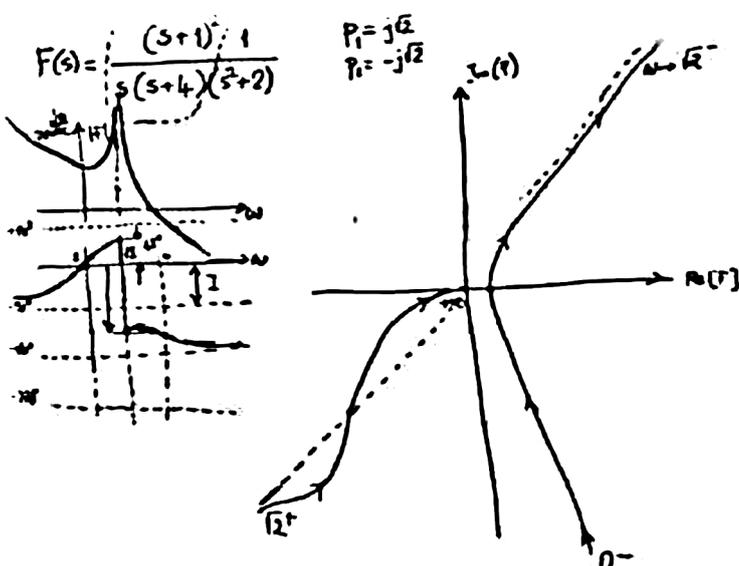
Poi la fase diventa positiva, quindi ci troviamo nel primo quadrante, quello con la parte reale positiva e la parte immaginaria positiva, fino ad un certo valore massimo della fase, in corrispondenza del quale il modulo va all'infinito. Questo vuol dire che la curva rappresentativa del diagramma di Nyquist va di nuovo all'infinito con un angolo corrispondente al valore massimo della fase nel diagramma di Bode, che, nella figura, potrebbe essere di  $45^\circ$ .

Quindi il diagramma va all'infinito per  $\omega$  che tende a  $2^{1/2}$  per valori negativi, da sinistra.

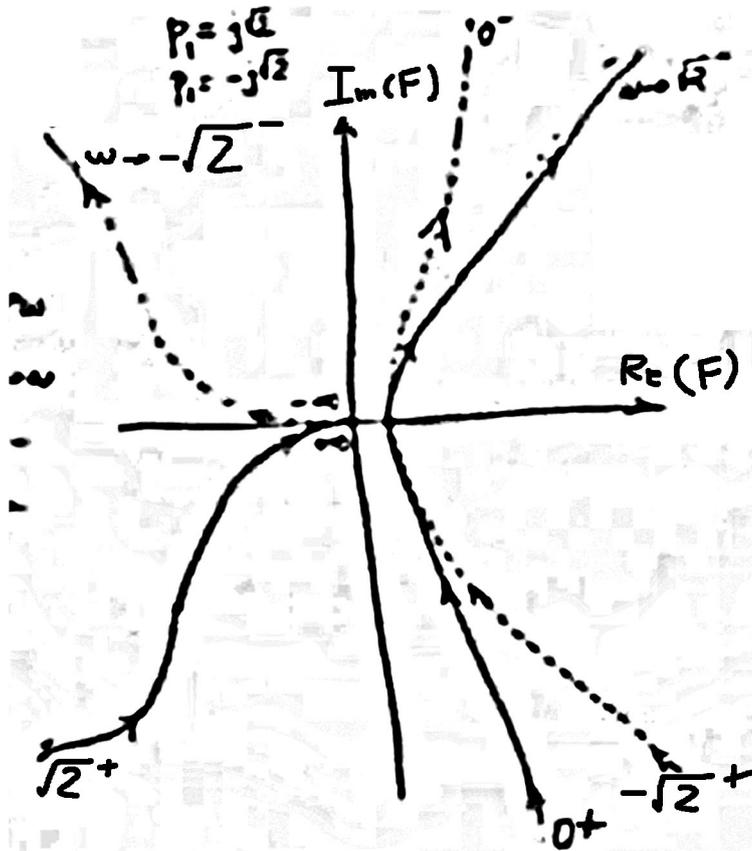
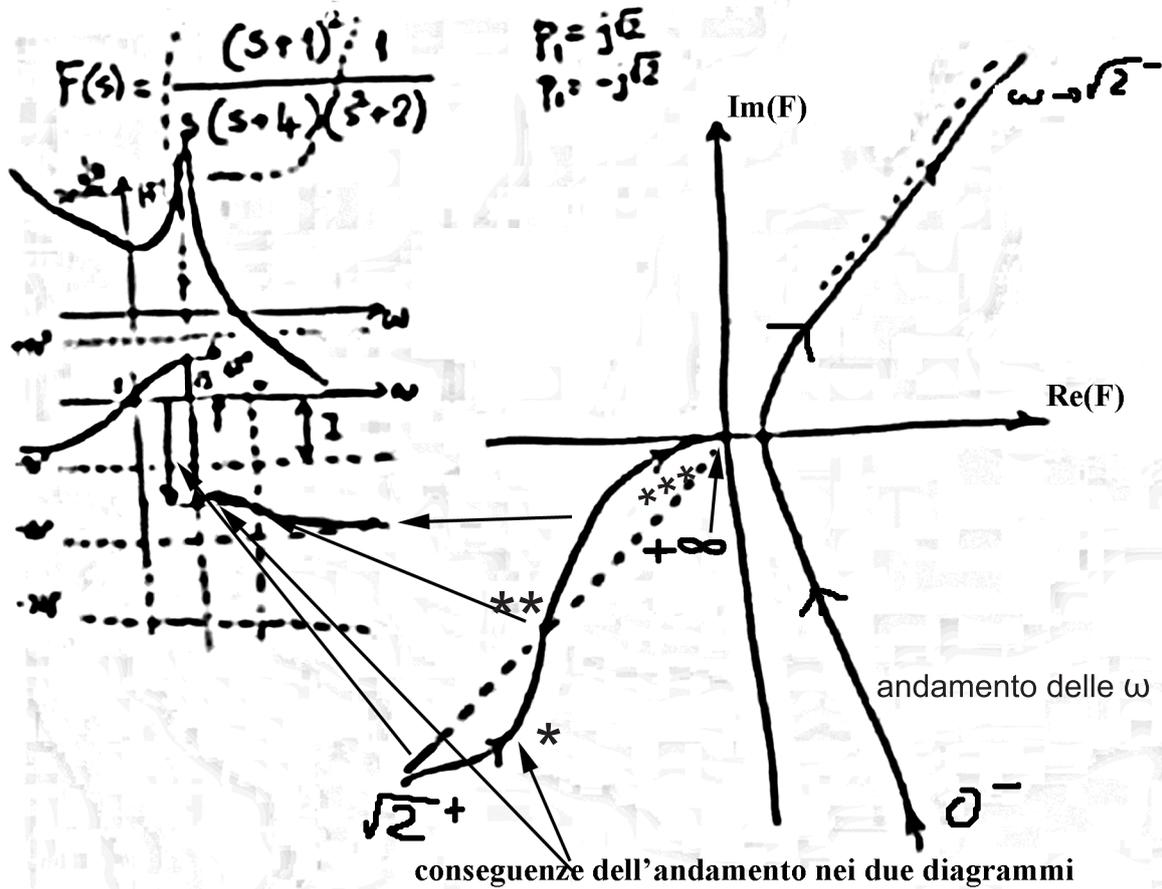


Poi la fase subisce una brusca variazione di  $180^\circ$ , il che corrisponde ad andare avanti o tornare indietro in quanto le fasi sono definite a meno di  $360^\circ$ .

Il valore della fase nel diagramma di Nyquist (in basso a sinistra) corrisponde al valore dell'angolo nel momento del "salto" diminuito di  $180^\circ$ .



Da quel valore, la fase tende ad aumentare un pò\*, poi ci ritroviamo nel punto di valore pari a quello da cui eravamo partiti\*\*, poi la fase tende a  $-180^\circ$ , con il modulo che tende a zero\*\*\*.

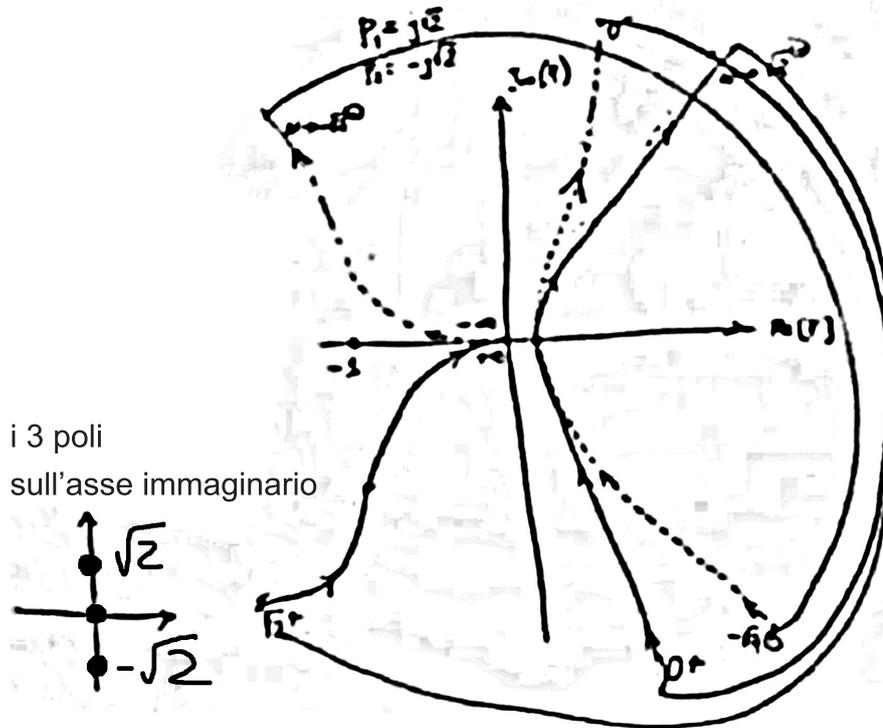


Per applicare il criterio di Nyquist occorre disegnare la parte simmetrica della curva.

In questa si va da meno infinito a più infinito quando  $\omega$  tende a  $-2^{1/2}$  per valori negativi (in alto a sinistra).

Quando  $\omega$  arriva a  $-2^{1/2}$  per valori negativi la curva riprende da valori di  $-2^{1/2}$  per valori positivi (in basso a destra), da cui  $\omega$  cresce; la curva cresce fino ad arrivare a  $0^-$ , da qui va a  $0^+$ . Da qui la curva continua nel tratto pieno fino a  $2^{1/2}$ , da valori negativi, in alto a destra, poi essa continua nel tratto da  $2^{1/2}$  da valori positivi, in basso a sinistra, fino a più infinito.

Questo rappresenta il diagramma completo.



Il diagramma va tre volte all'infinito perché abbiamo tre poli, tre poli sull'asse immaginario: uno nell'origine, uno in  $2^{1/2}$  e uno in  $-2^{1/2}$ .

Quindi quando si pone  $s = j\omega$  e si percorre l'asse immaginario, l'asse  $\omega$ , si trovano tre poli per cui la curva va tre volte all'infinito. Poiché sono tre poli semplici devono fare tre chiusure all'infinito, cioè tre mezzi giri, in senso orario.

Il primo è quello che va da  $-2^{1/2}$  per valori negativi a  $-2^{1/2}$  per valori positivi; il secondo è quella che va da  $0^-$  a  $0^+$ ; il

terzo è quello che va da  $2^{1/2}$  per valori negativi a  $2^{1/2}$  per valori positivi.

Questi sono i tre mezzi giri che servono per completare la curva.

Il punto  $-1$  si trova esterno alla curva, cioè a sinistra della curva, quindi tenendo conto delle considerazioni si giunge alla conclusione che il sistema è stabile.

### La precisione

- Definizione di errore  $e = y - y_{rif}$

L'errore è la differenza tra l'andamento della variabile che si vuole controllare ( $y$ ) e l'andamento effettivo ( $y_{rif}$ ).

L'errore dipende dal tipo di riferimento.

- Classi particolari di segnali
- Aspetti particolari della risposta

### Classi di segnali

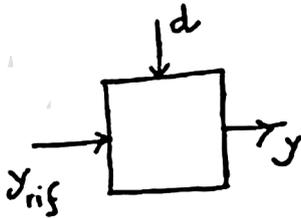
Sono i tipi di andamenti nel tempo dei riferimenti che vogliamo inseguire.

- Costanti. La situazione più elementare quella di riferimenti costanti, che si hanno quando si ha un problema di regolazione per cui vogliamo mantenere costanti le grandezze controllate. I riferimenti sono dunque grandezze costanti. Anche disturbi possono essere riferimenti costanti.
- Polinomi. Rappresentano funzioni elementari con cui si possono comporre funzioni più complicate.
- Sinusoidi. Sono ingressi oppure disturbi che hanno un andamento sinusoidale nel tempo.

□

Prof. Alberto Isidori  
40'59"

L'errore in un sistema di controllo



$$e(t) = y_{rif}(t) - y(t)$$

$$e(s) = \underbrace{y_{rif}(s)}_{data} - y(s)$$

$$- (W(s) y_{rif}(s) + W_d(s) d(s))$$

$$e(s) = [1 - W(s)] y_{rif}(s) + W_d(s) d(s)$$

Vediamo il sistema come un blocco unico nel quale entrano due classi di ingressi, il riferimento cioè l'andamento desiderato per l'uscita, il disturbo che è qualcosa di cui vogliamo liberarci e dal quale esce la grandezza controllata.

Con l'errore indichiamo la differenza tra l'andamento desiderato dell'uscita, che è il riferimento, e l'andamento effettivo dell'uscita.

Per vedere come l'errore è legato agli ingressi del sistema è utile scrivere la stessa cosa in termini di trasformata di

Laplace. La trasformata del segnale di errore è  $e(s)$ ; la trasformata del segnale di riferimento è  $y_{rif}(s)$ ; la trasformata dell'uscita è  $y(s)$ .

Il riferimento è una grandezza data, se il sistema è lineare allora l'uscita dipenderà dei due ingressi secondo due funzioni di trasferimento. Quindi  $y(s)$  sarà pari ad una certa funzione di trasferimento tra riferimento ed uscita ( $W(s)$ ) per il riferimento.

Per il principio di sovrapposizione degli effetti c'è anche una componente dovuta al disturbo, che, per linearità, si esprime come una funzione di trasferimento tra disturbo e uscita ( $W_d(s)$ ) per il disturbo.

La formula finale che esprime l'errore è mostrata in figura.

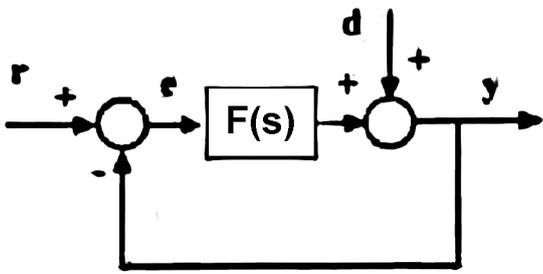
$$e(s) = W_e(s) y_{rif}(s) - W_d(s) d(s)$$

### funzione di trasferimento di errore

$$\frac{\text{errore}}{\text{riferimento}} = W_e(s) = 1 - W(s)$$

Queste considerazioni sono del tutto generali.

Se nel blocco immaginiamo una struttura di un sistema a retroazione allora le funzioni assumono una forma ancora più specifica. In particolare sia la funzione di trasferimento di errore, sia la funzione di trasferimento del disturbo sono legate alla funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto (o alle varie componenti che ci sono nell'anello aperto).



$$W_e(s) = \frac{1}{1 + F(s)} \quad W_d(s) = \frac{1}{1 + F(s)}$$

Nella figura a fianco è rappresentato il sistema più semplice di un anello elementare.

Nell'anello c'è un riferimento,  $r$ , l'errore,  $e$ , che è la differenza tra il valore desiderato e valore effettivo dell'uscita, un blocco anello aperto con una funzione di trasferimento  $F$ , il disturbo  $d$  che agisce sull'uscita. La reazione è unitaria.

La funzione di trasferimento di errore e la funzione di trasferimento tra disturbo e uscita sono visualizzate a fianco.

Esse sono uguali.

### Classi particolari di segnali

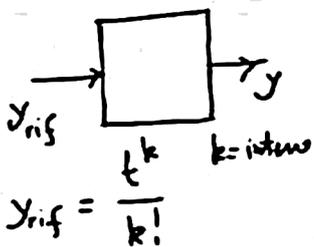
Una classe notevole di segnale di riferimento è quella descritta a lato. Si tratta di una famiglia di polinomi, della potenza del tempo, con un fattore di normalizzazione  $k!$ , che ha una utilità pratica nelle formule.

Una classe notevole di segnali di riferimento

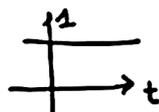
$$y_{rif}(t) = \frac{t^k}{k!}$$

Quello che ci interessa è studiare la risposta di un sistema ai polinomi.

Al lato il sistema di cui vogliamo studiare la risposta da riferimento a errore, con la funzione di riferimento fatta come una potenza intera, divisa per un fattoriale che ha una utilità pratica nelle formule.

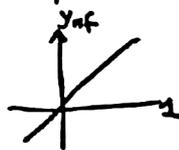


$k=0 \quad y_{rif} = 1$



REGOLAZIONE

$k=1 \quad y_{rif} = t$



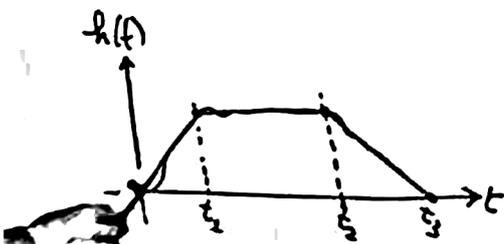
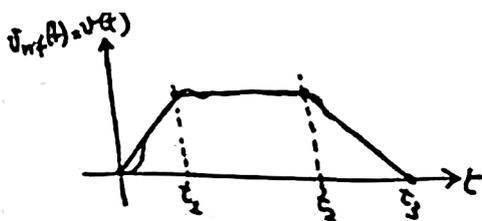
ASSERVIMENTO

Per  $k = 0 \quad y_{rif} = 1$ , cioè è costante. Questo è il caso dei sistemi di regolazione.

L'andamento desiderato della grandezza controllata è un andamento costante.

Per  $k = 1 \quad y_{rif} = t$ , cioè un polinomi di grado uno, che corrisponde ad una rampa.

Questo è il caso dei sistemi di asservimento, con tratti di pendenza non nulla. Nella robotica il controllo di tipo "pick-and-place", che consiste nel prendere un oggetto e spostarlo, è un controllo sia di posizione che di velocità. La velocità viene fatta evolvere secondo un ben preciso profilo: accelerazione, velocità costante, decelerazione. Se la velocità cresce con pendenza costante vuol dire che in quel tratto l'accelerazione è costante.

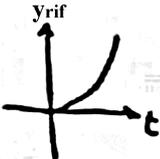


Una pendenza negativa significa una velocità decrescente, con accelerazione costante. Nella figura la velocità  $v$  di riferimento è l'andamento desiderato. Il profilo è composto da entrambi i tipi di profilo. A fronte dell'andamento desiderato c'è un andamento effettivo con degli scostamenti dall'andamento ideale.

L'analisi consiste nel verificare quanto sono ampi gli scostamenti, se possibile anche separare il fenomeno iniziale da quello che è l'andamento a regime.

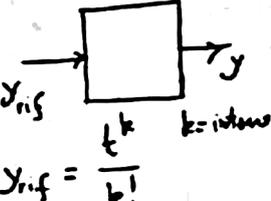
Un'altra applicazione di questo tipo di controllo è nel controllo del volo, in cui il parametro in funzione del tempo non è la velocità ma l'altezza dell'aereo.

$k=2 \quad y_{rif} = \frac{t^2}{2}$

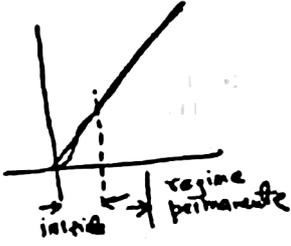


Per  $k = 2 \quad y_{rif} = t^2$ , un andamento parabolico.

Vediamo come riusciamo a caratterizzare la precisione del sistema quando ci troviamo di fronte segnale di questo genere.



$y_{rif} = \frac{t^k}{k!}$   $k = \text{intero}$



Nel caso del controllo di velocità quello che vogliamo fare è imporre una velocità del genere come mostrato in figura. Ci sarà un primo periodo iniziale in cui le cose si devono aggiustare, poi, a regime, la velocità giusta dovrebbe essere mantenuta.

Escludendo il periodo iniziale e analizzando la situazione dal momento in cui le cose si sono assestate, quello che si va a considerare è il cosiddetto regime permanente.

Il **regime permanente** è quel regime di funzionamento sul quale si assesta il funzionamento del sistema una volta esaurito il fenomeno transitorio iniziale. È quella particolare risposta alla quale la risposta effettiva converge, dopo un certo tempo. C'è una convergenza asintotica, ma dal punto di vista pratico la convergenza è dopo un tempo finito.

Non è detto che il regime permanente sia un andamento costante, nell'esempio la grandezza controllata è una grandezza che varia nel tempo. Però il regime è quello di una

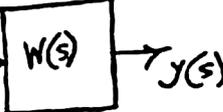
velocità costante, di una pendenza costante.

Il modo migliore per definire la risposta a regime permanente, come visto a teoria dei sistemi, è quello di passare alle trasformate di Laplace.

Si ha quindi la trasformata di Laplace dell'ingresso e quella dell'uscita.

La trasformata di Laplace del segnale di riferimento, l'ingresso, assume una

$\frac{1}{s^{k+1}}$



$y(s) = W(s) \frac{1}{s^{k+1}}$

$y_{rif} = \frac{t^k}{k!}$   $k = \text{intero}$



$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ W(s) \frac{1}{s^{k+1}} \right]$

semplice espressione,  $1/s^{k+1}$ . Con il  $k!$  La formula della trasformata è molto semplice.

Si suppone che  $W(s)$  sia la funzione di trasferimento del sistema; in uscita c'era quantità  $y(s)=W(s)/s^{k+1}$ .

Quello che vogliamo calcolare è  $y(t)$ , che sarà la trasformata inversa di  $y(s)$ .

Più che determinare numericamente la trasformata inversa ci interessa conoscere la struttura di essa.

$y_{in}(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$   $k = \text{ordine}$   
 $y_{out}(s) = \frac{1}{k!}$   
 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s^{k+1}}\right] = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s-p_i} + \frac{C_k}{s} + \frac{C_{k-1}}{s^2} + \dots + \frac{C_0}{s^{k+1}}$   
 RAZIONALE  
 pol. semplici  
 $W(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=0}^n (s-p_i)}$   
 SVILUPPO  
 IN FRAZ.  
 PARZIALI

La funzione  $W(s)$  è in genere una funzione razionale, con poli e zeri. Anche  $1/s^{k+1}$  è una funzione razionale, quindi abbiamo un prodotto di funzioni razionali. Quindi occorre applicare lo sviluppo funzioni parziali, fare residui, ecc.

Supponiamo che  $W(s)$  abbia solo poli semplici. Quindi essa ha un numeratore, di nessun interesse analitico, ed un denominatore, che è un prodotto.

I  $p_i$  sono tutti poli distinti tra loro.

Inserendo l'espressione nella formula della anti trasformata, si trova una funzione razionale che ha  $n$  poli nei diversi punti  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ; poi ha un polo di molteplicità  $k+1$  nel punto  $s=0$ .

Si effettua lo sviluppo in frazioni parziali, che conterrà dei termini relativi alla somma di certi residui, poi ci saranno tanti termini relativi al polo  $1/s^{k+1}$ .

Siccome questo polo ha una certa molteplicità  $k$ , ci sono più termini con il denominatore  $s$ . Ci sarà un termine  $C_k/s$ , un termine  $C_{k-1}/s^2$ , ..., fino a un termine  $C_0/s^{k+1}$ , notare come la somma degli indici sia sempre  $k + 1$ .

Questa è la scrittura caratteristica dello sviluppo in frazioni parziali in presenza di tanti poli semplici ( $p_i$ ) e di un certo polo multiplo ( $s^{k+1}$ ).

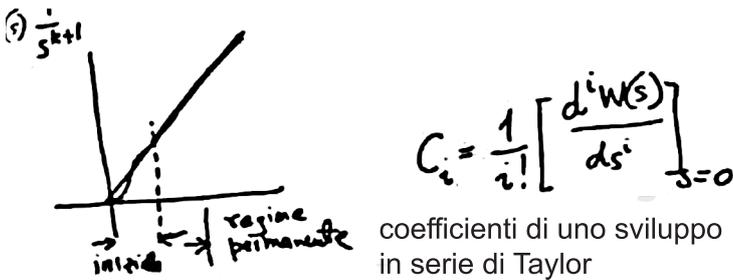
Notare che tra i poli  $p_i$  non ci sono poli nell'origine, perché stiamo studiando un sistema che immaginiamo stabile. Quindi ha tutti i poli con parte reale negativa, per cui tutti i poli  $p_i$  sono numeri con parte reale negativa.

$$\begin{aligned}
 y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s^{k+1}}\right] &= \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s-p_i} + \frac{C_k}{s} + \frac{C_{k-1}}{s^2} + \dots + \frac{C_0}{s^{k+1}} \\
 &= \sum_{i=1}^n R_i e^{p_i t} + C_k + C_{k-1} t + \dots + C_0 \frac{t^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Non c'è intenzione di calcolare tutti i numeri ( $R_i, C_x$ ), perché si vuole estrarre dalla scrittura delle informazioni di tipo qualitativo.

Senza fare nessun calcolo si riesce a capire come è fatta la trasformata inversa, quella che è la risposta nel tempo.

Essa sarà una funzione che si ottiene trasformando membro a membro.



$$W(s) = \sum_{l=1}^m \frac{R_l}{s-p_l} + \frac{C_k}{s} + \frac{C_{k-1}}{s^2} + \dots + \frac{C_0}{s^{k+1}}$$

Risposta a regime permanente

$$= C_k + C_{k-1}t + \dots + C_0 \frac{t^k}{k!}$$

SOPRAVVIVE

Quello che succede quando passa un po' di tempo a partire dall'istante iniziale, gli esponenziali con parte reale negativa decadono e tendono a zero asintoticamente. Dopo del tempo l'effetto della parte iniziale in sommatoria è trascurabile e sopravvive la parte restante.

Se  $k = 0$  c'è una costante, se  $k = 1$  c'è una rampa che si somma alla costante, se  $k = 2$  c'è una parabola che si somma alle precedenti, eccetera.

Ecco quindi che la risposta a regime permanente di un sistema stabile a un ingresso della forma  $t^k/k!$  è sempre

un'espressione del genere mostrato in figura.

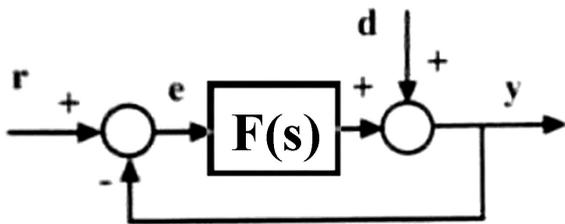
Essa è una approssimazione della risposta effettiva al crescere del tempo.

Ed è la risposta a regime permanente.

La risposta a regime permanente dipende dai coefficienti  $C_k$ .

Essi si calcolano con una formula legata al calcolo dei residui, riportata in alto.

Essi sono i coefficienti di uno sviluppo in serie di Taylor, e la funzione  $W(s)$  può essere scritta come  $W(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots$  con punto iniziale  $s = 0$ .



$$W_e(s) = \frac{1}{1 + F(s)} \quad C_{ei} = \frac{1}{i!} \left( \frac{d^i W_e}{ds^i} \right)_{s=0}$$

$$e_{rg}(t) = C_{e0} \frac{t^k}{k!} + \dots + C_{e,k-1} t + C_{e,k}$$

Applicazione di quanto visto finora.

Ci interessa come l'errore è legato ai parametri del sistema, quindi ci interessa l'andamento dell'errore in funzione dell'ingresso e in funzione dei parametri. Dobbiamo guardare la funzione di trasferimento di errore  $W_e(s)$ .

Si definiscono i coefficienti di errore  $C_{ei}$  che sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor della funzione di errore  $W_e$ .

Se l'ingresso del sistema, il riferimento  $r$ , è il polinomio notevole  $t^k/k!$  allora l'errore a regime permanente  $e_{rg}(t)$  è un polinomio del tipo visualizzato in figura, in cui i termini sono scritti in ordine decrescente di potenze di  $k$ . Inoltre c'è un termine "e" in più per evidenziare che i coefficienti sono relativi alla funzione di errore, al variare del tempo.

**Un sistema di controllo viene detto di tipo  $k$  se l'errore in regime permanente all'ingresso**

Definizione di errore, che serve a valutare se il sistema è buono o no.

$$y_{rif}(t) = \frac{t^k}{k!}$$

Un sistema di controllo viene detto di tipo  $k$  se l'errore in regime permanente all'ingresso

$$y_{rif}(t) = \frac{t^k}{k!}$$

**è finito e non nullo**

è finito e non nullo.

Se sono presenti i termini con la variabile  $t$ , l'espressione  $e_{rg}(t)$  va a infinito al crescere di  $t$ .

Quindi l'errore in regime permanente sarà finito se tali termini non ci sono. L'errore sarà non nullo se l'ultimo termine è diverso da zero. L'errore sarà 0 se tutti i termini sono nulli.

Condizione:

**un sistema è di tipo  $k$  se e solo se**

$$C_{e0} = C_{e1} = \dots = C_{e,k-1} = 0 \\ C_{ek} \neq 0$$

**In questo caso,  $e(t) \rightarrow e_k = C_{ek}$**

Condizione:

**il sistema è di tipo  $k$  se e solo se**

$$C_{e0} = C_{e1} = \dots = C_{e,k-1} = 0 \\ C_{ek} \neq 0$$

**in questo caso,  $e(t) \rightarrow e_k = C_{ek}$**

(coefficienti di errore)

(ultimo coefficiente di errore)

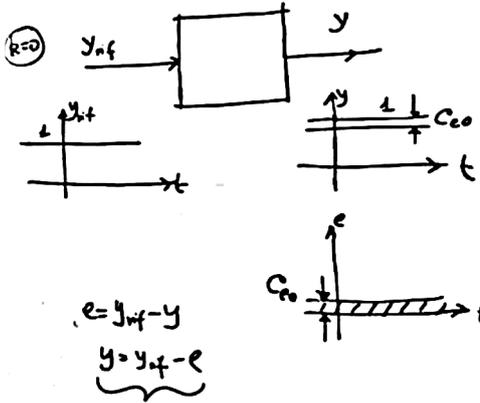
N.B.:

Conoscendo l'uscita di riferimento e l'errore si può calcolare l'uscita.

$$e = y_{rif} - y$$

Conoscendo l'uscita e l'uscita di riferimento si può calcolare l'errore.

$$y = y_{rif} - e$$

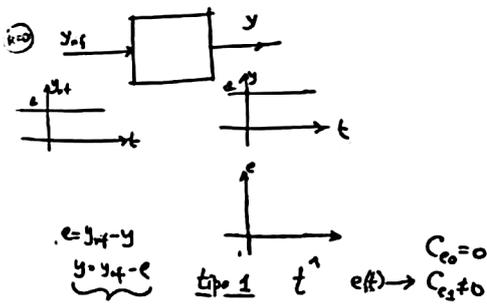


Ad esempio, dato il sistema a lato, studiamo il caso per  $k = 0$ .

Quindi si immagina come ingresso una costante unitaria.

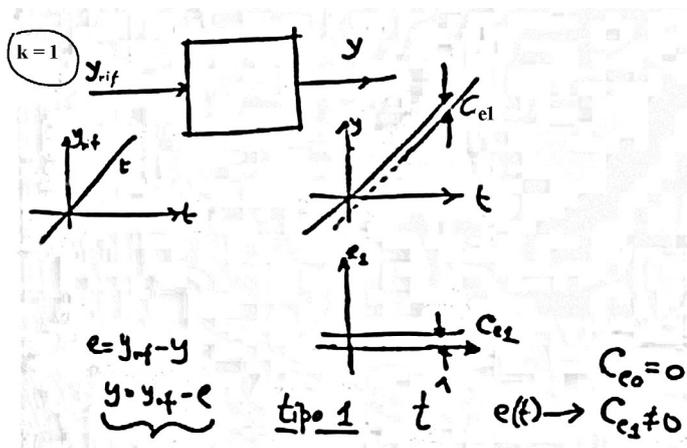
Se il sistema è di tipo 0, in riferimento alla definizione data, vuol dire che per l'ingresso fornito l'uscita effettiva presenta un errore finito e non nullo, cioè c'è un errore costante, che è la quantità  $C_{e0}$ . L'errore converge dunque ad una quantità finita.

L'uscita effettiva sarà pari all'uscita di riferimento (unitaria) meno l'errore, quindi l'uscita effettiva sarà sotto il valore unitario del valore esattamente pari all'errore.



Se il sistema è di tipo 1, ad un ingresso unitario corrisponde una uscita effettiva che riproduce esattamente l'ingresso, l'errore in regime permanente è nullo.

Questo perché se il sistema è di tipo 1, quindi  $t$  è elevato a 1, l'errore deve tendere ad una quantità costante di valore  $C_{e1} \neq 0$ , mentre  $C_{e0} = 0$ ; questa è l'applicazione della definizione data.



Se il sistema è di tipo 1, mettendo in ingresso un polinomio, una rampa di pendenza unitaria, quindi  $k = 1$ , per definizione l'errore tende ad una quantità costante  $C_{e1}$ . L'uscita effettiva è pari all'uscita di riferimento meno l'errore, quindi sarà una rampa di pendenza unitaria traslata verso il basso della quantità  $C_{e1}$ .

Quindi questo è quello che succede quando il sistema è di tipo 1 sollecitato da un ingresso del tipo  $t^1/1!$ .

| Riferim.<br>Tipo | $y(t)=1$ | $y(t)=t$   | $y(t)=t^2/2$ |
|------------------|----------|------------|--------------|
| 0                | $e_0$    | illimitato | illimitato   |
| 1                | nullo    | $e_1$      | illimitato   |
| 2                | nullo    | nullo      | $e_2$        |

Tabella che mostra l'andamento dell'ingresso a seconda del tipo.

Quando l'ordine dell'ingresso corrisponde al tipo c'è un errore finito e non nullo, a regime permanente.

Quando l'ordine dell'ingresso è più grande del tipo l'errore tende all'infinito, a regime permanente.

Quando l'ordine dell'ingresso è più basso del tipo l'errore è nullo, a regime permanente.

Questa è una analisi convenzionale del modo in cui si può caratterizzare l'errore di una certa classe di ingressi, per un certo aspetto particolare della risposta, quella a regime permanente.

La classificazione dei sistemi in tipo ci dice quanto più un sistema è buono rispetto a ingressi che lo possono sollecitare.

Vedremo più avanti altri aspetti con cui si può caratterizzare la precisione di un sistema.

□

Prof. Alberto Isidori  
43'51"

Nell'analisi della precisione ci siamo soffermati su una classe particolare di ingressi, i cosiddetti polinomi canonici, della forma come mostrato a lato.

Abbiamo studiato un aspetto particolare della risposta, risposta a regime permanente. Segue poi una definizione di classificazione dei sistemi, che serve a stabilire la bontà della precisione della risposta in regime permanente agli ingressi.

**Una classe notevole di segnali di riferimento**

$$y_{rif}(t) = \frac{t^k}{k!}$$

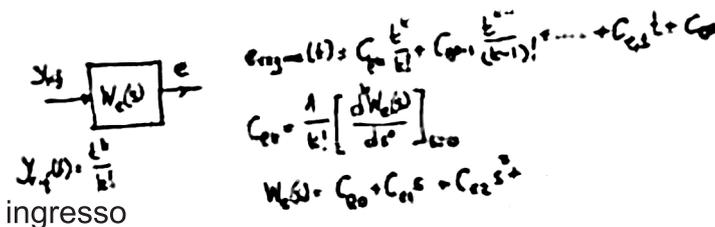
**Un sistema di controllo viene detto di tipo  $k$  se l'errore in regime permanente all'ingresso**

$$y_{rif}(t) = \frac{t^k}{k!}$$

**è finito e non nullo**

(se nullo potrebbe essere di ordine maggiore di  $k$ )

Abbiamo legato la proprietà di un sistema di essere di tipo  $k$  a certi coefficienti che si possono calcolare a partire dalla funzione di trasferimento di errore.



Si tratta di un sistema che lega il riferimento all'errore.

Il riferimento è il polinomio di ordine  $k$ . L'errore è una funzione complicata del tempo, ma la porzione a regime permanente, cioè l'errore a regime, è una combinazione di polinomi di ordine  $k$  e discendenti nella forma come mostrata a lato.

I coefficienti sono delle derivate  $k$ -esime, calcolate nell'origine, divise per un fattore di normalizzazione, della funzione di trasferimento di errore.

**Condizione:**

**un sistema è di tipo  $k$  se e solo se**

$$C_{e0} = C_{e1} = \dots = C_{e,k-1} = 0$$

$$C_{ek} \neq 0$$

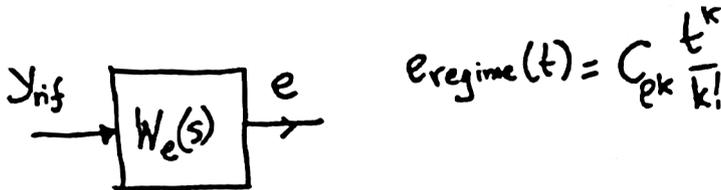
I coefficienti sono coefficienti di uno sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale zero, nella forma riportata.

A lato la condizione affinché un sistema sia di tipo  $k$ , e la convergenza dell'errore.

**in questo caso,  $e(t) \rightarrow e_k = C_{ek}$**

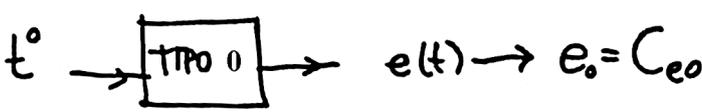
Dato un sistema, di un certo tipo (0, oppure 1, oppure 2), esso può essere sollecitato con un ingresso di un certo tipo. Gli ingressi possono essere di tipo  $t^0$ ,  $t^1$ ,  $t^2$ .

Quello che succede è che quando un sistema di tipo  $k$  è sollecitato con ingresso di ordine  $k$  allora l'errore a regime permanente è finito e non nullo. Se un sistema di tipo  $k$  è sollecitato con un ingresso di ordine diverso da  $k$  si avranno andamenti diversi dell'errore.

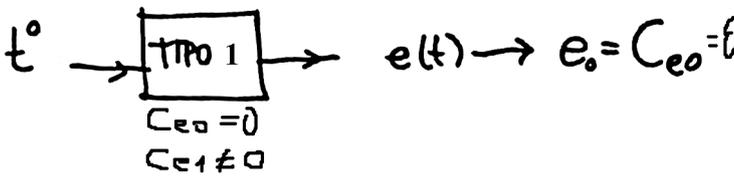


$$e_{regime}(t) = C_{ek} \frac{t^k}{k!}$$

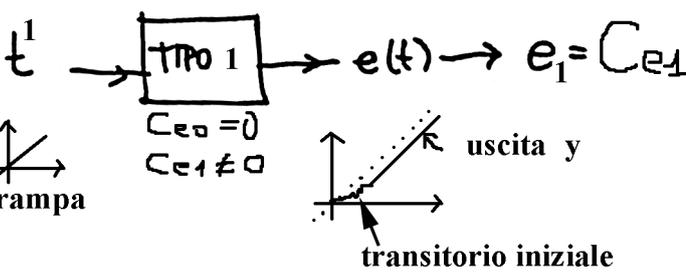
In un sistema di tipo 0 con un ingresso di ordine 0, cioè  $t^0$ , l'errore a regime permanente  $e(t)$  tende ad una quantità costante  $e_0 = C_{e0}$ .



Se il sistema è di tipo 1 e l'ingresso è di tipo 0, ingresso costante, l'errore in regime permanente è nullo.

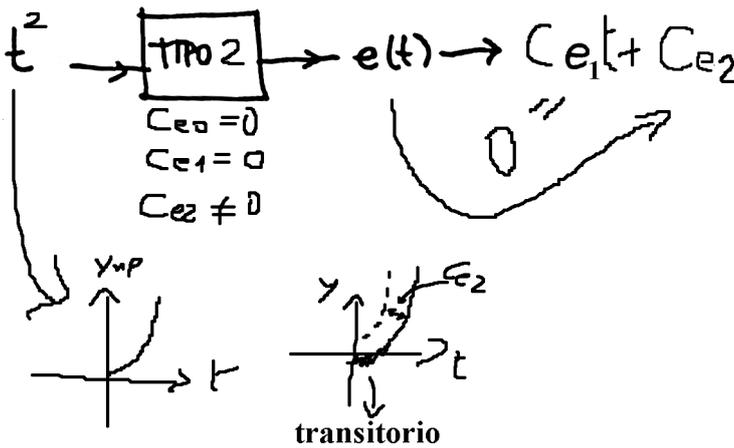


In un sistema di tipo 1 con ingresso di tipo 1,  $t^1$ , l'errore a regime permanente, quindi dopo transitorio iniziale, sarà pari al valore costante  $C_{e1}$ .



L'uscita  $y$  sarà una forma d'onda uguale a quella dell'ingresso traslata in basso del valore  $C_{e1}$ , sempre dopo un transitorio iniziale;  $y = y_{rif} - e_1$ .

Quindi il sistema sollecitato un ingresso dello stesso ordine produce un errore costante, a regime permanente.



Lo stesso sistema sollecitato con ingresso di ordine 0, con una costante, produce un errore nullo.

Sollecitandolo con una funzione  $t^2$ , l'errore sarebbe illimitato, perché  $e(t) = C_{e1}t + C_{e2}$ . In questo caso il coefficiente  $C_{e0} = 0$ .

Se si volesse avere un errore costante per l'ingresso della forma  $t^2$ , si dovrebbe avere un sistema di tipo due. In questo caso sarebbe non nullo il coef-

ficiente  $C_{e2}$ , pari all'errore.

La risposta in errore sarebbe sempre  $e(t) = C_{e1}t + C_{e2}$ , ma  $C_{e1} = 0$ .

Più è alto il tipo del sistema, più il sistema risponde fedelmente ad ingressi più difficili da inseguire.

| Riferim. \ Tipo | $y(t)=1$ | $y(t)=t$   | $y(t)=t^2/2$ |
|-----------------|----------|------------|--------------|
| 0               | $e_0$    | illimitato | illimitato   |
| 1               | nullo    | $e_1$      | illimitato   |
| ?               | nullo    | nullo      | $e_2$        |

A lato lo schema di riferimento, per i primi tre tipi.

L'errore costante quando il tipo è uguale al riferimento può essere calcolato tramite la funzione di trasferimento.

Se l'ordine dell'ingresso è inferiore al tipo del sistema allora l'errore a regime permanente è nullo.

Se l'ordine dell'ingresso è superiore al tipo del sistema allora l'errore tende all'infinito.

È interessante sviluppare delle formule per legare in maniera più precisa questi concetti ai parametri del sistema.

$$W_e(s) = C_{e0} + C_{e1}s + C_{e2}s^2 + \dots + C_{ek}s^k + C_{ek+1}s^{k+1} + \dots$$

$$= s^k \bar{W}(s) \quad \bar{W}(s) \Big|_{s=0} \neq 0$$

$\downarrow$       $\downarrow$       $\downarrow$       $\downarrow$   
 0     0     0      $C_{ek} \neq 0$

Lo sviluppo della funzione di trasferimento di errore è nella forma mostrata in figura a lato.

Il sistema è di tipo  $k$  se e soltanto se i coefficienti fino a  $k-1$  sono nulli e quello  $k$  è non nullo.

Lo sviluppo comincia a partire

dal termine  $s^k$ .

Quindi la funzione  $W_e(s)$  può essere scritta come  $W_e(s) = s^k \bar{W}(s)$ .

La funzione  $\bar{W}(s)$  è non nulla per  $s = 0$  (l'origine del piano complesso).

La funzione  $W_e(s)$  ha uno zero di molteplicità  $k$  in  $s = 0$ .

Questo è un modo sintetico di caratterizzare un sistema di essere di tipo  $k$ .

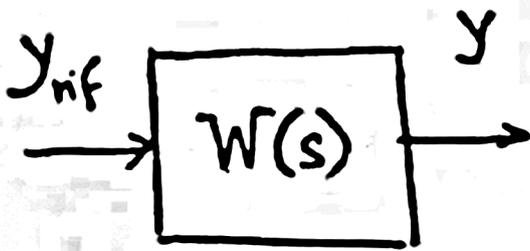
### Condizione:

**un sistema è di tipo  $k$**

**se e solo se**

**$W_e(s)$  ha uno zero di molteplicità  $k$  in  $s=0$**

Questa è una condizione molto sintetica della funzione di trasferimento di errore,  $W_e(s)$ , che lega il riferimento all'errore.



Consideriamo ora è il caso di un sistema in cui conosciamo la funzione di trasferimento riferimento - uscita, ovvero ingresso - uscita

La funzione  $W_e(s)$  e  $W(s)$  sono legate dalla relazione mostrata a lato.

$$W_e(s) = 1 - W(s)$$

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

Per riconoscere sia il sistema è di tipo  $k$  basta prendere la funzione  $1 - W(s)$ , farne lo sviluppo in serie di Taylor, e andare a vedere quanti sono i coefficienti nulli, poi il primo coefficiente non nullo indica il tipo del sistema.

Senza bisogno di fare le derivate si può giungere a conclusione modo più rapido usando la condizione tale per cui la funzione  $1 - W(s)$  ha

uno zero di molteplicità  $k$  in  $s = 0$ .

Per fare questo ci ricordiamo che la funzione  $W(s)$  è un rapporto di polinomi, come riportato a lato.

Il numeratore è un polinomio di grado  $n - 1$ , il denominatore è di grado  $n$ .

Questo perché in genere in tutti i sistemi che consideriamo il numero degli zeri è inferiore al numero dei poli e sono i cosiddetti sistemi passa-basso.

Il denominatore è stato normalizzato in maniera tale che il coefficiente di grado maggiore sia 1. Un tale polinomio è detto monico.

$$W_e(s) = 1 - W(s)$$

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

$$W_e(s) = \frac{\cancel{a_0 - b_0} + (a_1 - b_1)s + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})s^{n-1} + s^n}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

Dalla scrittura di  $W(s)$  si calcola la funzione di trasferimento di errore  $W_e(s)$ .

Dalla funzione che ricaviamo è molto facile stabilire il sistema di che tipo è.

Il sistema è di tipo 1 quando ha uno zero di molteplicità 1 in  $s = 0$ ; gli zeri sono le radici del numeratore, quindi il sistema è di tipo 1 quando ha uno zero semplice nel punto  $s = 0$  e questo succede quando manca il primo coefficiente del numeratore. Lo zero è semplice se il coefficiente davanti a  $s$  è non nullo.

tipo 1

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 \neq b_1 \end{cases}$$

La condizione affinché il sistema sia di tipo 0 è che  $a_0 \neq b_0$ .

La condizione affinché il sistema sia di tipo 1 è che  $a_0 = b_0$  e  $a_1 \neq b_1$ .

Se  $a_0 \neq b_0$  allora la funzione di trasferimento non aveva zeri nel punto  $s = 0$ , per cui il sistema sarebbe stato di tipo 0.

Questa a lato è la condizione per avere tipo 1.

Se fosse solo  $a_0 = b_0$  si avrebbe tipo 1 oppure superiore.

Questo perché abbiamo tipo 2 quando abbiamo uno zero di molteplicità 2 nell'origine, devono essere nulli i primi 2 coefficienti e partire al numeratore dal coefficiente  $s^2$ .

tipo 2

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 \neq b_2 \end{cases}$$

Per avere tipo 2 occorre avere  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 \neq b_2$ .

Queste condizioni sono condizioni sui coefficienti della funzione riferimento / uscita,  $W(s)$ , in cui c'è un perfetto parallelismo con i coefficienti al numeratore e al denominatore.

Quindi queste condizioni si possono verificare per ispezione. Dato un rapporto di polinomi, può essere chiesto di che tipo è il sistema. L'osservazione dei coefficienti determinerà la giusta risposta. Questo è un criterio molto semplice per determinare il tipo del sistema.

Una volta identificato il tipo del sistema, l'interesse cade sull'ampiezza dell'errore. Prendendo come esempio un sistema di tipo uno, in tale sistema se si dispone per ingresso una quantità costante si ha un errore nullo; se all'ingresso si dispone una rampa, quindi una velocità costante, l'errore in regime permanente è una quantità costante. È di interesse conoscere il valore di tale quantità costante sulla quale si assesta il sistema a regime permanente sollecitato da una rampa.

Lo stesso vale per il sistema di tipo 0, che da sempre errore. Un sistema di tipo 0 sollecitato con una quantità costante, l'errore in regime permanente è una costante ed è di interesse sapere quanto vale.

SISTEMA  
TIPO K

---


$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_k = C_{ek}$$

Quindi una volta identificato il tipo di sistema. Interessa sapere sempre quale è l'errore in corrispondenza all'ingresso dello stesso ordine. Un ingresso di ordine  $k$  da un errore costante  $e_k$ , ma quanto vale?

I coefficienti, dalla relativa formula, valgono  $C_{ek}$ .

La funzione  $\bar{W}(s)$ , in  $s = 0$ , vale esattamente  $C_{ek}$ .  
Basta vedere la formula da cui deriva.

$$W_e(s) = s^k \bar{W}(s) \quad C_{ek} = \bar{W}(s)$$

$$\bar{W}(s) = \left[ \frac{W_e(s)}{s^k} \right]$$

$$C_{ek} = \bar{W}(0) = \left[ \frac{W_e(s)}{s^k} \right]_{s \rightarrow 0}$$

Questa funzione è regolare nel punto  $s = 0$ .

Il numeratore si annulla  $s$  volte in  $s = 0$ , il denominatore si annulla  $s$  volte in  $s = 0$ . Quindi  $s = 0$  è un punto di regolarità, non è un polo della funzione.

Quindi possiamo calcolarne il valore in  $s = 0$ , che corrisponde a  $C_{ek}$ .

Questa formula non vale sempre ma solo quando il sistema è di tipo  $k$ .

$$C_{ek} = \bar{W}(0) = \left[ \frac{W_e(s)}{s^k} \right]_{s \rightarrow 0} \quad \leftarrow \begin{array}{c} \text{TIPO } k \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_k = C_{ek} \end{array}$$

Si noti che, in un sistema di tipo 1, il coefficiente  $C_{e1}$  vale quanto riportato a lato.

$$C_{e1} = \frac{a_1 - b_1}{a_0}$$

Per ottenere tale valore si è diviso la funzione  $W_e(s)$  per  $s$ , in quanto si è considerato un sistema di tipo 1 e quindi  $k = 1$ .

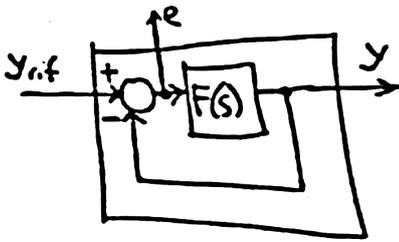
Il fattore  $s$  al denominatore si semplifica e facendo tendere  $s$  a 0 si ottiene tale risultato.

$$C_{e2} = \frac{a_2 - b_2}{a_0}$$

Si noti che, in un sistema di tipo 1, il coefficiente  $C_{e1}$  vale quanto riportato a lato.

Notare che un sistema che ha un polo nel punto  $s = 0$  è un sistema instabile, ma noi stiamo studiando la risposta di un sistema stabile, quindi  $a_0$  è non nullo.

Quanto visto è un modo semplice per riconoscere il tipo di sistema quando abbiamo una certa funzione di trasferimento ingresso-uscita e per calcolare i corrispondenti valori degli errori.



$$W(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} \quad F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad W(s) = \frac{N(s)}{N(s)+D(s)}$$

$$W_e(s) = \frac{1}{1+F(s)} = \frac{D(s)}{N(s)+D(s)}$$

Supponiamo di avere un sistema a retroazione, con il classico anello (elementare, la reazione è unitaria) a retroazione.

La funzione  $W(s)$  vale quanto mostrato in figura.

La funzione  $F(s)$  è rappresentabile come un rapporto di polinomi.

Dunque funzione di trasferimento ingresso-uscita  $W(s)$  è rappresentabile anch'essa come un rapporto di polinomi.

Un'altra funzione di interesse è quella di trasferimento di errore  $W_e(s)$ , pari a  $1/(1 + F(s))$ .

La conclusione è che il sistema è di tipo  $k$  se la funzione di trasferimento di errore ha uno zero di molteplicità  $k$  nel punto  $s = 0$ .

Nel caso di un sistema a retroazione caratterizzato da una funzione di trasferimento ad anello aperto  $F(s)$ , la funzione di trasferimento di errore ha uno zero di molteplicità  $k$  nel punto  $s = 0$  (origine del piano complesso) quando il polinomio  $D(s)$  ha uno zero di molteplicità  $k$  nel punto  $s = 0$ .

Il sistema è di tipo  $k$  se e solo se  $D(s)$  ha uno zero di molteplicità  $k$  nel punto  $s = 0$ , in un sistema a retroazione.

La funzione  $D(s)$  è il denominatore della funzione di trasferimento dell'anello aperto,  $F(s)$ .

Quindi concludiamo che in un sistema a retroazione, il sistema è di tipo  $k$ , se solo se il numeratore della funzione  $F(s)$  ha uno zero di molteplicità  $k$  nel punto  $s = 0$  e questo equivale a dire che la funzione  $F(s)$  stessa ha un polo di molteplicità  $k$  nel punto  $s = 0$ , quindi non più uno zero della funzione  $W_e(s)$ , ha un polo della funzione  $F(s)$ .

Questo importante perché passiamo da un'idea di zero all'idea di polo. Lo zero era per la funzione tra riferimento e errore, mentre nell'ultimo schema possiamo dire che il sistema di tipo  $k$  se e solo se la funzione  $F(s)$  ha un polo di molteplicità  $k$  in  $s = 0$ .

Vedremo la prossima volta l'analisi di questo risultato.

□

Prof. Alberto Isidori  
41'07"

Continuiamo l'analisi della precisione in un sistema di controllo per ingressi della forma  $t^k/k!$ .

Abbiamo dato una classificazione in tipi e abbiamo individuato delle condizioni sulla funzione di trasferimento che lega il riferimento all'errore ma anche, in un sistema a retroazione, sulla funzione di trasferimento che caratterizza il ramo diretto, l'anello aperto. Queste condizioni sono riassunte nelle immagini seguenti.

**Condizione:**

**un sistema è di tipo  $k$**

**se e solo se**

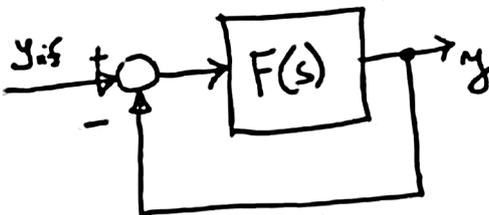
**$W_c(s)$  ha uno zero di molteplicità  $k$  in  $s=0$**

**Un sistema a retroazione è di tipo  $k$**

**se e solo se**

**$F(s)$  ha un polo di molteplicità  $k$  in  $s=0$**

La caratterizzazione dell'errore in regime permanente in un sistema a retroazione



Una volta determinato il tipo del sistema è importante anche scoprire quale è l'ampiezza dell'errore per un ingresso di ordine uguale al tipo, ovvero quanto vale il coefficiente  $C_{ek}$  nel caso di un sistema a retroazione.

$$\frac{t^k}{k!} \longrightarrow e_k = C_{ek}$$

Il coefficiente è calcolabile quando conosciamo la funzione di trasferimento tra riferimento e uscita.

Ora interessa stabilire quanto vale se riusciamo a stabilire una corrispondenza tra il valore dell'errore e i parametri della funzione  $F(s)$ . Questo è importante perché in sede di progetto è più facile vedere come deve essere modificata la

funzione  $F(s)$  in modo tale da ottenere certi risultati.

Abbiamo scoperto come il tipo del sistema sia riconoscibile guardando la funzione  $F(s)$ : se essa ha un solo polo nell'origine allora il sistema è di tipo uno, se ha due poli nell'origine allora il sistema è di tipo due, se non ha poli nell'origine allora il sistema è di tipo zero.

Vediamo come determinare il valore dell'errore per un ingresso di ordine corrispondente al tipo.

(SE) tipo k

$$C_{ek} = \left[ \frac{W_e(s)}{s^k} \right]_{s=0}$$

Se il sistema è di tipo k allora  $C_{ek} = W_e(s)/s^k$  per  $s = 0$ .

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + F(s)}$$

In un sistema a retroazione la funzione di trasferimento di errore è come riportata a lato.

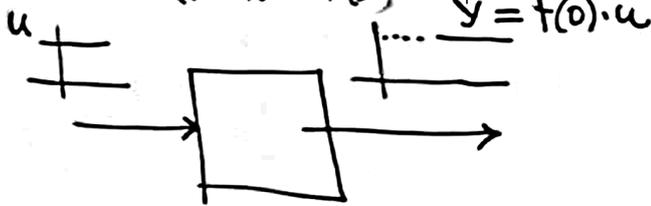
Questa formula ci permette il calcolo dell'errore.

k=0  $C_{e0} = W_e(0) = \frac{1}{1 + F(0)}$

Supponiamo che il tipo del sistema sia zero,  $k = 0$ . Il valore dell'errore è dunque calcolabile come riportato a lato. La quantità  $F(0)$  si chiama guadagno della funzione  $F(s)$ .

$F(0) =$  GUADAGNO DELLA

funzione  $F(s) = K_F = F(0) \cdot u$



Rappresenta quanto viene amplificato un segnale costante  $u$  all'ingresso di un sistema e, a regime permanente, l'uscita è amplificata secondo tale guadagno.

Tramite il teorema del valore finale, vedi a lato, si calcola l'uscita.

$$Y(s) = F(s) \frac{u}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) u = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) u = F(0) u$$

teorema del valore finale

L'uso del teorema è applicabile solo quando il limite esistono e quindi l'ingresso deve essere una costante e l'uscita deve essere una costante.

$$C_{e0} = W_e(0) = \frac{1}{1 + F(0)} = \frac{1}{1 + K_F}$$

Quindi la formula dell'errore può essere aggiornata e in un sistema di tipo zero, quando il sistema è sollecitato da una costante, l'errore che si commette è  $1/(1 + K_F)$ .

Dunque l'errore è tanto più piccolo quanto più alto è il guadagno della funzione di trasferimento che caratterizza l'anello aperto, ovvero è tanto più alto quanto è il coefficiente di amplificazione che caratterizza la funzione di trasferimento ad anello aperto.

(SE) tipo k  $C_{ek} = \left[ \frac{W_e(s)}{s^k} \right]_{s=0}$

$$W_e(s) = \frac{1}{1+F(s)} = \frac{D(s)}{N(s)+D(s)}$$

$$k > 0 \quad C_{ek} = \left[ \frac{1}{s^k} \frac{D(s)}{N(s)+D(s)} \right]_{s=0}$$

$$C_{ek} = \left[ \frac{1}{s^k + F(s)s^k} \right]_{s \rightarrow 0} = \frac{1}{\left[ F(s)s^k \right]_{s=0}}$$

è 0 per  $s \rightarrow 0$

Considerando  $k > 0$ , quindi sistemi non di tipo zero, la funzione  $W_e(s)$  può essere pensata come un rapporto di polinomi, nella forma descritta in figura derivante dalla forma di  $F(s)$ .

$D(s)$  ha una radice di molteplicità  $k$  nell'origine, nel punto  $s = 0$ . Quindi in essa c'è un fattore  $s^k$  che si semplifica facendo in modo che il limite esista, come immaginavamo.

Il valore del limite è riportato a lato. Si noti che il fattore  $s^k$  nella  $F(s)$  si semplifica ancora con quello nella funzione.

CONVENZIONALMENTE : GUADAGNO

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s) \cdot s^k = K_F$$

Convenzionalmente si continua a chiamare guadagno il limite mostrato a lato.

$k$  è il numero di poli nell'origine, nel punto  $s = 0$ .

$$C_{ek} = \frac{1}{K_F} \quad \text{Questo è il valore dell'errore per } k > 0, \text{ molto simile all'errore per } k = 0.$$

In entrambi i casi l'errore è inversamente proporzionale al guadagno.

Il guadagno ha un significato effettivo se la funzione  $F(s)$  non ha poli nell'origine, e guadagno un significato convenzionale se la funzione ha poli nell'origine.

**Quanto vale l'errore?**

$$k = 0 \quad e_0 = \frac{1}{1+K}$$

$$k > 0 \quad e_0 = \frac{1}{K}$$

A lato un riepilogo tabellare del valore dell'errore nei due casi visti.

Questo è tutto quanto si può dire sulla precisione a regime permanente per ingressi di forma canonica di un sistema a retroazione.

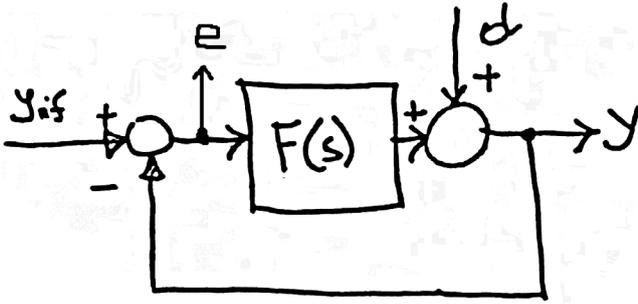
Un altro aspetto della risposta

Un sistema può essere sollecitato anche da disturbi. Vediamo quello che succede nella risposta dei disturbi.

Poiché il sistema è lineare possiamo supporre che il riferimento non ci sia e studiare una alla volta gli ingressi che influenzano il sistema. Prima abbiamo visto lo studio dell'effetto dei riferimenti, ora possiamo concentrarci sullo studio degli effetti dei disturbi.

Per uno schema particolare il risultato sarà identico al precedente, in funzione del tipo dello schema i risultati saranno diversi.

Il primo schema proposto è il più semplice e consiste in un disturbo agente sull'uscita.



La semplicità consiste nella forma della funzione di trasferimento tra disturbo e uscita,  $W_d(s)$ , è uguale a  $1/(1 + F(s))$ , che è uguale, a parte il segno che varia a seconda di come viene definita, alla funzione di trasferimento di errore.

$$W_d(s) = \frac{1}{1 + F(s)} = W_e(s)$$

Dunque, se un sistema è sottoposto a disturbi polinomiali, quindi disturbi costanti oppure delle rampe oppure delle parabole, allora l'errore a regime permanente si potrà ottenere applicando le formule già viste.

I coefficienti non saranno più definiti come  $C_{ek}$ , ma saranno diversi in quanto stiamo parlando di una funzione diversa e quindi saranno definiti  $C_{dk}$ ; però, per quanto riguarda il sistema a retroazione, i coefficienti avranno la stessa espressione.

Questo perché, in questo schema particolare,  $W_d(s)$  e  $W_e(s)$  hanno la stessa espressione. In sostanza la situazione è come quella affrontata nel caso precedente.

$$W_d(s) = \frac{1}{1 + F(s)} = W_e(s)$$

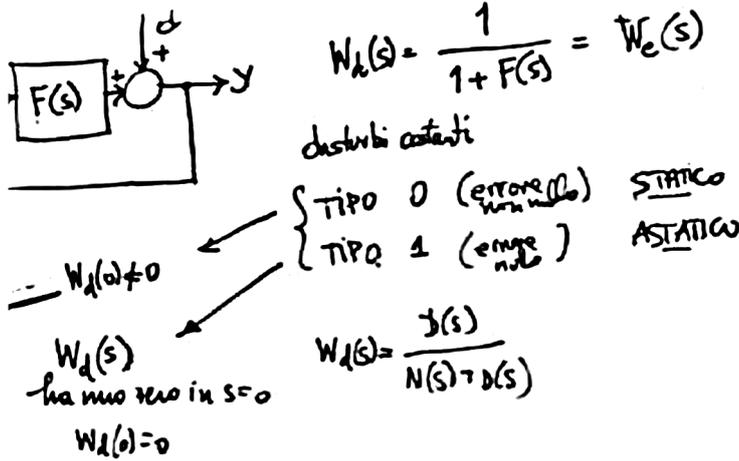
disturbi costanti

$\left\{ \begin{array}{l} \text{TIP0 } 0 \text{ (errore non nullo) } e_0 \\ \text{TIP0 } 1 \text{ (errore nullo) } \end{array} \right.$

Nei casi pratici la situazione più corrente è quella di disturbi costanti.

Quando i disturbi costanti, abbiamo visto dall'analisi relativa ai riferimenti che i casi sono due: tipo zero oppure tipo uno.

Nel caso del tipo zero l'errore è non nullo, nel caso del tipo uno l'errore è nullo.



Studiando i disturbi costanti si identificano due classi di sistemi, la prima riguarda i sistemi che danno una uscita relativa al disturbo, uscita che non è nulla, è in regime permanente; la seconda riguarda i sistemi che danno luogo ad una uscita relativa al disturbo che è nulla.

Ricordiamo che l'uscita relativa al disturbo è tutto errore, perché vogliamo che l'uscita sia uguale al riferimento. Si l'uscita contiene una componente

proporzionale al disturbo quella è una componente che non vogliamo perché è tutta parte dell'errore. Quindi nella risposta disturbo-uscita tutta l'uscita che trovo è errore.

Quindi se in corrispondenza di un disturbo costante c'è un'uscita non nulla, il sistema è l'equivalente di un sistema di tipo zero, detto anche statico (termine in disuso).

Se in corrispondenza di un disturbo costante c'è un'uscita nulla, il sistema è l'equivalente di un sistema di tipo uno, detto anche astatico (termine in disuso).

Il sistema si troverà nella categoria di tipo zero, quella dei sistemi per i quali l'uscita disturbata, per ingressi costanti, tende ad un valore non nullo, quando la funzione  $F(s)$  non ha poli in  $s = 0$ .

Il sistema si troverà nella categoria di tipo uno, quella dei sistemi per i quali l'uscita disturbata, per ingressi costanti, tende ad un valore nullo, quando la funzione  $F(s)$  ha poli in  $s = 0$ .

Questa conclusione è identica a quella dell'analisi riferimento-errore.

Ricordando che la funzione  $W_d(s) = D(s) / (D(s) + N(s))$ , con  $D(s)$  e  $N(s)$  denominatore e numeratore della funzione  $F(s)$ , siamo di nuovo nel caso precedente.

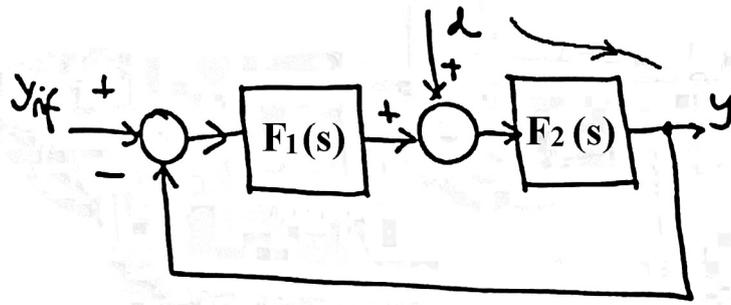
Ci si trova nella condizione di tipo zero se  $D(s)$  non ha radici in  $s = 0$ , ci si trova la condizione di tipo uno se  $D(s)$  ha radici in  $s = 0$ .

Nel primo caso il sistema mi da risposta non nulla in regime permanente per disturbi costanti quando il sistema ad anello aperto non ha poli in  $s = 0$ .

Nel secondo caso il sistema mi da risposta nulla in regime permanente per disturbi costanti quando il sistema ad anello aperto ha poli in  $s = 0$ .

I poli in  $s = 0$  della funzione  $F(s)$  sono determinanti: se abbiamo un polo, simultaneamente abbiamo errore nullo in regime permanente per ingressi costanti e risposta nulla in regime permanente per disturbi costanti.

Tutto questo avviene perché il disturbo agisce in un punto particolare dello schema del sistema.



$$W_d(s) = \frac{F_2(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$

l'andamento dell'errore dell'uscita in regime permanente; essa assume la forma come da relativa figura, in cui il numeratore non è una quantità costante.

Anche in questo caso vale in generale il ragionamento visto in precedenza.

Si avrà errore non nullo, l'equivalente di tipo zero, se  $W_d(0) \neq 0$ .

Si avrà errore nullo, l'equivalente di tipo uno, se  $W_d(s)$  ha uno zero in  $s = 0$ .

È di maggior interesse la seconda situazione, quella in cui un disturbo costante non produce effetto in regime permanente, cioè quella in cui il sistema riesce a compensare l'effetto di un disturbo costante. Questo dipende dalla presenza di poli nelle funzioni.

Prendendo in considerazione la funzione  $W_d(s)$ , se  $F_2(s)$  ha un polo in  $s = 0$ , dal nostro punto di vista non succede niente di buono, perché diventano infinito sia il numeratore che il denominatore della funzione, quindi la funzione potrebbe tendere ad un limite finito e diverso da zero. Questo vuol dire che l'errore, cioè l'effetto di disturbo sull'uscita, c'è e quindi non ci troviamo nella situazione di effetto nullo.

La funzione  $W_d(s)$  si annulla nel punto  $s = 0$  se il termine  $F_1(s)$  va all'infinito per  $s$  che tende a zero.

$$F_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

Scomponendo la funzione  $F_1(s)$  in un numeratore e un denominatore,  $D_1(s)$  ha radici in  $s = 0$ .  $D_1(s)$  è presente al numeratore della funzione  $W_d(s)$  che si annulla nel punto  $s = 0$ .

Questo non succede se è la funzione  $F_2(s)$  ad avere una radice.

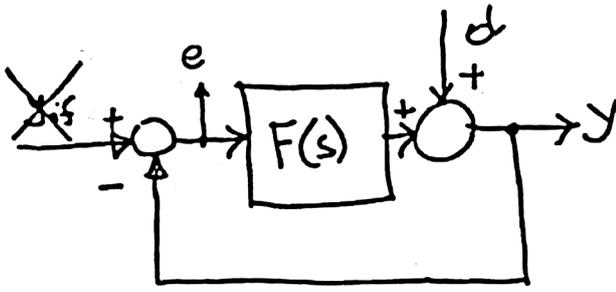
La conclusione è che in un sistema di questo genere si trova errore nullo in regime permanente quando  $F_1(s)$  ha un polo nel punto  $s = 0$ .

Un polo nel punto  $s = 0$  nella funzione  $F_2(s)$  non serve nel legame disturbo-uscita ma serve nel legame tra riferimento e uscita.

**In un sistema a retroazione la risposta al disturbo tende a zero, per  $t \rightarrow \infty$ ,**

**se e solo se**

**nel ramo diretto c'è un polo in  $s=0$  a monte del punto d'ingresso del disturbo**



Se il sistema non ha poli nell'origine allora, nello schema più semplice, il valore dell'errore sarà identico a quello che si aveva in un sistema di tipo 1. Definendo  $y_d$  l'uscita disturbata, il valore a regime permanente dell'errore che si avrebbe in questo sistema quando il disturbo è costante,  $y_d = 1/(1 + K_F)$ .

$$y_d = \frac{1}{1 + K_F}$$

$$W_d = \frac{F_2(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$

Nel secondo caso (con  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$ ), se il sistema non ha poli nell'origine, allora il valore dell'uscita disturbata è pari al guadagno della funzione  $W_d$ , ponendo  $s = 0$ . In  $y_d$  escono fuori due guadagni, come da immagine ha lato.

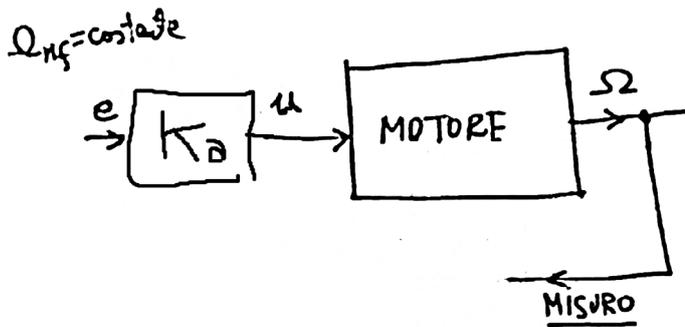
$$y_d = \frac{K_{F_2}}{1 + K_{F_1} K_{F_2}}$$

$$y_d = \frac{1}{K_{F_1}}$$

Se c'è un polo in  $s = 0$  in  $F_2$ ,  $K_{F_2}$  diventa una quantità elevata, quindi la formula che da l'errore si modifica come riportato a lato.

Le formule dell'errore si complicano a seconda di come sono fatti gli schemi.





Supponiamo di avere un motore, la cui uscita è una velocità angolare, l'ingresso è un comando  $u$  che proviene da un errore.

Per fare controllo della uscita essa deve essere misurata e confrontata, chiudendo un anello di reazione.

In condizioni di equilibrio, volendo avere una velocità costante si pone

una velocità di riferimento, e, se il motore deve girare a velocità costante, deve essere alimentato.

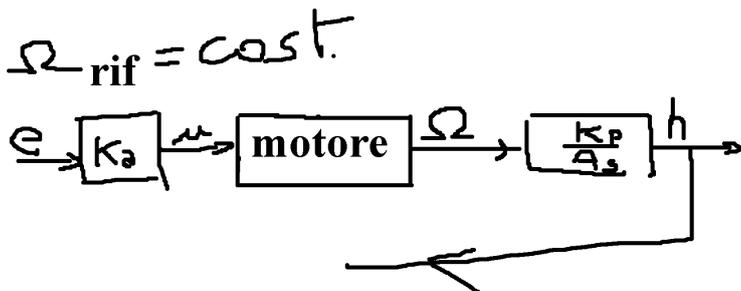
Tutto quello che viene in ingresso al motore è proporzionale all'errore, quindi affinché ci sia alimentazione ci deve essere un errore. Se l'errore è zero il motore si ferma, quindi non ha una velocità costante voluta.

Questo vuol dire che se voglio far girare motore devo tollerare un certo errore.

Tra  $e$  e  $u$  c'è di mezzo una amplificazione, di un certo valore  $K_a$ . Volendo avere una certa velocità costante, il che implica avere un certo comando  $u$  sul motore, comando che alimenta il motore, possiamo permetterci un errore tanto più basso quanto più alto è il valore del coefficiente  $K_a$ .

Si tenga presente che per avere una certa velocità occorre avere una certa alimentazione sul motore. Questo spiega perché l'errore dipenda dal guadagno.

### L'integratore



Supponiamo di controllare non la velocità ma di controllare una posizione, ad esempio il livello di un serbatoio.

Nel modello del serbatoio c'è un polo nell'origine, considerando come ingresso la velocità della pompa e come uscita l'altezza del serbatoio.

Se viene fatto un controllo di livello si osserva che nel ramo diretto, questa volta, è presente un polo nell'origine.

Il polo nell'origine è spiegato dal modello del sistema. È il legame tra posizione e velocità, la velocità è la derivata della posizione e la posizione è l'integrale della velocità.

Ci chiediamo se un sistema di questo genere ha un errore in regime permanente.

Supponiamo di avere un'altezza  $h$  costante: il livello è costante quando il serbatoio non viene né riempito né vuotato, in questo caso la velocità del motore nulla e quindi motore fermo, quindi l'alimentazione nulla, quindi l'errore è nullo.

Il sistema si stabilizza dunque in una situazione in cui l'errore è nullo e quindi il valore di  $h$  è esattamente quello desiderato. Viceversa, se il valore di  $h$  non è quello desiderato, allora c'è un errore, c'è una alimentazione al motore, la velocità è diverso da zero, e il serbatoio si riempie così vuota finché non viene raggiunto il valore desiderato.

Questo è il ruolo del polo nell'origine.

L'interpretazione di quello che succede in presenza del disturbo

Il disturbo è un blocco posto fra il motore e il serbatoio, che si immagina essere solo il riempimento ( $1/A_s$ ).

Lo schema si modifica dunque con una portata di riempimento ed una portata disturbante.

In presenza di una portata disturbante ci chiediamo se si potrà avere un'altezza desiderata.

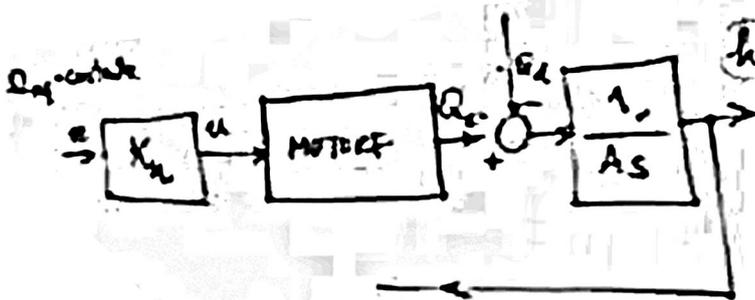
In presenza di una portata disturbante il motore dovrà fornire la portata che serve ad equilibrare l'acqua che esce.

Quindi il motore deve girare, quindi deve essere alimentato, quindi ci deve essere un errore nullo.

Questo vuol dire che l'altezza desiderata non può essere uguale a quello giusta.

C'è un errore nullo in questo sistema perché c'è un polo nell'origine nel ramo diretto, ma è a valle, non a monte del punto in cui agisce il disturbo e quindi interviene analisi che abbiamo visto in precedenza.

Ci rendiamo conto che l'errore a regime permanente c'è in quanto c'è un polo nell'origine ma non nel punto giusto del ramo diretto.

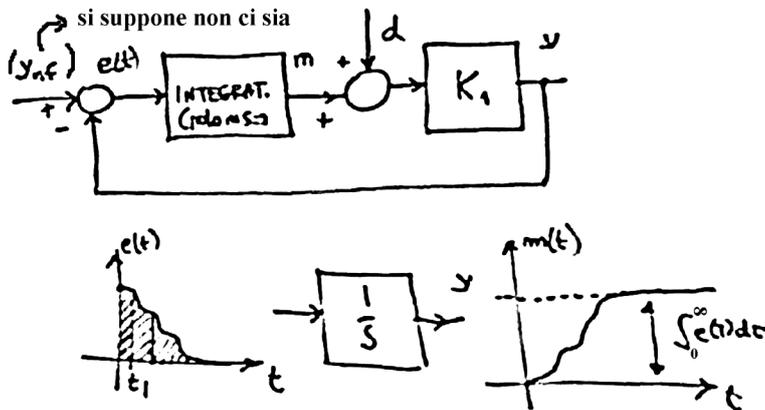


Vedremo in seguito la risposta ad altri tipi di segnali.

□

Prof. Alberto Isidori  
40'52"

Ruolo degli integratori sul ramo diretto. Il controllo integrale.



Si suppone che il dispositivo di controllo nello schema riportato in figura contenga un integratore, cioè un polo in  $s = 0$ .

Dopo il disturbo si suppone ci sia altro se non un blocco  $K_1$ .

L'integratore a monte del punto in cui avviene il disturbo è un dispositivo che consente di compensare esattamente il disturbo. In altre parole consente di annullare l'effetto del disturbo sull'uscita.

scita.

L'integratore, un polo nell'origine, è un dispositivo che integra il segnale di ingresso.

Nel caso dello schema riportato esso integrerà l'errore o una quantità ad esso proporzionale.

L'interesse è concentrato nel definire quella che è l'uscita dell'integratore, il punto m in figura.

Se il sistema è di tipo uno l'errore è una quantità che va a zero.

Il dispositivo che ha un polo nell'origine è un integratore che integrerà nel tempo l'effetto all'integrale della funzione  $e(t)$ , ovvero effettuerà l'integrale in tempo reale.

In sostanza ad ogni istante di tempo l'integrale di  $e(t)$  sarà pari all'area sottesa dal grafico entro quell'istante di tempo.

L'uscita al dispositivo tende a raggiungere un certo valore, che sarà costante in quanto l'area sarà finita.

L'uscita dell'integratore cresce fino a raggiungere un valore pari all'area della funzione. Quello che succede in condizione di regime è che l'ingresso è nullo e l'uscita è costante. Il valore di tale costante, sulla quale si è assestata l'uscita dell'integratore, è determinabile con considerazioni di equilibrio.

La quantità  $m$  è l'opposto della quantità  $d$ , in modo tale che in ingresso a  $K_1$  ci sia zero. Questo perché solo quando in ingresso a  $K_1$  c'è zero, l'uscita  $y$  è zero. E se l'uscita  $y$  è zero allora anche l'errore è zero.

Il ragionamento può anche essere ribaltato affermando che, sapendo che in condizioni di equilibrio l'errore è zero (vd. grafico funzione  $e(t)$ ), l'uscita è zero, deve essere zero anche l'ingresso al blocco  $K_1$  che rappresenta una costante; se l'ingresso a tale blocco è zero vuol dire che  $d$  e  $m$  si annullano e quindi  $m$  è l'opposto di  $d$ .

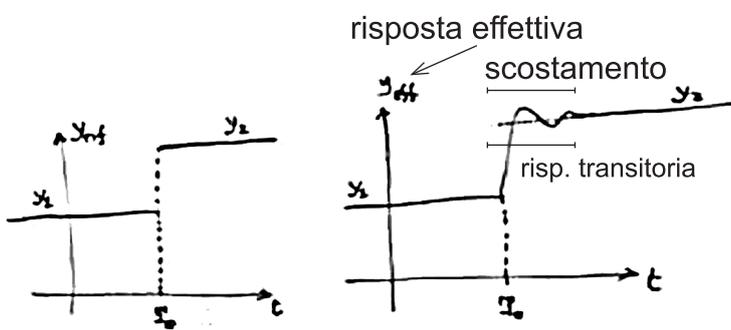
Quindi se il sistema raggiunge una situazione di equilibrio, e questo è un problema di stabilità, l'equilibrio è quello in cui l'uscita dell'integratore, che fornisce l'area dell'errore, raggiunge necessariamente un valore uguale ed opposto a quello del disturbo e quindi lo compensa.

Per tale ragione l'integratore è un dispositivo che automaticamente genera un segnale, integrando l'errore passato, che si oppone in tutto e per tutto al disturbo, lo compensa e l'uscita disturbata non c'è più.

Questo è il principio del controllo integrale. Storicamente introdotto da Siemens, fondatore dell'omonima compagnia, a fine 1800, per il controllo del timone delle navi.

Questo conclude l'analisi del regime permanente per ingressi polinomiali.

Abbiamo visto cosa succede quando c'è un ingresso costante e l'aspetto a regime permanente.



### Sistemi con ingressi non costanti

Supponiamo che l'ingresso al sistema non sia costante, ma sia assimilabile al passaggio da un regime ad un altro.

La situazione più semplice è quella di immaginare di raccordare due regimi costanti e vedere che cosa succede

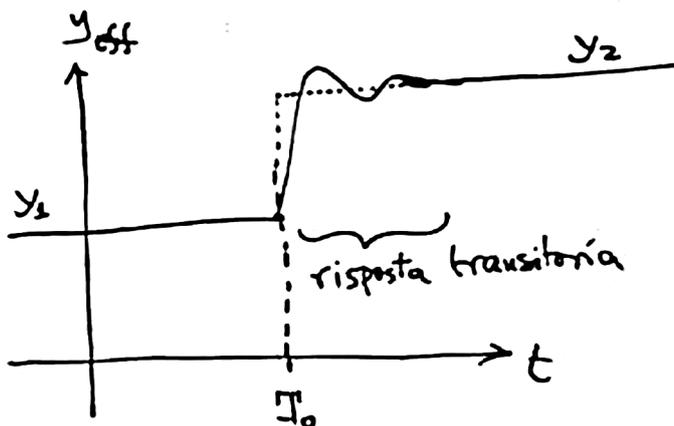
nel passaggio da un regime ad un altro.

Lo scenario è quello di avere un'uscita di un certo valore  $y_1$  costante fino ad un certo punto  $T_0$  e, da quel punto in poi, l'uscita assume un altro valore costante.

Si può supporre che l'uscita  $y_1$  fosse preesistente e quindi fosse già assestata, quindi il sistema si stava comportando nella modalità conforme al suo stato. Se il sistema, ad esempio, fosse stato di tipo uno, avrebbe avuto una risposta effettiva uguale a quella desiderata. Se il sistema si trovava già in regime permanente il valore sarebbe stato  $y_1$ .

Ad un certo punto si ha una brusca variazione del riferimento. Pur non sapendo cosa succede nel primo periodo, sappiamo cosa succede dopo il transitorio per cui, se il sistema è stabile, esso si assesta ad un certo valore  $y_2$ , che è quello che vogliamo.

Il passaggio ai due valori di regime è auspicabile che avvenga molto velocemente e senza troppi errori.



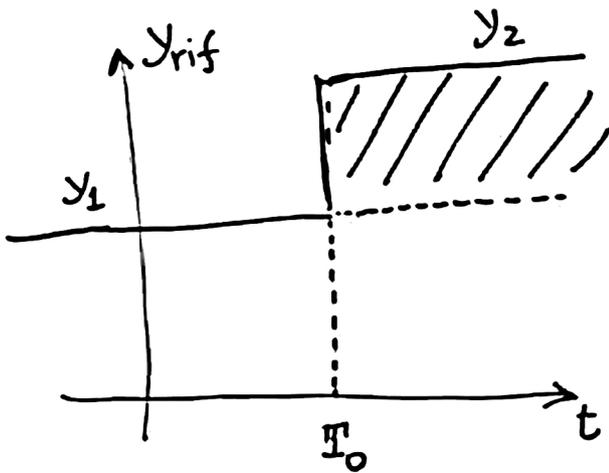
L'andamento effettivo del passaggio non sarà quello desiderato, che non vorremmo essere istantaneo.

Ci sarà uno scostamento tale per cui dopo alcune oscillazioni sarà raggiunto il valore desiderato.

La parte della risposta indicata come scostamento viene definita come risposta transitoria nel passaggio da un regime

costante ad un regime costante.

Siccome il sistema è lineare si può ridurre lo studio alle seguenti considerazioni.



Si immagina che l'ingresso sia composto da due porzioni costanti, quella relativa a  $y_1$  e quella relativa a  $y_2$ .

La prima darà una certa risposta a regime, che riteniamo essere quella giusta.

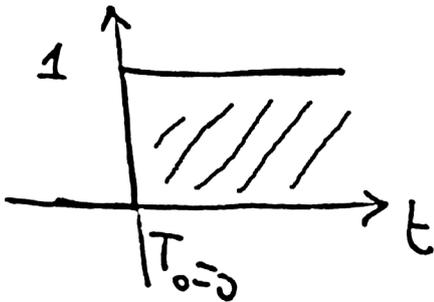
La nuova porzione è una funzione che si materializza in un certo istante ed è un gradino di una certa ampiezza ( $y_2 - y_1$ ).

L'ampiezza in realtà non è di interesse in quanto può essere scalata allo scaglino unitario, studiare questo e, conoscendo

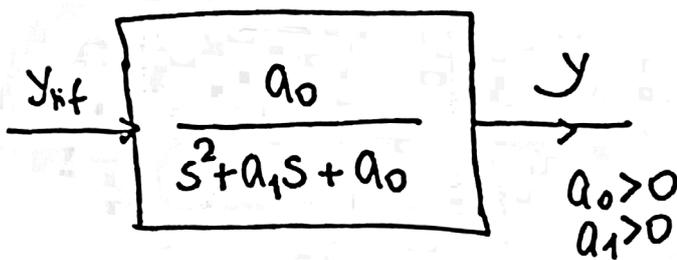
questo, poter determinare la risposta ad uno scaglino qualsiasi.

È di interesse nemmeno al tempo in quanto regime stazionario posso ritenere che il tempo sia il tempo zero.

In sostanza tutto ciò che interessa è studiare è la risposta ad un gradino che nasce all'istante  $T_0 = 0$  e di ampiezza unitaria.



Vediamo ora come, in alcuni casi semplici, siano fatte le risposte a gradino e come i parametri del sistema influenzano l'andamento della risposta a gradino in modo da poter dare delle indicazioni convenzionali sulla bontà del sistema.



Il caso più semplice è un sistema del cosiddetto secondo ordine, con un ingresso e una uscita, in cui la funzione di trasferimento, scritte nella forma convenzionale, ha nessuno zero e due poli con parte reale negativa, in quanto il sistema deve essere stabile.

Il denominatore è quindi nella forma

come da figura relativa.

Volendo studiare un sistema di tipo uno, che non dà errore alla risposta a gradino o, quanto meno, a regime permanente, si applicano i criteri già visti, quindi ponendo al numeratore un coefficiente che renda il sistema di tipo uno.

Distinguiamo due casi, il primo in cui ci sono radici immaginarie, complesse coniugate, il secondo in cui ci sono radici reali.

## Radici complesse coniugate

Caso di radici complesse coniugate

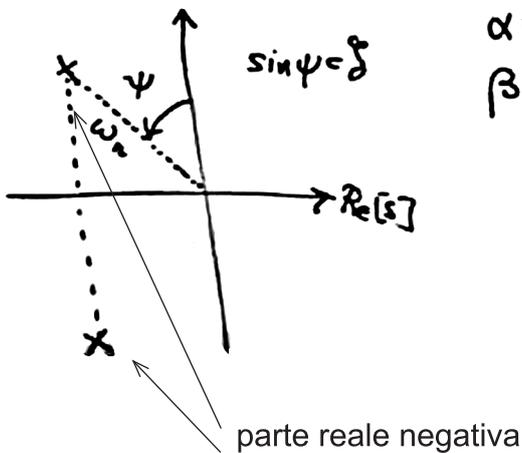
$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta s \omega_n + \omega_n^2}$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \alpha + j\beta \\ s_2 &= \alpha - j\beta \end{aligned} \right\} \text{i due poli}$$

valgono:

$$\alpha = -\zeta \omega_n$$

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$$



$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta s \omega_n + \omega_n^2}$$

smorzamento

pulsazione naturale

I parametri  $\zeta$  e  $\omega_n$  sono legati alla posizione dei due poli della funzione sul piano complesso dalle formule riportate per comodità.

Per poter fare dei grafici, simulati al computer, occorre dare dei valori ai parametri  $\zeta$  e  $\omega_n$ .

Si normalizza tutto rispetto a  $\omega_n$ .

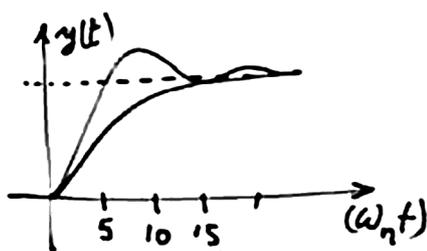
la risposta (Laplace)  
al gradino

$$y(s) = W(s) \frac{1}{s}$$

la risposta nel tempo  $\underline{x}t$

$$y(t) = 1 + M e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\beta t + \varphi)$$

$$= 1 + M e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \varphi)$$



In ingresso al sistema c'è un gradino, la cui trasformata di Laplace vale  $1/s$ , la funzione di trasferimento vale  $W(s)$  e quindi la trasformata della risposta è  $y(s)$ , come riportato a lato.

La risposta nel tempo avrà un termine costante che vale uno e che è la porzione a regime permanente, e poi ci sarà un termine dipendente dal tempo che contiene un modulo  $M$  che contiene una certa espressione, questa è la porzione di risposta dovuta ai due poli che si trovano nella parte sinistra del piano complesso. Le grandezze  $M$  e  $\varphi$  dipendono dai parametri  $\zeta$  e  $\omega_n$ .

Si osservi che  $\alpha$  e  $\beta$  sono entrambi proporzionali a  $\omega_n$ , poiché essi moltiplicano entrambi  $t$ , allora è possibile normalizzare l'asse dei tempi.

Fatto questo, si noti come le quantità  $\omega_n$  e  $t$  compaiano sempre insieme.

Quindi, riportando su un grafico la risposta, conviene portare  $\omega_n t$  sull'asse delle ascisse.

Questo corrisponde a normalizzare il tempo. Avendo normalizzato il tempo, il parametro che rimane è il parametro  $\zeta$ . A seconda del valore di tale parametro l'andamento della risposta potrà essere in un modo o in un altro, vd. figura.

La quantità  $\omega_n t$  è diventata adimensionale a causa della *semplificazione della dimensione tempo*. Si tratta di una normalizzazione.

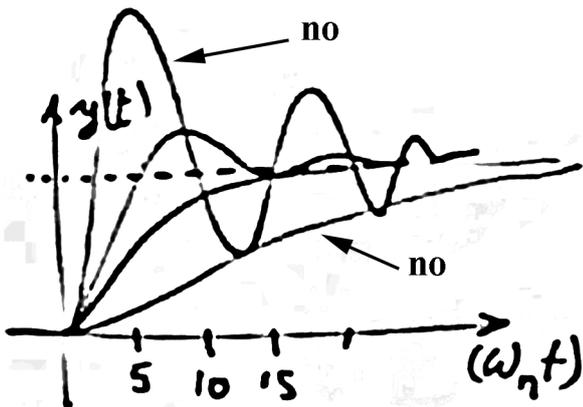
$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

Le cose vanno come se si prendessero i tempi naturali e si mettesse  $\omega_n = 1$ , quindi la funzione  $W(s)$  diventa come riportato a lato.

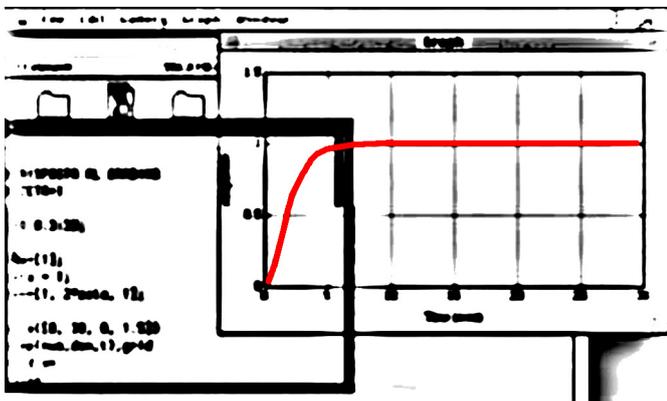
Questo corrisponde a studiare la funzione generale secondo l'asse dei tempi normalizzati, con un interesse rivolto al ruolo di  $\zeta$  e vedere come questo parametro influenzi il transitorio.

Un transitorio che abbia delle oscillazioni molto ampie non va bene, così come non va bene un transitorio che duri "molto" tempo.

L'adeguamento al nuovo regime deve essere il più veloce possibile, ma senza commettere troppi errori.



### Esempi di simulazione con MathLab



Sono commenti le righe precedute da %.

```

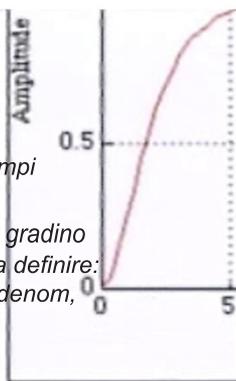
% RISPOSTA AL GRADINO
% ZETA=1      commenti

t=0:0.3:30;  definizione asse dei tempi
              da 0 a 30 di passo 0.3

num=[1];    definizione della f. di risp. al gradino
zeta = 1;   i parametri da definire:
den=[1, 2*zeta, 1]; numeratore, denom,
                  e poi zeta.

axis([0, 30, 0, 1.5])
step(num,den,t),grid  calcolo effettivo della f. di risp. al gradino
hold on
pause

```



Definizione assi dei tempi da 0 a 30, con passo 0.3. Il riferimento può essere assoluto o meno.

Definizione della funzione di risposta al gradino, con il numeratore, il valore della variabile zeta ( $\zeta$ ), con il denominatore, che è un vettore con i coefficienti in ordine decrescente, quindi il primo 1 è il coefficiente di  $s^2$ ,  $2 \cdot \zeta$  è il coefficiente di  $s$ , l'1 finale è il coefficiente di  $s^0$ .

È anche definita la scalatura degli assi, evitando quella di default, in quanto si vorrà sovrapporre alcuni grafici, per diversi valori della risposta. Da 0 a 30 è la scala dei tempi,

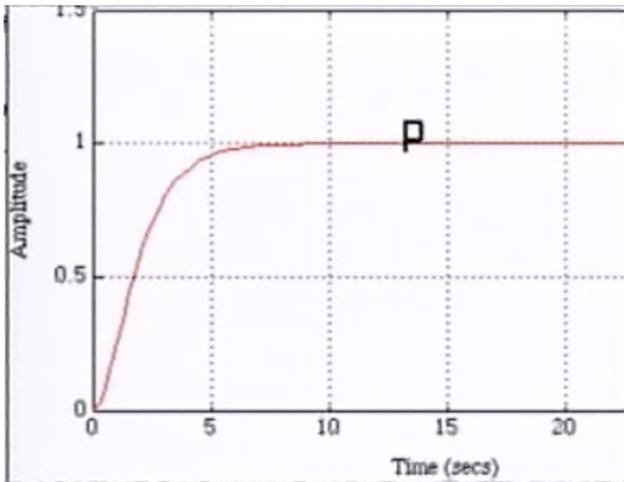
da 0 a 1.5 quella delle ampiezze delle risposte. Non fornendo le scale dei tempi e delle ampiezze, specialmente non conoscendo a priori il risultato, MathLab userà dei valori automatici, di default.

Il comando di step calcola la risposta al gradino.

Con grid si impone che venga visualizzata la griglia.

Il comando hold on serve a mantenere il grafico e non cancellarlo.

Si noti l'assestamento sul valore finale, che avviene in un tempo di circa cinque secondi.

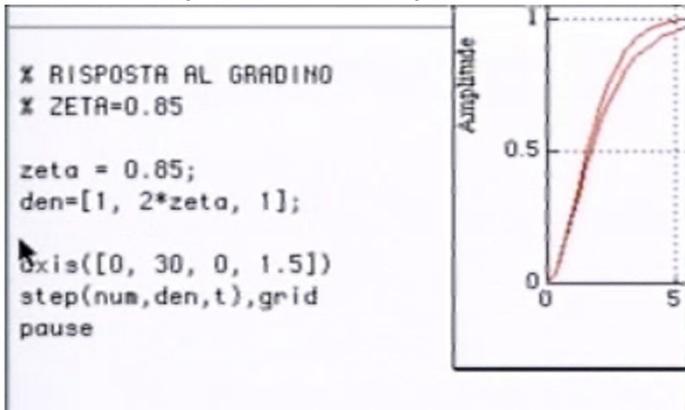


Si può dunque dire in maniera grossolana che in circa cinque, sei secondi si raggiunge il 95% del valore desiderato.

L'informazione è questa, a seconda del sistema in esame rimane da valutare se è accettabile o meno.

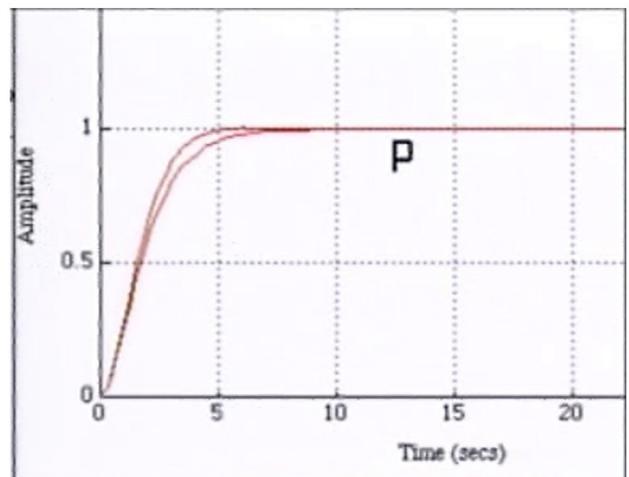
Nella immagine a lato quello che si ottiene quando il valore di zeta viene leggermente abbassato rispetto al valore precedente.

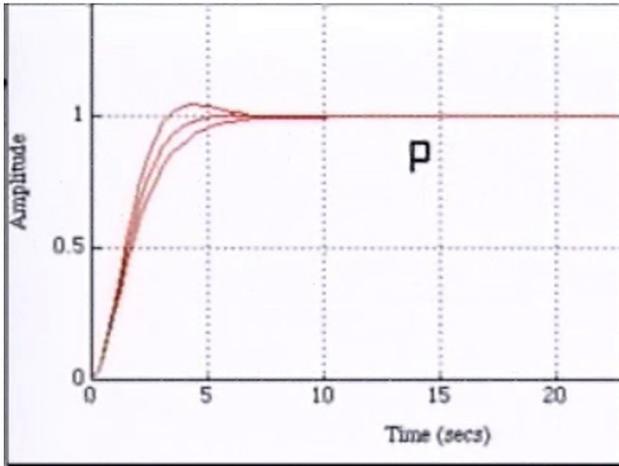
bassato rispetto al valore precedente.



Sotto il nuovo grafico, riportato insieme al precedente. Si capisce il nuovo dalla differenza temporale nell'assestamento.

Il nuovo grafico è quello che arriva prima a 1. Dunque in questo caso è migliorata la prontezza della risposta che risulta essere più rapida.

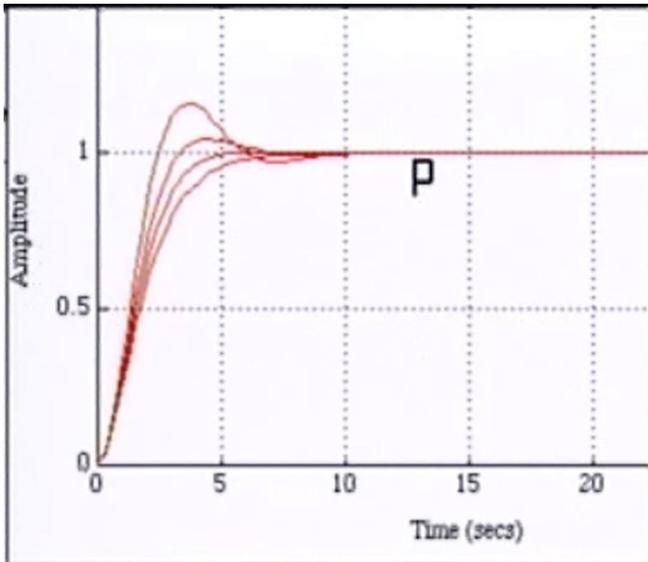




Per un valore di zeta ( $\zeta$ ) pari a 0.7 abbiamo un ulteriore grafico riportato a lato.

In questo caso abbiamo una risposta ancora più rapida, in pratica l'assestamento al 5% del valore desiderato si raggiunge approssimativamente in tre secondi. In pratica è stato dimezzato il cosiddetto tempo di salita rispetto al primo valore dato al parametro zeta.

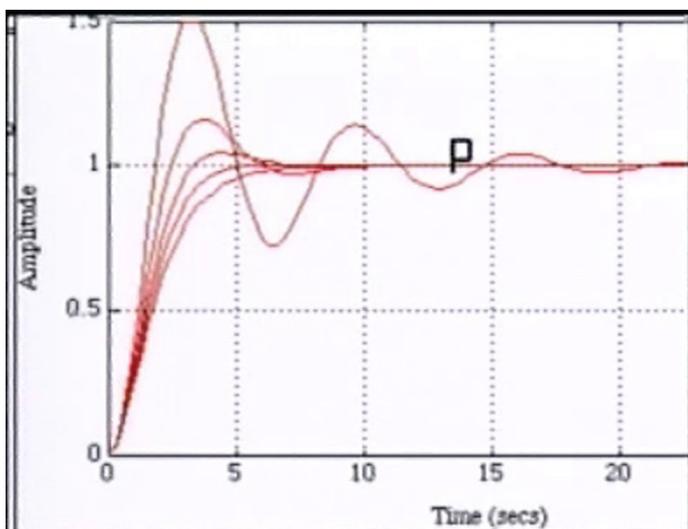
La caratteristica della risposta è leggermente diversa dalle precedenti e sia quella che si chiama la sovralongazione, la risposta "sale un po' su". La risposta cioè va al di là del valore finale poi torna indietro.



Per un valore di zeta ( $\zeta$ ) pari a 0.5 abbiamo un ulteriore grafico riportato a lato.

Il tempo di raggiungimento del 5% il valore desiderato si ottiene ancor prima, in un tempo dell'ordine di due secondi.

Ma in questo caso si noti come la sovralongazione sia più ampia. È stimabile nel 20% del valore finale, raggiunge un valore dell'ordine di 1.2. Dal punto di vista pratico potrebbe essere sempre accettabile, in pratica c'è un periodo breve in cui l'errore in più è del 20%, ma questo errore più consente di avere una rapidità maggiore nella risposta.



Per un ulteriore valore di zeta, ancora più basso, pari ad un valore di 0.2, si nota come le cose in realtà non vadano più bene. La risposta che si ottiene non è più accettabile. Essa oscilla molto, mettendoci un tempo molto maggiore di tutte le altre risposte ad assestarsi. Inoltre le sovralongazioni che presenta non sono affatto accettabili.

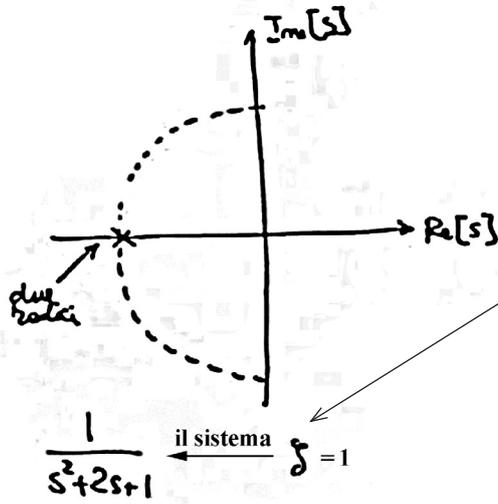
Quindi abbiamo visto che nella risposta transitoria ci sono dei valori di zeta che passano dall'essere accettabili al non esserlo.

Per questa ragione, avendo a che fare con un sistema del secondo ordine, conviene rifarsi a questi valori tipici della risposta.

Il posizionamento delle radici sul piano complesso è riportato nella figura a lato.

Il valore di  $\omega_n$  era uguale per tutti ed era unitario (semicerchio tratteggiato).

Per zeta = 1 il sistema diventa  $1/(s^2 + 2s + 1)$ , con due radici coincidenti nel punto -1.



$$\sin \psi = \zeta = 0.85$$



L'angolo è molto ampio

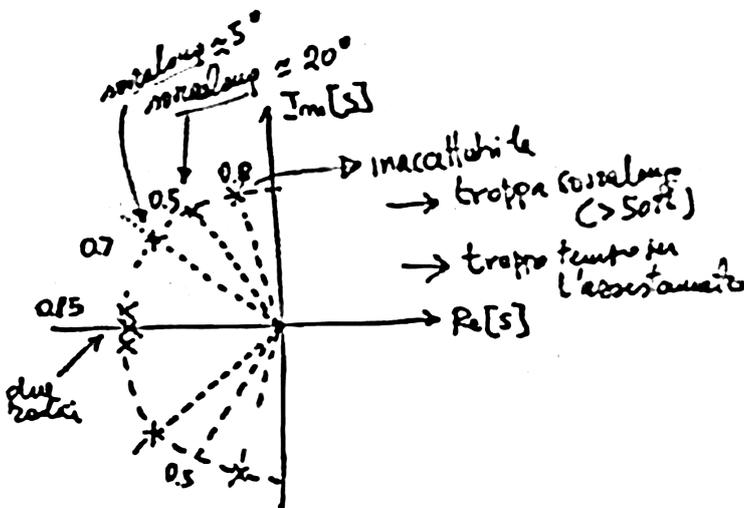
Nel secondo caso, per zeta = 0.85, l'angolo sotteso è molto ampio, molto vicino a 90°.

$$\sin \psi = \zeta = 0.7$$



$\psi$  vicino a 45°

Per il valore di zeta 0.7, che è vicino a 0.707, che è  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , l'angolo il cui seno è quel valore è 45°.



Dunque la collocazione delle radici sul piano complesso influenza la risposta transitoria.

Si riescono a stabilire dei valori ideali di smorzamento che sono quelli di uno zeta intorno a 0.7, da 0.5 a 0.7.

Vedremo successivamente il caso in cui la funzione di trasferimento ha due poli reali, da cui consegue una risposta più lenta.

□

Prof. Alberto Isidori  
40'51"

Nella lezione precedente abbiamo visto come si studia un transitorio di un sistema del secondo ordine considerando, in particolare, il caso di un sistema avente radici con parte immaginaria non nulla.

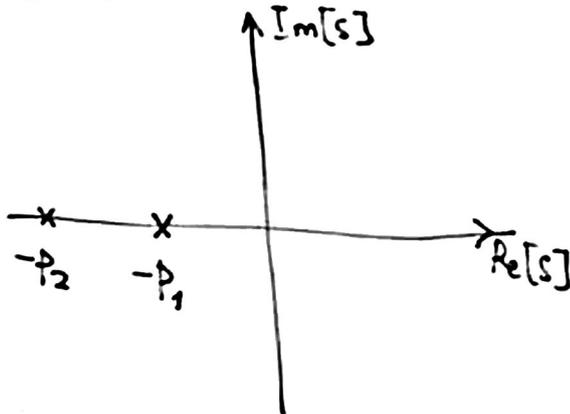
Per completare lo studio analizziamo il caso in cui il sistema abbia solo radici reali.

$$W(s) = \frac{a_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$W(0) = 1$  (tipo 1)  
radici reali

$$W(s) = \frac{p_1 p_2}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2}$$

$p_1, p_2$  numeri reali



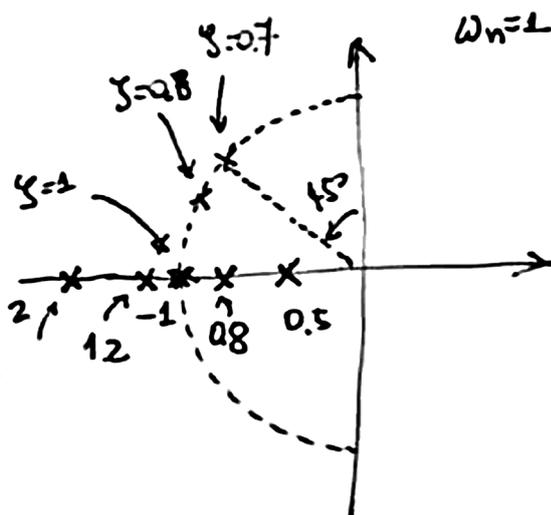
Si consideri una funzione di trasferimento nella forma mostrata a lato, e poiché vale la proprietà  $W(0) = 1$  significa che il sistema è di tipo uno.

Volendo studiare il caso di radici reali il denominatore deve essere scritto nella forma mostrata. Le radici del polinomio al denominatore sono  $-p_1$  e  $-p_2$ .

Le due radici sono disegnate sul piano reale nella relativa figura.

Le parti reali sono negative perché stiamo studiando un sistema asintoticamente stabile.

Con MatLab verrà visto il grafico di come si presenta il grafico della risposta transitoria.



Nell'immagine a lato sono riportate le informazioni relative allo studio nella lezione precedente.

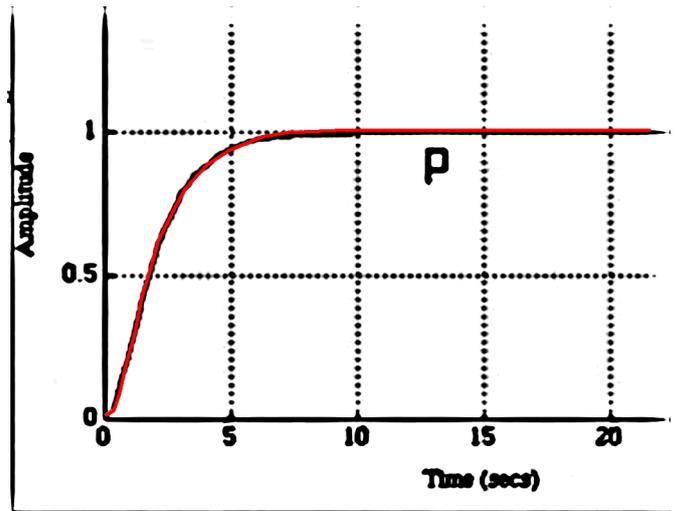
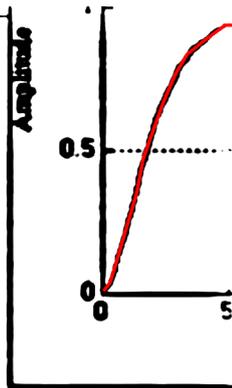
È stato osservato come nel caso che il parametro  $\zeta$  (zeta) avesse valore 0.7 la situazione che si presenta sia abbastanza conveniente in quanto la risposta appare sufficientemente pronta a fronte di un tempo di assestamento non troppo lungo e di una non eccessiva sovravelongazione.

Le radici della funzione di trasferimento ( $-p_1$  e  $-p_2$ ) saranno poste vicine alla zona del piano complesso in modo tale da avere informazioni per analizzare le differenze nella risposta.

La posizione sarà intorno a 1.2 e 0.8 in un primo caso, 2 e 0.5 in un secondo caso.

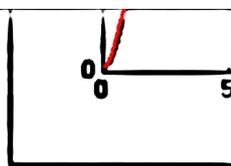
Troveremo delle risposte che in realtà non sono migliori, dal punto di vista della prontezza, di quelle viste nel caso di radici avente parte immaginaria diverso da zero. Questo suggerisce, in sede di progetto, di fare in modo che il sistema segua le specifiche di avere parte reale negativa e parte immaginaria diversa da zero, e uno smorzamento intorno al valore 0.7.

```
t=0:0.3:30;
p1=0.8;
p2=1.2;
num=[p1*p2];
den=[1, p1+p2, p1*p2];
axis([0, 30, 0, 1.5])
step(num,den,t),grid
```



hold on  
pause

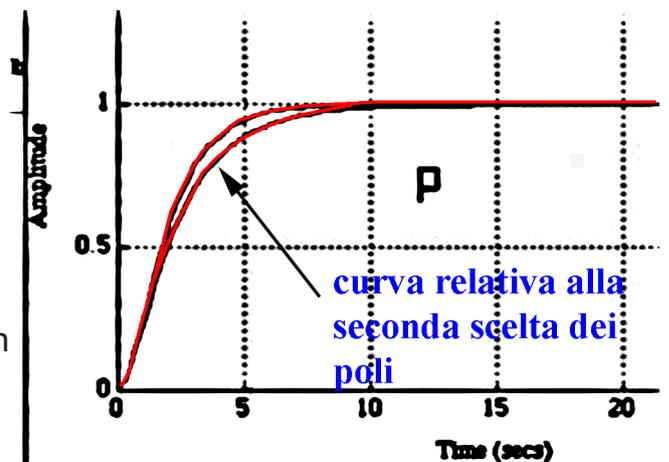
hold on  
pause



Risultato avendo cambiato i poli  $p_1$  e  $p_2$  della funzione.

```
p1=0.5;
p2=2.0;
num=[p1*p2];
den=[1, p1+p2, p1*p2];
axis([0, 30, 0, 1.5])
step(num,den,t),grid
```

hold off  
pause



Continua a non esserci sovraelongazione, con un assestamento un poco più lento.

## Precisione, nel periodo transitorio, durante il passaggio da un certo regime permanente ad un altro .

Ricapitolando, abbiamo visto che il problema di valutare la precisione della risposta nel periodo transitorio durante il passaggio da un certo regime permanente ad un altro, viene risolto definendo il concetto di risposta a gradino.

### ⇒ Risposta a gradino

Abbiamo visto la risposta a gradino in alcuni casi particolari, in sistemi del secondo ordine.

Gli esempi di simulazione che sono stati fatti hanno dimostrato come sia conveniente, a parte una scalatura dell'asse dei tempi che corrisponde alla scelta del parametro pulsazione naturale, fare in modo di ottenere radici complesse e coniugate con parte immaginaria non nulla, con uno smorzamento intorno al valore 0.5 perché questo dà sufficiente prontezza e una sovraelongazione limitata.

Questo è valido per sistemi del secondo ordine, che sono una classe dei sistemi molto particolare.

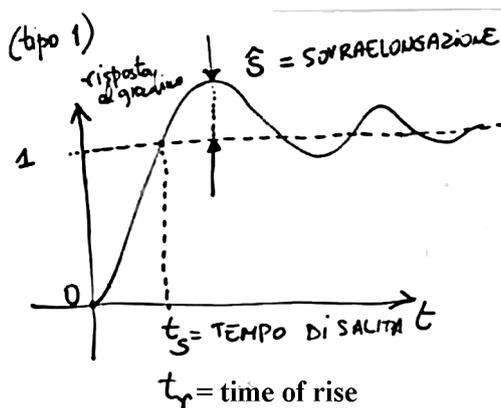
Per sistemi più generali occorre identificare sulla risposta alcuni parametri essenziali, possibilmente pochi, e vedere come essi sono influenzati dai valori di altri parametri del sistema e in particolare dai valori della funzione di trasferimento che caratterizza il processo controllato oppure il sistema ad anello aperto.

## Parametri convenzionali della risposta a gradino

Queste osservazioni ci portano a definire convenzionalmente due grandezze, il tempo di salita e la sovraelongazione, rispettivamente  $t_s$  e  $\hat{s}$ .

- tempo di salita  $t_s$ ,

- sovraelongazione  $\hat{s}$



In figura una risposta al gradino generica. Non necessariamente relativa ad un sistema del secondo ordine. Se il sistema è di tipo uno, la tendenza sarà quella di assumere un valore asintotico pari a uno.

Altrimenti tenderà ad assumere un valore asintotico che differisce da uno del valore dell'errore in regime permanente.

Sono riportati graficamente i parametri sovraelongazione (il cappello (^) sopra la S è per distinguerla dalla variabile di Laplace) e tempo di salita.

La sovraelongazione è intesa nella risposta a gradino convenzionalmente.

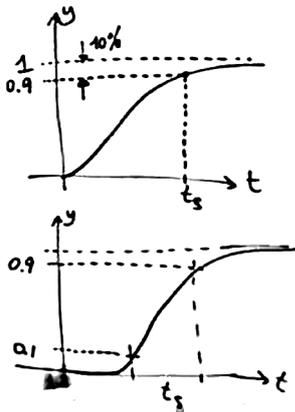
Il tempo di salita  $t_s$  è il tempo che intercorre tra zero il primo istante in cui si raggiunge il valore di regime.

Questi due numeri cercano di catturare le proprietà generali della risposta.

Si vuole che il tempo di salita sia limitato, scelto in relazione alle caratteristiche fisiche dell'impianto che si vuole controllare.

La sovraelongazione informa sullo scostamento massimo durante il transitorio dal valo-

re di regime, essa non deve essere troppo pronunciata. Sono ammessi valori dell'ordine compreso tra il 15% e il 25% che, nel caso dei sistemi del secondo ordine, corrispondono a valori delle coefficiente smorzamento  $\zeta$  (zeta) intorno a 0.7.



Nel caso di un sistema che non ha sovranelongazione, quando cioè i poli sono reali, e la risposta a gradino è fatta come nella figura a lato, non si riesce a definire il tempo di salita nel modo fatto in precedenza, perché non viene mai raggiunto, ad un istante finito, il valore di regime 1.

La definizione in questo caso consiste nel determinare il tempo necessario a raggiungere una certa porzione del valore finale, ad esempio il 10%, ovvero 0.9.

In casi più complicati, in cui la risposta a un certo ritardo iniziale, si usa definire il tempo necessario per passare da una frazione piccola del valore finale, ad esempio 0.1, al

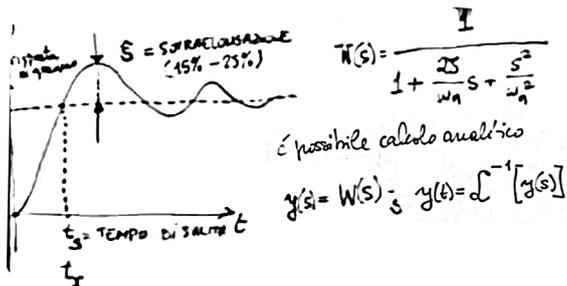
valore 0.9. Si fa questo in quanto, quando siamo in presenza di fenomeni di ritardo, essi non possono essere eliminati con la retroazione. Ma si riesce, attraverso la retroazione, ad assicurare una salita rapida dopo che si è verificata la pausa di ritardo, ritardo dovuto normalmente a ritardi di trasporto nel processo stesso.

$$W(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

è possibile un calcolo analitico

Considerando un sistema del secondo ordine, avente guadagno unitario e radici complessi coniugati, facendo riferimento alla relativa funzione come mostrata nella figura, si può calcolare analiticamente il valore della sovranelongazione e il valore del tempo di salita.

Lungo ma non difficile.



$$\hat{s} = f(s) = e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

A lato il risultato.

La sovranelongazione dipende solo dal coefficiente di smorzamento e non dalla pulsazione naturale.

$$t_s = \frac{1}{\omega_n} g(\zeta) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \pi - \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right]$$

Il tempo di salita.

La lettura della seconda relazione è che il tempo di salita normalizzato dipende soltanto dalla sovranelongazione.

$$t_s \omega_n = g(\zeta)$$

$$T(s) = \frac{1}{1 + \frac{2s}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Risposta in frequenza

$$s = j\omega$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + 2s \frac{j\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

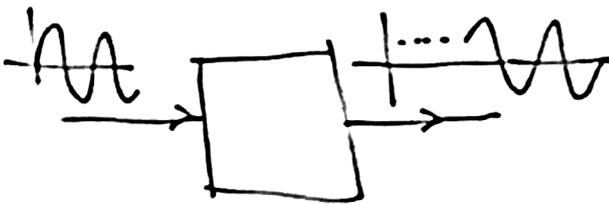
La risposta in frequenza

In un sistema del secondo ordine è facile stabilire quali valori devono essere attribuiti ai parametri se si vuole avere una certa sovranelongazione, se si vuole avere un certo tempo di salita.

Ma se il sistema non è del secondo ordine, il discorso diventa più complicato e per questa ragione sono stati sviluppati dei modi alternativi per caratterizzare il transitorio. Tali metodi fanno riferimento alla risposta in frequenza.

In un sistema del secondo ordine possiamo parlare di risposta in frequenza andando a porre  $s = j\omega$ , ottenendo una funzione di  $\omega$ ,  $W(j\omega)$ .

La risposta armonica è la funzione che caratterizza la risposta di un sistema in regime permanente quando l'ingresso è una grandezza sinusoidale.



$$y(t) = M \sin(\omega t + \varphi)$$

$$M = |W(j\omega)|$$

$$\varphi = \angle W(j\omega)$$

Dato un ingresso sinusoidale si aspetta che l'uscita si assesti verso la risposta a regime permanente. Dopo un certo tempo in uscita abbiamo un'altra sinusoide, e la risposta  $y(t)$  è nella forma mostrata in figura.

Anche la risposta in frequenza dipende dai parametri  $\zeta$  (zeta) e  $\omega_n$ .

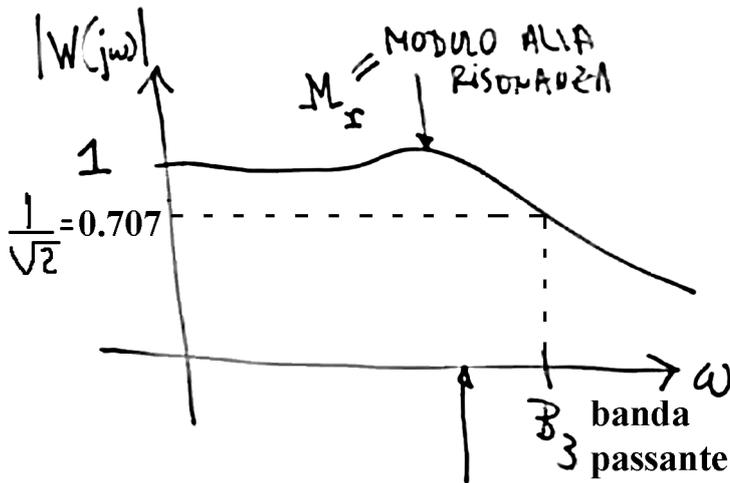
Siccome questi parametri influenzano i parametri della risposta al gradino, è ragionevole immaginare che si possa stabilire una corrispondenza tra i parametri della risposta al gradino e i parametri della risposta armonica.

### Parametri convenzionali della risposta armonica

- banda passante  $B_3$  (a 3 dB)
- modulo alla risonanza  $M_r$

I parametri della risposta armonica da prendere in considerazione e per cui sussiste una corrispondenza con i parametri della risposta a gradino sono la banda passante  $B_3$  (a 3 dB) e il modulo alla risonanza  $M_r$ .

Queste grandezze possono essere disegnate in un diagramma.



Si parte dal valore 1 in quanto quando si parte da  $s = 0$ , quindi  $\omega = 0$ , la funzione deve valere 1.

Poiché le funzioni hanno normalmente un numero di poli superiore al numero degli zeri, quando  $\omega$  va all'infinito il modulo tende a zero, quindi l'andamento è qualitativamente tracciabile come mostrato in figura.

C'è una salita in quanto il modulo, per certe frequenze, può essere più elevato, ed è quella che si chiama risonanza.

Questa situazione corrisponde in realtà

alla presenza di una sovraelongazione nella risposta a gradino.

Il modulo alla risonanza è definito come il massimo modulo della funzione  $W(j\omega)$ .

La banda passante a 3 decibel (dB) è quel valore della pulsazione, indicata con  $B_3$ , per la quale il modulo della funzione  $W$  si è attenuato di un fattore 3 decibel rispetto al valore iniziale, e, a partire da quel valore risulta sempre inferiore.

Essendo su scale naturali il fattore 3 decibel corrisponde a  $1/\sqrt{2}$ , pari circa a 0.707.

Per trovare una corrispondenza tra questi due parametri e quelli della risposta al gradino utilizziamo l'analisi sui sistemi del secondo grado.

A conti fatti il modulo alla risonanza è un numero che dipende dal parametro  $\zeta$  (zeta).

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

vera solo se  $\zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

c'è anche risonanza

(“parentela” tra  $\zeta$  e  $M_r$ )

Quando il parametro  $\zeta$  (zeta) è superiore alla radice indicata in figura, ovvero è superiore al valore 0.707, non c'è risonanza.

Questo vuol dire che la funzione non ha una “salita”.

Si ricorda che il valore 0.707 era il valore che ci dava le radici disposte su una retta a  $45^\circ$ , dando una risposta abbastanza rapida con uno sovraelongazione non troppo eccessiva.

Questa relazione è in qualche maniera analoga a quella che legava la sovraelongazione ai parametri.

Ci fa pensare ad una “parentela” tra sovraelongazione e modulo alla risonanza.

Questo perché entrambe le quantità sono funzione della sola  $\zeta$  (zeta).

Quindi si può immaginare di risalire dalla sovraelongazione alla  $\zeta$  (zeta) e da questa al valore del modulo alla risonanza. Oppure



effettuare percorso inverso. Questa è la dipendenza funzionale fra le due grandezze.

$$B_3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

Per quanto riguarda la banda passante a 3 decibel, a seconda grandezza identificata sul diagramma, essa dipende dalle frequenze, essendo essa stessa una frequenza, ed è proporzionale alla frequenza naturale secondo la formula mostrata a lato.

$$t_s = \frac{1}{\omega_n} g(\zeta) \Rightarrow B_3 t_s = F(\zeta)$$

Il tempo di salita della risposta a gradino è mostrata nella figura.

Confrontando le due formule, quella della banda passante a 3 decibel e quella del tempo di salita, si nota che il loro prodotto è indipendente dalla pulsazione naturale.

Tale prodotto diventa una nuova funzione, dell'unico parametro  $\zeta$  (zeta).

Quindi, più la banda passante è ampia e più il tempo di salita è breve.

Tutto questo vale per sistemi del secondo ordine.

ELONGAZIONE  
-25%)

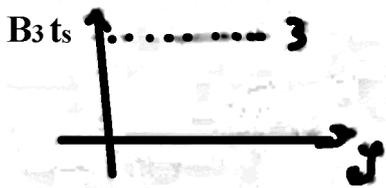
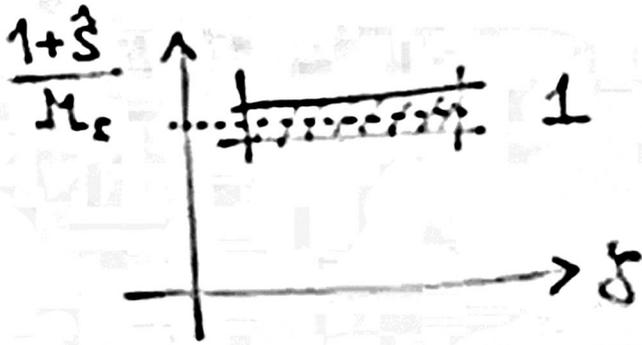
Quali sono i legami  
tra  $\hat{s}$  e  $M_s$  ?  
tra  $B_3$  e  $t_s$  ?  
in un sistema più generale

CORRELAZIONI EMPIRICHE

Si tratta dunque, in un sistema di ordine generale, di stabilire quali sono i legami tra sovralongazione e modulo alla risonanza, che, in un sistema del secondo ordine hanno una qualche relazione, e di stabilire quali sono i legami tra banda passante a 3 decibel e tempo di salita.

Non sono state trovate delle dipendenze funzionali precise, data la difficoltà derivata dall'aumentare dei parametri all'aumentare dell'ordine del sistema, ma sono state stabilite delle correlazioni empiriche, trovate facendo numerose simulazioni.

È stato osservato che, prendendo sistemi dell'ordine fino al quarto, quinto, il massimo della risposta al gradino ( $1 + \hat{s}$ ) diviso il massimo valore della risposta armonica è un valore "abbastanza" costante, ed è compreso entro una certa fascia, per tutti i possibili sistemi di ordine limitato. Tale valore varia a seconda dello smorzamento ed è prossimo a 1.



Si verifica anche che il prodotto  $B_3 t_s$  è all'incirca pari ad un valore 3.

Dunque si possono stabilire delle correlazioni empiriche tra i parametri della risposta a gradino e i parametri della risposta armonica.

Questo semplifica in un certo senso il problema dell'analisi.

□

Prof. Alberto Isidori  
40'38"

### Risposta armonica

Abbiamo visto che in molti casi pratici per caratterizzare la precisione del sistema, ovvero la qualità della risposta del periodo transitorio, ci si può limitare a considerare due parametri della cosiddetta risposta a gradino: il tempo di salita e la sovraelongazione.

Abbiamo legato questi parametri ad altri parametri della cosiddetta risposta armonica del sistema.

Abbiamo visto che il tempo di salita è legato alla banda passante e che la sovraelongazione è legata al modulo alla risonanza.

In questo modo abbiamo stabilito una corrispondenza, anche se molto vaga ed empirica, tra la risposta a gradino e la risposta armonica di un sistema.

La risposta armonica è uno strumento che consente di valutare la bontà del transitorio, la precisione di un sistema durante il periodo transitorio. Ma l'importanza della risposta armonica va oltre questa semplice interpretazione in quanto essa fornisce molte altre informazioni sul comportamento del sistema per il modo stesso in cui è definita.

Si ricorda che la risposta armonica è quella funzione che rappresenta come un sistema risponde in regime permanente a segnali di ingresso sinusoidali.

È interessante studiare la risposta di un sistema a segnali sinusoidali perché, in generale, avendo a che fare con un segnale generico periodico, possiamo pensare (analisi di Fourier) di scomporlo in componenti sinusoidali elementari, di frequenze multiple e di una certa frequenza base, e possiamo immaginare che, se la risposta a ciascuna componente elementare presenta un errore piccolo, la risposta del sistema al segnale periodico generico presenterà anch'essa un errore piccolo. Questo per un segnale periodico. Per un segnale non periodico possiamo pensare allo spettro di Fourier del segnale stesso e immaginare che, se per tutte le frequenze comprese nello spettro di Fourier del segnale stesso l'errore è piccolo, il sistema si comporta bene rispetto ad un segnale qualsiasi.

L'importanza della risposta armonica va abbastanza oltre quelle semplici interpretazioni svolte nelle lezioni precedenti che legano banda passante e modulo alla risonanza rispettivamente a tempo di salita e sovraelongazione.

Studieremo le caratteristiche della risposta armonica e vedremo come la risposta armonica di un sistema, in particolare a retroazione, ha influenzata dalle grandezze che caratterizzano il sistema stesso.



$$s = j\omega \rightarrow W(j\omega)$$

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \text{a regime permanente} = M \sin(\omega t + \varphi)$$

$$M = |W(j\omega)|$$

$$\varphi = \angle W(j\omega)$$

La risposta armonica è quella funzione che si ottiene in un sistema con un ingresso  $u$  e con uscita  $y$  quando si calcola la funzione di trasferimento  $W(s)$  in  $s = j\omega$ .

La risposta armonica è importante perché, immaginando che l'ingresso al sistema sia una sinusoidale di ampiezza unitaria e di pulsazione  $\omega$ , la risposta  $y(t)$  a regime permanente è come da figura a lato.

$$y(s) = W(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{R_1}{s + j\omega} + \frac{R_2}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^m \frac{P_i}{s - p_i}$$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$      $\downarrow \mathcal{L}^{-1}$      $\downarrow \mathcal{L}^{-1}$      $\downarrow \mathcal{L}^{-1}$   
 $P_i e^{p_i t}$

$$y(t) =$$

Per ottenere la formula si prende l'ingresso e si fa la trasformata di Laplace.

Si eseguono i calcoli e la trasformata inversa.

$$y(s) = W(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \left[ \frac{R_1}{s + j\omega} + \frac{R_2}{s - j\omega} \right] + \sum_{i=1}^m \frac{P_i}{s - p_i}$$

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} \frac{W(s) \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = W(j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega}$$

$$y(t) = \frac{W(-j\omega)}{-2j} e^{j\omega t} + \frac{W(j\omega)}{2} e^{j\omega t}$$

$$R_1 = \frac{W(-j\omega)}{-2j} \quad R_2 = \frac{W(j\omega)}{2} \quad \text{I residui}$$

$$y(s) = W(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\left[ \frac{R_1}{s+j\omega} + \frac{R_2}{s-j\omega} \right]$$

$$y(t) = \frac{W(-j\omega)}{-2j} e^{j\omega t} + \frac{W(j\omega)}{2j} e^{j\omega t}$$

Espressione della risposta del sistema a regime permanente.

scrivo  $W(j\omega) = M e^{j\varphi}$

Rappresentazione polare, ottenendo quanto a lato.

$$y(t) = \frac{M e^{j\varphi} e^{j\omega t}}{-2j} + \frac{M e^{j\varphi} e^{j\omega t}}{2j}$$

$$= M \left[ \frac{e^{-j(\omega t + \varphi)}}{-2j} + \frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{2j} \right]$$

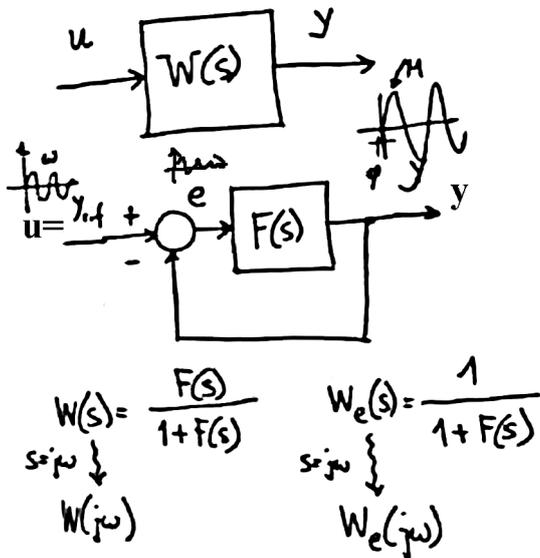
$$= M \sin(\omega t + \varphi)$$

$y(t)$

Quindi, se si prende una sinusoidale di ampiezza unitaria e pulsazione  $\omega$ , si aspetta il regime permanente, cioè si aspetta che i termini della risposta corrispondente a poli con parte reale negativa tendano a zero.

Una volta ottenuto il regime permanente si ottiene una risposta che è ancora una sinu-

soide, della stessa pulsazione  $\omega$  (fatto importante), mentre l'ampiezza e la fase cambiano. L'ampiezza e la fase sono legati al modulo della funzione  $W(j\omega)$ , la risposta armonica del sistema.



### Sistema di controllo a retroazione

Supponiamo che quello che è nella "scatola" sia un sistema elementare a retroazione, con una funzione  $F(s)$  sul ramo diretto e una retroazione unitaria.

La funzione di trasferimento ingresso-uscita  $W(s)$  è riportata a lato. A regime permanente l'uscita  $y$  è un'altra senoide, di stessa pulsazione  $\omega$ , che potrebbe essere di ampiezza diversa, e di fase diversa (notare che la senoide non parte dall'origine). L'ampiezza  $M$  e la fase  $\varphi$  legata all'eventuale

sfasamento, sono modulo e fase della funzione  $W(j\omega)$  calcolata per la  $\omega$  di ingresso.

La funzione di trasferimento tra riferimento e errore  $W_e(s)$  è anch'essa riportata a lato.

La risposta in "e" è l'andamento dell'errore. In regime permanente anche l'errore sarà una quantità sinusoidale e l'ampiezza di questo errore sarà pari all'ampiezza della funzione  $W_e(s)$ .

Se abbiamo la funzione di ingresso-uscita si può trovare per differenza la funzione di errore.

Se abbiamo la funzione di trasferimento ingresso-errore per somma si può determinare la funzione ingresso-uscita.

Per proseguire l'analisi concentriamoci dunque su una delle due: la funzione di trasferimento di errore.

$$W_e(s) = \frac{1}{1+F(s)}$$

se  $y_{ref}(t) = \sin \omega t$   
 in reg. perm.

$$e(t) = \left| \frac{1}{1+F(j\omega)} \right| \sin \left( \omega t + \angle \frac{1}{1+F(j\omega)} \right)$$

Se il segnale di riferimento è una senoide di pulsazione  $\omega$  allora in regime permanente l'errore  $e(t)$  è una senoide di ampiezza  $W_e(j\omega)$ , cioè l'ampiezza della funzione  $W_e(s)$  nel punto  $s = j\omega$ .

Questo è quello che succede per quanto riguarda l'errore, quando abbiamo un sistema di controllo a retroazione con una certa funzione di trasferimento ad anello aperto  $F(s)$  con una senoide in ingresso, a regime permanente.

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + F(s)}$$

se  $y_{ref}(t) = \sin \omega t$   
in reg. perm.

$$|e(t)| \leq \left| \frac{1}{1 + F(j\omega)} \right|$$

ampiezza dell'errore

Quello che interessa nella formula è l'ampiezza, ovvero l'espressione nel modulo.

L'errore sarà inevitabilmente una quantità sinusoidale in quanto lo è l'ingresso, quello che interessa è che l'errore non sia troppo grande, quindi si va a vedere l'ampiezza. Per certi istanti l'errore sarà non nullo in conseguenza del fatto che la sinusoide passa per lo zero.

L'errore sarà dunque minore o uguale all'ampiezza.

Il massimo valore dell'errore è pari all'ampiezza.

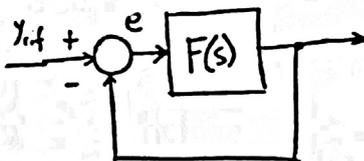
La formula sopra è molto importante perché lega l'andamento dell'errore nel tempo alla funzione di trasferimento ad anello aperto.

### Risposta a regime permanente a ingressi sinusoidali

$$|e(t)| \leq |W_e(j\omega)| = \frac{1}{|1 + F(j\omega)|}$$

$$\left| \frac{1}{1 + F(j\omega)} \right| \text{ piccolo}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} S(j\omega) = 1$$

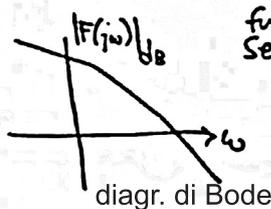


$$W_e(s) = \frac{1}{1 + F(s)} = S(s)$$

↑  
funzione di sensibilità

se  $y_{ref}(t) = \sin \omega t$   
in reg. perm.

$$|e(t)| \leq \left| \frac{1}{1 + F(j\omega)} \right|$$



Funzione di sensibilità

Da un sistema a retroazione vorremmo avere una grande precisione, quindi un piccolo errore, quindi una quantità  $|1/(1 + F(j\omega))|$  piccola.

Questa funzione, la funzione di trasferimento di errore (tra ingresso ed errore), viene anche chiamata funzione di sensibilità,  $S(s)$ , per un motivo che vedremo avanti.

Abbiamo a che fare con dei sistemi in cui il modulo della funzione  $F$  tende a zero al tendere di  $\omega$  all'infinito, quindi la funzione ha un numero di poli superiore al numero degli zeri.

Al tendere di  $\omega$  all'infinito, la funzione  $|1/(1 + F(j\omega))|$  tende a uno.

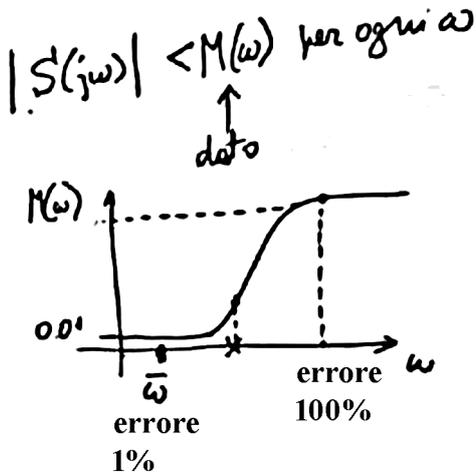
Tale valore non è piccolo in quanto corrisponde esattamente al legame tra ingresso e uscita che si vuole avere.

Il voler avere un valore piccolo implica una discussione in termini di frequenze sulle quali vogliamo avere una sensibilità piccola.

A frequenze molto elevate dobbiamo accettare un errore che tende ad un'ampiezza unitaria, perché questo fa parte dello schema.

Infatti a frequenze molto elevate il segnale tende ad avere lo stesso valore tra ingresso, il riferimento, e l'errore.

L'ingresso passa inalterato e diventa tutto errore, il blocco attenua e non passa nulla. Questo è un limite fisico inerente alla struttura a retroazione che non è possibile modificare.



La specifica che ci conviene imporre per quanto riguarda il comportamento in regime permanente di ingressi sinusoidali è quella, ad esempio, di imporre una sensibilità minore di un certo valore per ogni pulsazione. Ma non tutti i valori sono possibili, ad esempio 0.1 non lo è. Dunque si fornisce un dato del tipo  $M(\omega)$ .

Il dato fornito è un limite superiore all'errore, oppure alla sensibilità, oppure alla risposta armonica ingresso-errore, tutti modi equivalenti di definire il dato.

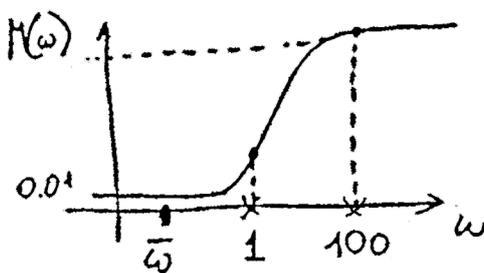
Nel fornire tale limite superiore dobbiamo tenere presente che ci sono delle limitazioni fisiche.

La  $M$  deve tendere ad uno, ed essere anche un po' più grande, quando  $\omega$  tende all'infinito.

Un esempio è riportato nel diagramma naturale a lato. La funzione  $M$  è piccola per un certo intervallo di frequenze, poi sale e tende a uno oppure a qualcosa un po' più grande di uno. Questa in pratica rappresenta una maschera sotto la quale si vuole che sia collocata la funzione di sensibilità.

Nella pratica non si chiede mai una risposta armonica minore di un numero secco, ma si richiede che sia minore di una certa quantità, in genere piccola basse frequenze e unitaria a frequenze elevate.

Prendendo ad esempio un valore di  $\omega$  in un certo punto, l'errore a regime permanente della sinusoidale sarà pari a 0.01 (dall'esempio) volte l'ingresso, ovvero sarà pari all'1%. L'errore ad un certo punto diventa del 100%, ma per questo non c'è nulla da fare.



$$|M(\omega)| = \frac{|j\omega + 1|}{|j\omega + 100|}$$

$$M(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 100)}$$

Per facilitare i conti una maschera del genere può essere scritta sotto forma di funzione razionale.

La sua forma ricorda una funzione che ha un guadagno, uno zero, ed un polo. Ne possiamo tracciare il modulo,  $|M(\omega)|$ .

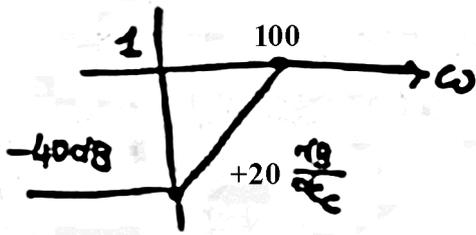
Fissiamo dei numeri al fine di scrivere tale funzione.

Fissando la pulsazione in cui la frequenza comincia a salire, al valore 1, questo vuol dire che ci sarà uno zero nel punto 1, per cui la funzione avrà al numeratore  $s + 1$ .

Quando  $s$  tende all'infinito vogliamo che la funzione tenda a 1 (concetto di polo).

Il valore della funzione quando  $s$  tende all'infinito è il rapporto tra il coefficiente della potenza più elevata di  $s$  al numeratore con la potenza più elevata di  $s$  al denominatore, quindi al denominatore ci deve essere  $s +$  qualcosa, ad esempio 100.

Quindi la funzione  $(s + 1)/(s + 100)$  estrapola in qualche modo l'andamento del diagramma, infatti ha un valore finale di 1, un valore iniziale di  $1/100$ .



Tracciamone il diagramma di Bode: fino al valore  $\omega = 1$  ci sarà un valore costante pari a -40 decibel (dB).

Poi la funzione tende a salire con frequenza +20 dB per decade, poi rimane costante una volta che la frequenza ha raggiunto il valore 100.

$$|S(j\omega)| < M(\omega) \text{ per ogni } \omega$$

oppure nella forma

$$|S(j\omega)W_1(\omega)| < 1 \text{ per ogni } \omega$$

specifica sulla precisione  
- performance -

È usata la lettera W in quanto è una funzione che pesa la sensibilità.

Notiamo che il peso è molto elevato (40 dB) alle frequenze basse. Quindi a certe frequenze si dà alla sensibilità una grande importanza, cioè una importanza grande agli errori. Ad altre si dà una importanza unitaria.

Moltiplicando la funzione di sensibilità per la funzione peso si vuole avere una funzione di sensibilità pesata che sia sempre minore di 1.

Questa è la specifica sulla precisione espressa in termini della risposta a regime permanente e viene anche detta specifica di performance, oppure fedeltà di risposta.

### Ulteriore modo di caratterizzare la precisione

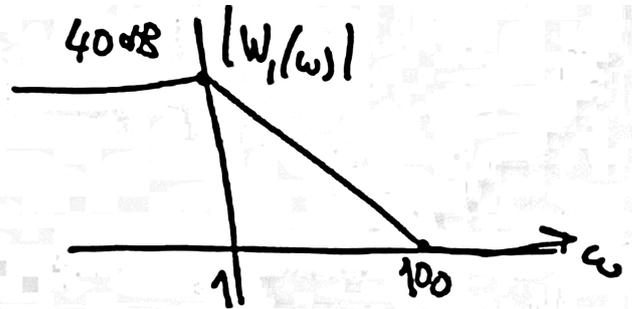
$$|SW_1| < 1 \text{ per ogni } \omega$$

ove  $S = \frac{1}{1+F}$ ,  $W_1 =$  funzione peso

A lato la specifica che vogliamo, in due forme.

La seconda forma è equivalente alla prima, definendo  $W_1(\omega) = M^{-1}(\omega)$ .

Nel diagramma di Bode, facendo l'inverso di una funzione, i moduli cambiano di segno; di seguito tale diagramma per la funzione  $W_1$ .



## Riepilogo

- **risposta a regime permanente (ingressi polinomiali)**

- **risposta transitoria (ingresso a gradino)**

- **risposta in frequenza**

Riepilogando, abbiamo visto tre modi di caratterizzare la risposta transitoria di un sistema.

Un primo modo è stata la risposta a regime permanente a ingressi poli nominali; questa modalità ci ha permesso di introdurre il concetto di tipo di sistema. Dalla definizione di tipo di sistema si vede che esso si comporta tanto meglio, cioè con errori nulli in corrispondenza di ingressi via via sempre più difficili da inseguire (ingressi costanti, a rampa, a parabola),

quanto più il tipo del sistema è elevato. Abbiamo visto che, all'interno di un certo tipo di sistema, acquista importanza il valore dell'errore. Siamo stati capaci di legare sia il tipo del sistema, sia il valore dell'errore ai parametri della funzione che caratterizza il sistema ad anello aperto ovvero la funzione  $F(s)$ .

Un secondo modo di valutare la risposta transitoria è stato quello di riferirci all'ingresso a gradino al sistema stesso. In questo modo la risposta dipende in maniera abbastanza complicata dai parametri del sistema. Nel caso di un sistema del secondo ordine è stato facile vedere con dei grafici fatte al computer come la collocazione dei poli sul piano complesso influenza la risposta del sistema stesso. In generale questo è più difficile, e, per aiutarci, abbiamo introdotto i concetti di tempo di salita e quello di sovravelongazione che riassumono in maniera sintetica e rapida la bontà del transitorio in un senso molto generico e abbastanza empirico.

Il terzo approccio alla valutazione della risposta transitoria è stato quello della risposta in frequenza. Abbiamo visto come un modo di tener conto di come un sistema risponde a qualsiasi frequenza in una certa banda è quello di imporre che la sensibilità pesata, secondo una certa funzione  $W$ , sia minore di 1 per tutti i valori della frequenza. Il peso deve essere dato, esso dipende sia da vincoli che ci possono essere nel sistema, ad esempio il fatto che il peso deve tendere a 1 quando la frequenza tende all'infinito, sia da particolari problemi che ci possono essere, ad esempio quello per cui certe frequenze devono essere attenuate in un certo modo, di una certa quantità più o meno elevata.

Seguono alcune interpretazioni grafiche.

$$\boxed{|S'(j\omega)W_1(\omega)| < 1 \text{ per ogni } \omega}$$

Questa è la specifica che vogliamo, riguardante la fedeltà di risposta, riguardante la precisione.

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + F(j\omega)}$$

$$\left| \frac{W_1(\omega)}{1+F(j\omega)} \right| < 1 \quad \text{per ogni } \omega$$

$$|W_1(\omega)| < |1+F(j\omega)|$$

La caratteristica che si vuole è riportata a lato. Sono tutti semplici rimescolamenti delle formule, ma ogni rimescolamento fornisce un nuovo punto di vista che permette di acquisire un nuovo risultato.

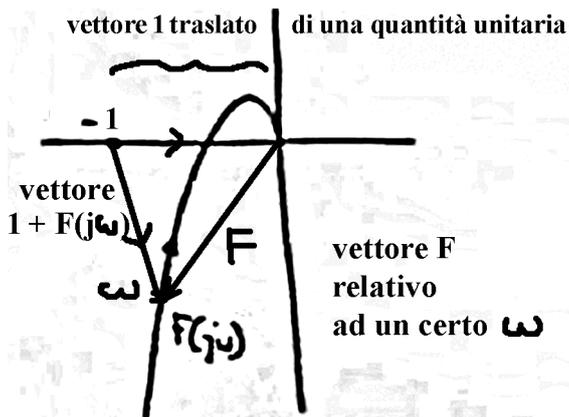


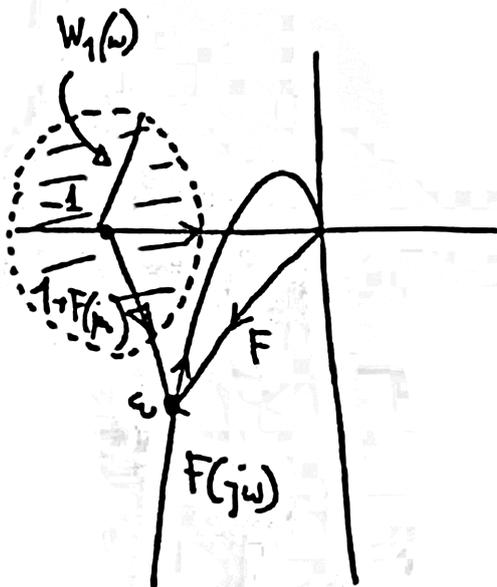
diagramma di un sistema stabile

Tracciamo il diagramma di un sistema stabile, pensando quindi che ci sia un polo nell'origine (presente di suo o aggiunto tramite controllore) e un paio di poli reali.

Il vettore  $F$  è il vettore che, per ogni  $\omega$ , congiunge l'origine con un punto lungo la curva.

Il vettore  $1+F(j\omega)$  è quello che chiude il triangolo con il vettore  $F$  e il vettore unitario.

L'imposizione implica che il vettore  $1+F(j\omega)$  sia maggiore di  $W_1(\omega)$ .

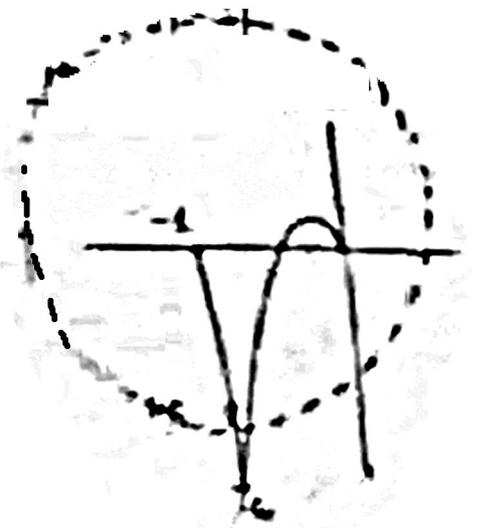


Questo significa che tracciando un cerchio di centro  $-1$  e di raggio  $W_1(\omega)$ , il valore del vettore  $1+F$  corrispondente a tale  $\omega$  non deve entrare nel cerchio.

È come se il cerchio fosse proibito per quel valore di  $\omega$ , e per ogni altro  $\omega$ .

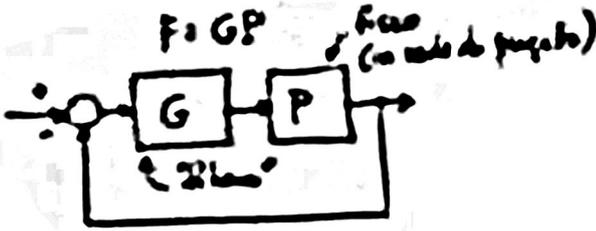
A destra, il vettore  $1+F$ , in una nuova  $\omega$ , deve essere più grande del corrispondente  $W_1$ , e questo vuol dire che il cerchio che si può ammettere a questa frequenza è più elevato, o viceversa, ovvero che il peso può essere più elevato a questa frequenza e quindi il vettore deve essere più grande.

Questo è in sostanza l'interpretazione grafica della specifica della sensibilità.



□

Prof. Alberto Isidori  
41'04"

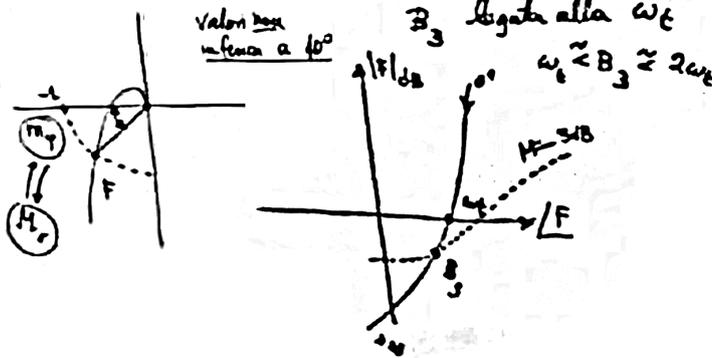


Nella lezione scorsa abbiamo visto che nell'approccio più elementare alla progettazione di un sistema di controllo, le specifiche riguardanti la robustezza dal punto di vista della stabilità e la precisione vengono riassunte sinteticamente in due caratteristiche, ovvero il margine di fase che tiene conto della

robustezza dal punto di vista della stabilità, e la banda passante  $B_3$ , legata alla pulsazione di attraversamento, che riesce in qualche modo ad esprimere le proprietà di precisione.

'Sintesi' di  $G(s)$

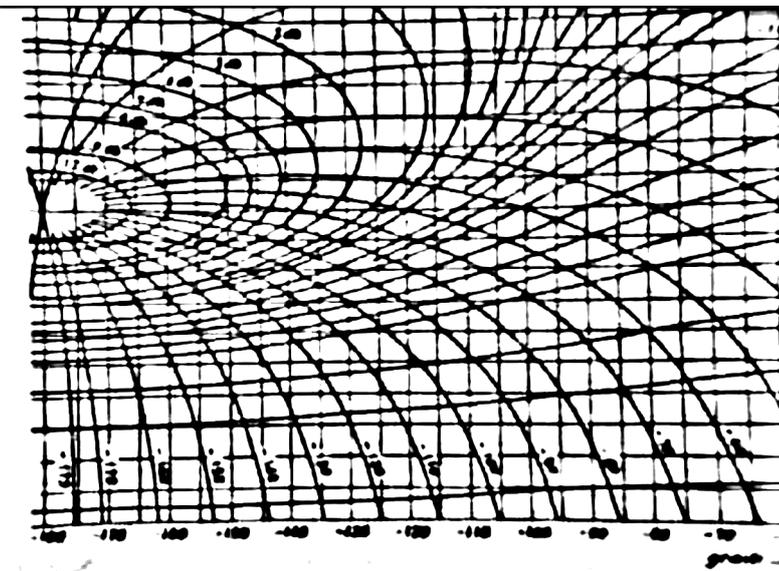
$|W_0 W_2| < 1$  specifica sulla stabilità robusta



Queste grandezze sono legate ad altre grandezze che caratterizzano la risposta, da tenere presente perché non esprimono soltanto la robustezza nella stabilità e la risposta armonica.

Abbiamo visto come il margine di fase, studiando la carta di Nichols, sia legato al modulo alla risonanza che è una

quantità caratteristica della risposta armonica ingresso-uscita del sistema.



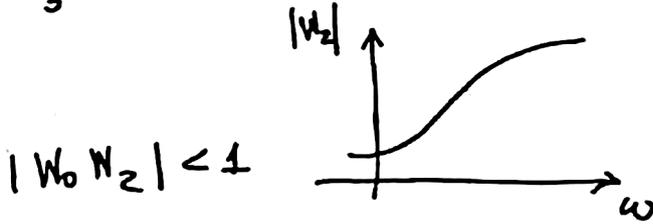
Dalla carta di Nicholson riportata si può notare che per un margine di fase di  $40^\circ$ , il che corrisponde ad osservare la linea  $-180^\circ$  e spostarsi fino a  $-140^\circ$  e poi andare a vedere l'attraversamento con la linea a 0 decibel, il punto si trova collocato tra il luogo a modulo costante relativo ai 3 decibel e il luogo a modulo costante relativo a 4 decibel.

L'uso della carta di Nicholson è quello di stabilire legami tra modulo di risonanze e margine di fase. In questo caso ci accorgiamo che se il margine di fase è intorno ai  $40^\circ$  ci

aspettiamo che il modulo a risonanza sia compreso tra 4 e 3 decibel, che è un valore abbastanza ragionevole perché un modulo a risonanza a 3 dB ci dice che le frequenze non vengono amplificate di più di 3 dB.

Il margine di fase è quindi una quantità che tiene presente sia il requisito di robustezza della stabilità, ma anche il requisito di una certa precisione nella risposta in frequenza.

$B_3$  requisito abbastanza "rigido"



$|W_0 W_2| < 1$

$B_3$  legata alla  $\omega_t$   
 $\omega_t \approx B_3 \approx 2\omega_t$

Questa è una delle caratteristiche che vogliamo assicurare al sistema di controllo.

L'altra caratteristica è la frequenza di attraversamento che è una quantità prossima alla banda passante.

Il margine di fase deve essere un numero abbastanza fisso, intorno a  $40^\circ$ .

Anche la banda passante,  $B_3$ , deve sottostare ad un requisito abbastanza rigido.

Il peso  $W_2$ , che pesa l'incertezza del modello, cresce all'aumentare della frequenza, quindi, volendo mantenere il prodotto  $W_0 W_2$  minore di uno, la quantità  $W_0$ , alle alte frequenze, deve tendere a diminuire.

Questo vuol dire che la banda passante non deve essere superiore ad un certo valore. Se la banda passante è troppo grande potrebbe darsi che certe incertezze ad alta frequenza distruggano la stabilità del sistema.

'Sintesi' di  $G(s)$

|              |   |       |
|--------------|---|-------|
| tipo         | 0 | 1     |
| errore $e_0$ |   | $e_1$ |
| $m_q$        |   |       |
| $\omega_t$   |   |       |

Il problema della "sintesi" di  $G(s)$ , nella sua accezione più semplice, è quello di trovare  $G(s)$  in modo che il sistema abbia un certo tipo (normalmente 1, ma anche 0), abbia un certo errore, abbia un certo margine di fase e una certa frequenza di attraversamento.

'Sintesi' di  $G(s) = \frac{K_G}{s}$

|              |   |                           |
|--------------|---|---------------------------|
| tipo         | 0 | 1                         |
| errore $e_0$ |   | $e_1 = \frac{1}{K_G K_P}$ |
| $m_q$        |   |                           |
| $\omega_t$   |   |                           |

Una volta fatta la scelta di  $G(s)$  possiamo andare a vedere come sono fatte tutte le funzioni che ci interessano, in particolare possiamo andare a vedere come sono fatte le due funzioni principali.

Una è la funzione di trasferimento ingresso-uscita  $W_0$  e l'altra la funzione di sensibilità  $S_0$ .

Queste sono le funzioni che caratterizzano in maniera più sistematica e più razionale le proprietà di stabilità robusta e di precisione robusta.

Le specifiche riguardanti il tipo e l'errore sono rigide, esse specificano in maniera univoca le caratteristiche di  $G(s)$ .

Se il processo  $P$  non ha poli nell'origine e si vuole avere un sistema di tipo 1 allora  $G(s)$  dovrà avere un polo nell'origine, e quindi dovrà avere un fattore  $1/s$ .

Stabilito che il sistema è di tipo 1, volendo avere un errore  $e_1$ , si dovrà imporre un certo guadagno  $K_G$  alla funzione  $G(s)$ .

Il fattore  $K_G/s$  corrisponde in maniera precisa e biunivoca all'ottenimento di un sistema del tipo 1 con errore  $e_1$ .

'Sintesi' di  $G(s) = \left(\frac{K_G}{s}\right) R(s)$

|            |       |                           |
|------------|-------|---------------------------|
| * tipo     | 0     | 1                         |
| * errore   | $e_0$ | $e_1 = \frac{1}{K_G K_P}$ |
| $m_q$      |       |                           |
| $\omega_t$ |       |                           |

$$W_0 = \frac{GP_0}{1+GP_0}$$

$$S_0 = \frac{1}{1+GP_0}$$

Cerchiamo ora di stabilire se ci sono altri fattori,  $R(s)$ . Questi altri fattori sono aggiuntivi, essi devono essere introdotti per soddisfare le altre specifiche, che peraltro possono anche non servire in quanto le altre specifiche possono essere già soddisfatte da  $K_G/s$ . Cosa che in pratica non si verifica.

Non si verifica perché volendo avere un errore basso significa avere un guadagno  $K_G$  elevato, ma questo implica instabilità.

$$F(s) = R(s) \underbrace{\left(\frac{K_G}{s}\right)}_{G(s)} \cdot P(s)$$

La funzione di trasferimento ad anello aperto sarà  $F(s)$ , mostrata a lato.

Si può inglobare in un unico termine della funzione tutto escluso  $R(s)$ , in quanto tale termine rappresenta le scelte elementari. Il termine può essere chiamato  $P'(s)$  o  $F'(s)$ .

$$F(s) = R(s) \underbrace{\left(\frac{K_G}{s}\right) \cdot P(s)}_{G(s)} = R(s) \begin{matrix} P'(s) \\ F'(s) \end{matrix}$$

Ora occorre scegliere  $R(s)$  in maniera tale da soddisfare le specifiche sulla banda passante e sul margine di fase.

la più semplice

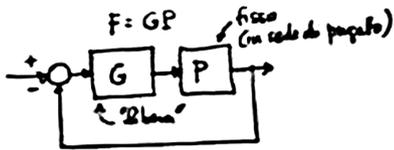
$$R(s) = K_R \frac{s+z}{s+p}$$

La funzione  $R(s)$  più semplice è quella mostrata a lato, con dei poli e degli zeri. In questo caso un polo e uno zero.

Gli zeri producono un anticipo di fase e sono benefici per quanto riguarda la stabilità.

Si aggiunge un polo per ottenere la funzione propria, realizzabile fisicamente.

Si aggiunge un fattore di guadagno  $K_R$  per tener presente che l'introduzione della funzione  $R$  nel sistema deve essere tale da non alterare le scelte già fatte. Poiché conviene che la funzione  $K_R$  abbia guadagno unitario, si mette al suo posto



la più semplice

$$R(s) = \frac{p}{z} \frac{s+z}{s+p}$$

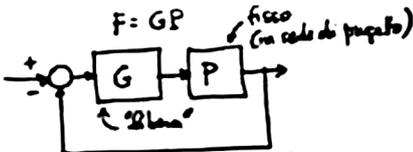
compensatrice  
z ≠ 0 p ≠ 0

un fattore P/z, in quanto la funzione R nel punto 0 vale 1,  $R(0) = 1$ .

Tale funzione si chiama correttiva o compensatrice.

Questo per far sì che la funzione  $R(s)$  non abbia né poli né zeri nell'origine.

Vediamo ora un certo numero di situazioni su come scegliere i parametri di questa funzione R in modo da ottenere i risultati desiderati.



Occorre anticipare le fasi:

la più semplice

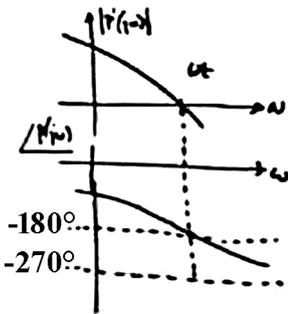
$$R(s) = \frac{p}{z} \frac{s+z}{s+p}$$

compensatrice  
z ≠ 0 p ≠ 0

La prima è quella in cui occorre anticipare le fasi.

Si deve fare in modo che alla pulsazione di attraversamento la fase non sia  $-180^\circ$  ma sia, ad esempio,  $-140^\circ$ , perché in questo caso il margine di fase sarà di  $40^\circ$ .

Per fare questo si usa una funzione cosiddetta anticipatrice  $R_a(s)$ , che si usa scrivere in forma normalizzata come mostrato in figura.



$$\phi = -140^\circ$$

$$(m_p = 40^\circ)$$

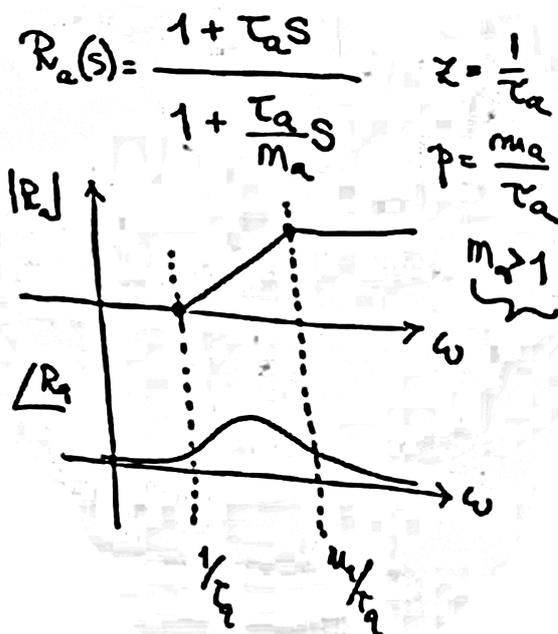
$$R_a(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a s}{m_a}}$$

$$z = \frac{1}{\tau_a}$$

$$p = \frac{m_a}{\tau_a}$$

funzione anticipatrice

In essa  $m_a$  è una costante di tempo relativa allo zero,  $z = 1/\tau_a$ .

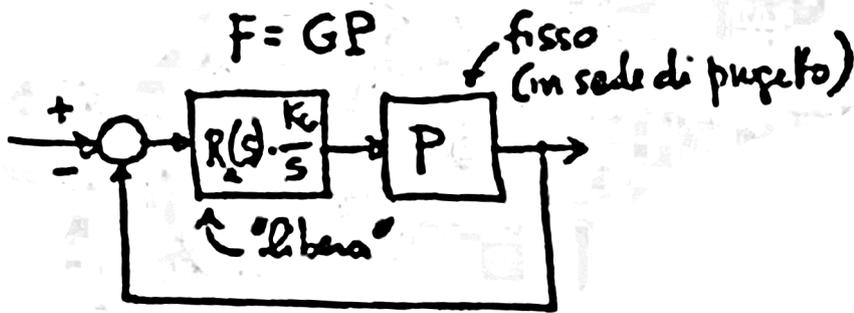


Andamento moduli e fasi della funzione  $R_a(s)$ .

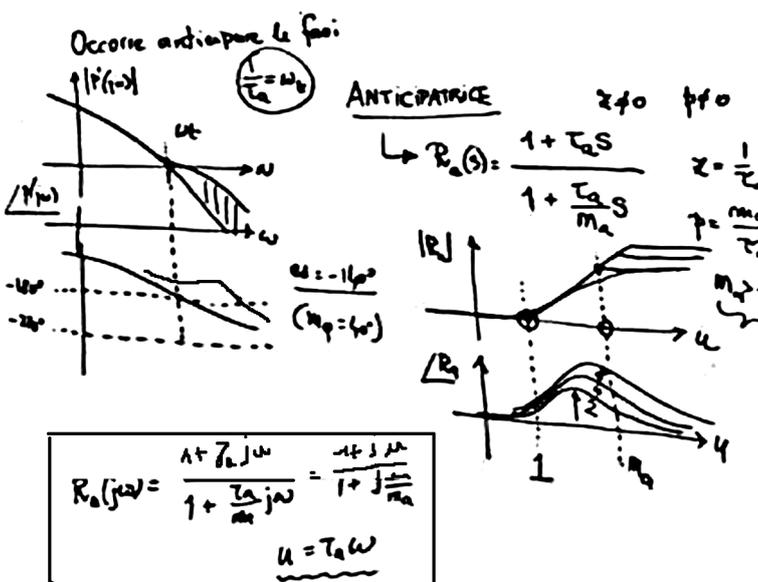
Tale funzione si chiama anticipatrice.

La funzione si chiama anticipatrice perché il suo ruolo è quello di anticipare le fasi, quello di aumentare le fasi, infatti le fasi sono tutte positive.

Nell'introdurre tale funzione nel sistema, occorre sommare i diagrammi di Bode relativi al sistema con quelli relativi alla funzione.



Quello che si ottiene sono i diagrammi della funzione compensata, il sistema in cui c'è la G, e la P con i fattori già definiti in precedenza.



Famiglie di curve, diverse, che dipendono da  $m_a$ .

Sono normalizzate.

Inoltre diagrammi finali, fatta una scelta, quella di collocare il punto di rottura in corrispondenza della pulsazione  $\omega_t$ .

Quello che succede è che la fase è aumentata e la pulsazione di attraversamento non è rimasta quella di prima, ma è passata ad un valore leggermente superiore, dovuto all'incremento, valore che potrebbe essere abbastanza vicine.

Il margine di fase è tale per cui le fasi risultano abbastanza distanti da  $-180^\circ$ . La distanza potrebbe essere quella auspicabile di  $40^\circ$ .

La funzione definita consente di aumentare le fasi e porta il fenomeno dell'aumento dei moduli, che fa sì che la pulsazione di attraversamento si sposti, in generale verso destra. Giocando sui parametri si può fare in modo che l'aumento dei moduli sia contenuto e l'aumento delle fasi sia del valore desiderato.

In questa operazione è critico scegliere  $\frac{1}{T_a} = \omega_t$

Questo intervento può dare risultati positivi se si vuole aumentare le fasi ma non occorra variare la pulsazione di attraversamento  $\omega_t$ .

Esempio  
 (in caso di progetto)  $P(s) = \frac{1}{(0.1s+1)(0.01s+1)}$   
 Vogliamo tipo 1,  $e_1 = 0.01$   
 fase:  $e_1 = \frac{1}{k_0 K_p} = 0.01$   
 ANT  $\rightarrow$   $K_a(s) = \frac{1 + \tau_a s}{s}$

Un esempio.

Il processo ha due poli e nessuno zero, il guadagno è unitario.

Vogliamo un sistema di tipo 1 con un errore  $e_1 = 0.01$ .

Queste sono in sostanza le specifiche, quelle definite specifiche rigide, che determinano in maniera univoca i parametri della funzione compensatrice.

Volendo un sistema di tipo 1, il sistema ad anello aperto deve avere un polo nell'origine; la funzione  $P(s)$  non ha poli nell'origine, quindi deve avere la funzione  $G$ , nella quale si deve dunque essere il fattore  $1/s$ .

Sappiamo che l'errore  $e_1 = 1/K_G K_p$ . Quindi poniamo  $e_1 = 0.01$ .

Il processo scritto come esempio ha un guadagno unitario, quindi  $K_p = 1$ .

Questo implica che  $K_G = 100$ .

Possiamo dunque scrivere la funzione  $P'(s)$ .

Possiamo dunque scrivere la funzione  $P'(s)$ .

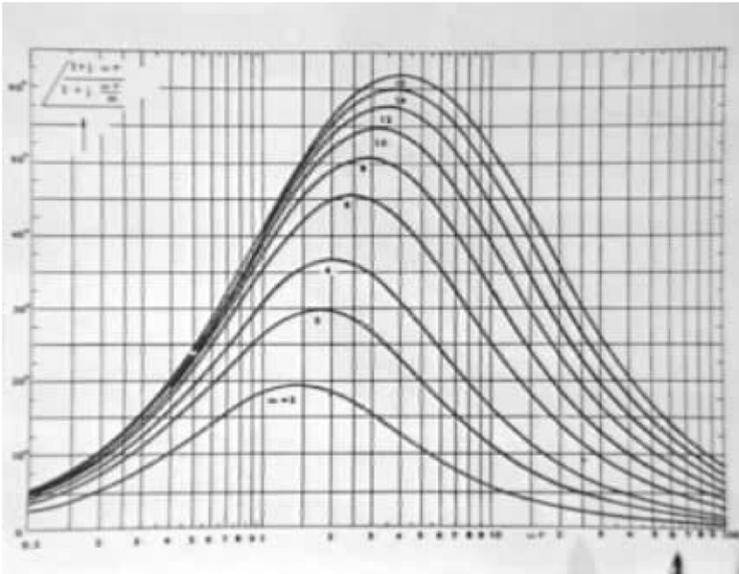
F: GP  
 fase (in caso di progetto)  $P(s) = \frac{1}{(0.1s+1)(0.01s+1)}$   
 Vogliamo tipo 1,  $e_1 = 0.01$   
 $e_1 = \frac{1}{k_0 K_p} = 0.01$   $K_G = 100$   
 $\Downarrow$   
 $P'(s) = \frac{100}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$

Procedendo della sintesi si deve andare a vedere se sono soddisfatte le specifiche, in particolare quella sulla pulsazione di attraversamento  $\omega_t$  e quella sul margine di fase  $m_\phi$ . Supponiamo un margine di fase intorno ai  $40^\circ$  e vediamo come scegliere la funzione anticipatrice.

Si verificano i diagrammi di Bode e si verifica quale è  $\omega_t$  e, sulla base di questo valore, si deve vedere qual è l'anticipo che si vuole ottenere.

Il valore del margine di fase determina il valore della quantità  $m_a$ .

Le funzioni anticipatrici sono riportati su diagrammi universali. In ascissa hanno la pulsazione normalizzata. per un valore 1 si nota quanta fase viene aumentata.



Funzioni anticipatrici.

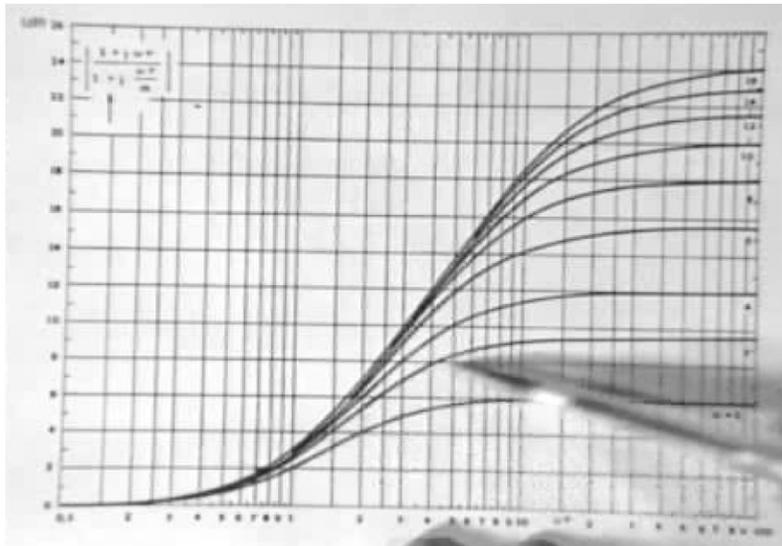


Diagramma dei moduli

□

Prof. Alberto Isidori  
41'08"

Scelta dei parametri della funzione anticipatrice, mediante l'uso di MathLab, in riferimento all'esempio della scorsa lezione.

Si studia il caso in cui si vuole aumentare il margine di fase senza aumentare la pulsazione di attraversamento.

Una volta calcolati i diagrammi di Bode, la loro analisi permette la valutazione degli interventi da effettuare. La prima cosa è vedere dove si trova la pulsazione di attraversamento, ovvero dove il modulo vale zero. Approssimativamente nel diagramma è intorno al valore 30. Quindi  $\omega_t = 30$ .

In corrispondenza non c'è margine di fase in quanto, scendendo nel diagramma di fase, la fase è  $-180^\circ$ . Quindi il margine di fase è zero.

Per questa ragione, ipotizzata anche sulla lavagna, si deve intervenire.

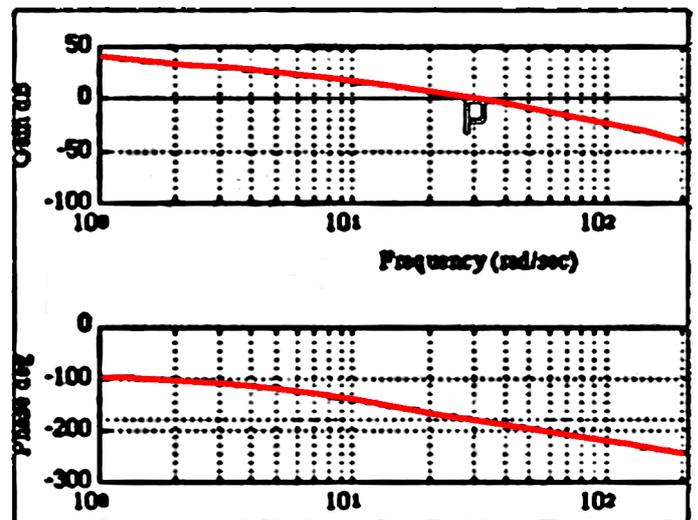
```

% PROCESSO P
%
%
%          100
% P(s) = -----
%          s(0.1s+1)(0.01s+1)
%
%
numP=[100];
denP=conv([1,0],conv([0.1, 1],[0.01, 1]));

%1=logspace(0,3,100);

% DIAGRAMMA DI BODE P
pause
    
```

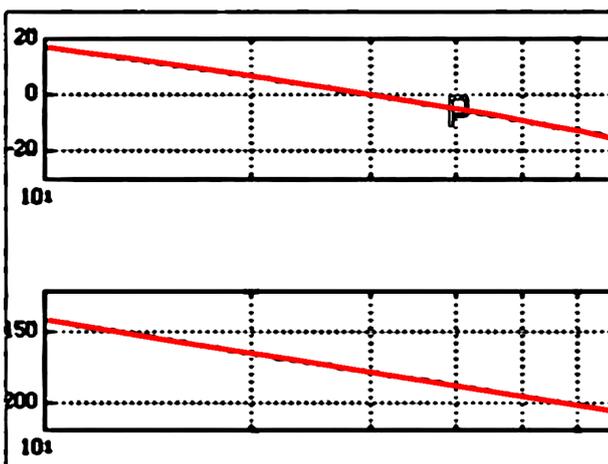
Per farlo nel migliore dei modi si effettua uno zoom nella zona di interesse con una apposita istruzione, prendendo l'intervallo che passa da 10 a 100.



% ZOOM ZONA DI INTERESSE

```

%2=logspace(1,2,100);
pause
    
```

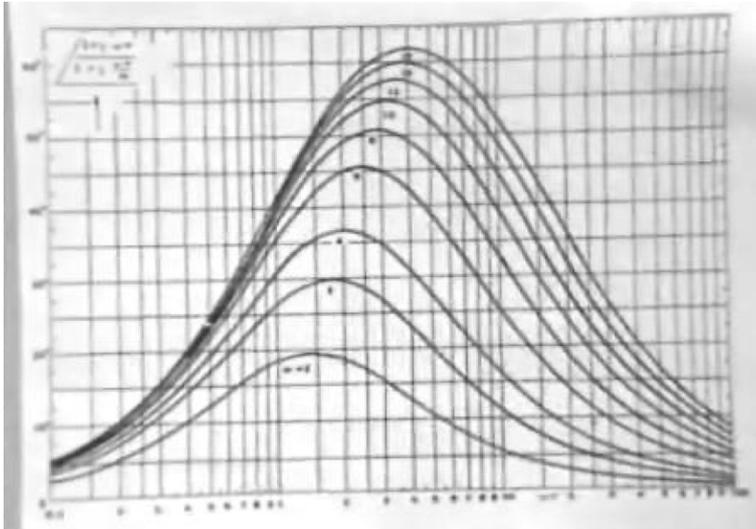


Dal-

lo zoom si nota che i moduli vanno da +20 a -20, le frequenze vanno da 10 fino a 100.

La  $\omega$  di attraversamento è 30. Per sapere quanto anticipare, visto che sul diagramma delle fasi la fase è  $-180^\circ$ , volendo avere un margine di fase di  $40^\circ$ , si deve aumentare almeno di  $40^\circ$ , tenendo presente che la  $\omega$  di attraversamento si sposterà verso destra.

Dobbiamo determinare i valori di  $m_a$  che determinano un aumento di  $40^\circ$ .

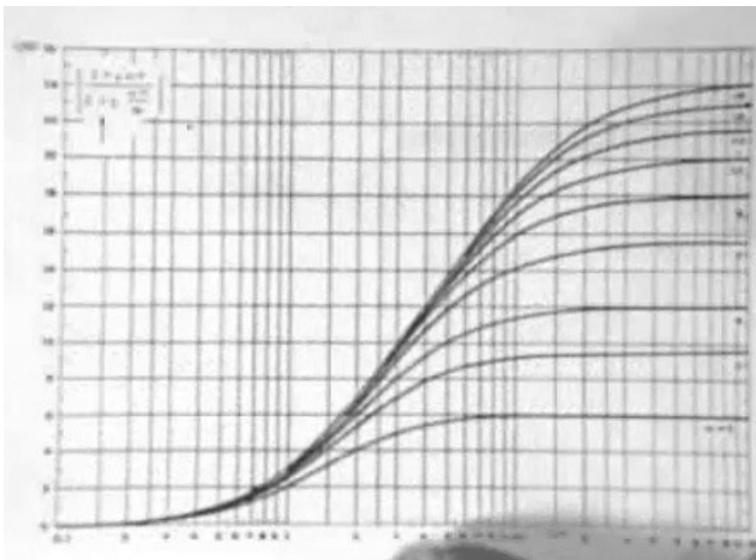


Per fare questo occorre riprendere la curva di anticipi di fase visti nel finale della scorsa lezione.

Si va a prendere  $1/\tau_a = \omega_t$ , con  $\omega_t = 30$ , nel nostro caso.

Si raggiunge  $40^\circ$  quando  $m$  è abbastanza elevato, superiore a 10. Prendere 12, 14 dà poca variazione in quanto le fasi si addensano.

Come primo tentativo si decide di prendere  $m_a = 12$  e  $1/\tau_a = 30$ , per rispettare quella regola empirica di prendere  $1/\tau_a = \omega_t$ .

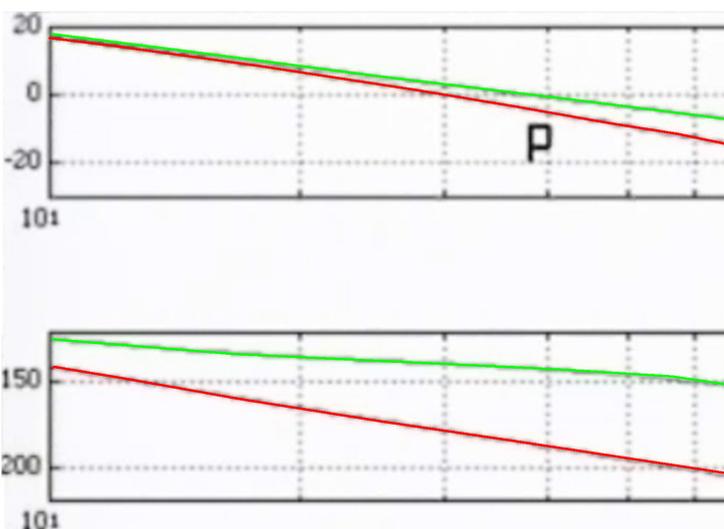


Quello che succede ai moduli facendo la scelta di  $m_a = 12$  è di aumentare di 3 decibel, che non sono pochi.

**X SCELTA CONTROLLORE C: FUNZIONE ANTICIPATRICE** La funzione anticipatrice è definita come riportata in figura a lato, con i valori di  $\tau_a$ ,  $m_a$ , numeratore e denominatore della funzione stessa.

```
tau=1/30;
ma=10;
numC=[tau, 1];
denC=[tau/ma, 1];
```

pause



Applicando la funzione anticipatrice si ottiene il diagramma di Bode (moduli e fasi) della funzione compensata.

Il diagramma rosso rappresenta la funzione non compensata ovvero senza la funzione R, quello verde la funzione compensata.

Nel vecchio diagramma  $\omega_t = 30$ , il margine di fase pressoché nullo.

Nel nuovo diagramma  $\omega_t$  si è spostata verso destra e si trova quasi a 40, il mar-

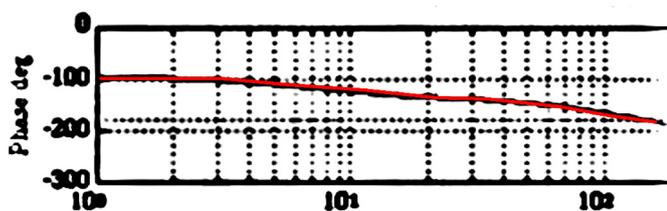
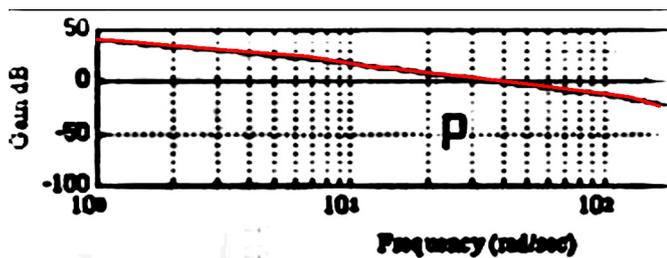
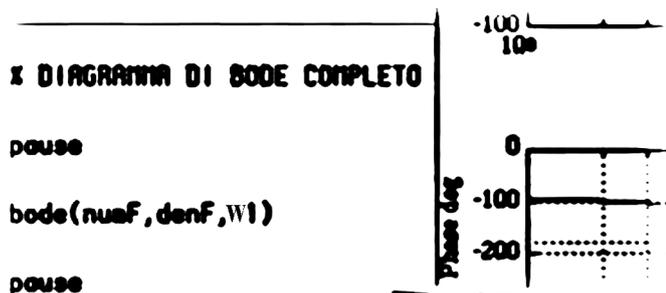
gine di fase presenta una situazione migliorata in quanto in corrispondenza di  $\omega = 40$ , si nota che la fase è al di sopra dei  $-150^\circ$ .

Quindi il margine di fase si avvicina a  $40^\circ$

La conclusione è che la scelta è stata fatta bene.

A questo punto siamo interessati a vedere quanto valgono alcuni parametri, come il modulo alla risonanza, come è fatta la funzione di trasferimento ingresso-uscita, come è fatta la funzione di sensibilità.

In questa maniera otteniamo informazioni complete sul funzionamento del sistema.



```

x DIAGRAMMA DI NICHOLS F(s)=P
pause
ngrid('new')
nichols(numF,denF,w1)
pause
    
```

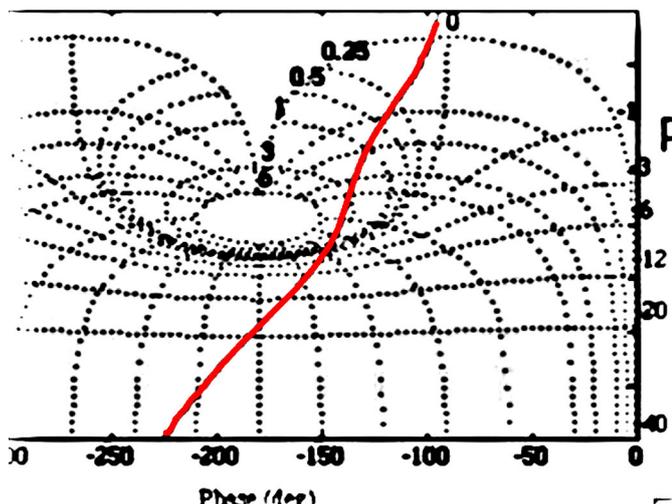


Diagramma di Nichols, da cui ricaviamo informazioni sul margine di fase e del modulo alla risonanza. La curva rossa è la F.

Sono riportati i valori dei luoghi a modulo costante.

Si nota che la curva sorpassa il luogo a 3 dB. Non si avvicina ma si tiene abbastanza lontana dal luogo corrispondente a 6 dB.

Dall'osservazione il modulo alla risonanza è di circa 4 dB.

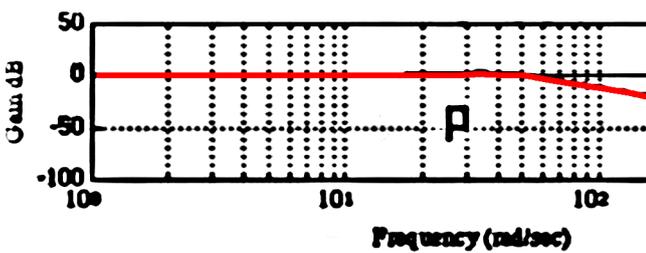
Per vedere il valore della banda passante si calcola il valore della funzione ingresso-uscita.

**X FUNZIONE DI TRASFERIMENTO CICLO CHIUSO**  
**X PROCESSO + CONTROLLORE**

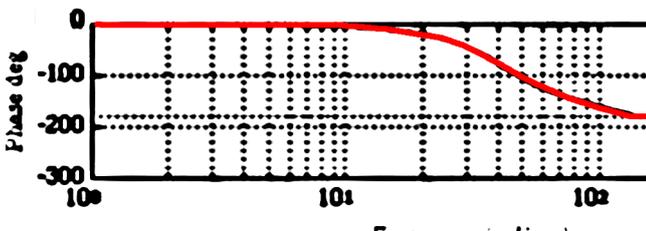
$$U(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

anello chiuso

```
[numU,denU] = cloop(numF,denF,-1);
pause
```



Si noti come la scala dei guadagni sia elevata.  
 La banda passante è sui 50.  
 Questo verifica il fatto che la banda passante si trovi fra la pulsazione di attraversamento e il suo doppio.



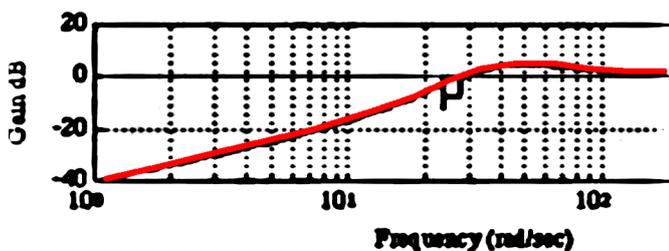
Si noti come ci sia anche una piccola risonanza, di valore non apprezzabile.

**X DIAGRAMMA DI BODE DELLA FUNZIONE**  
**X DI SENSIBILITA'**

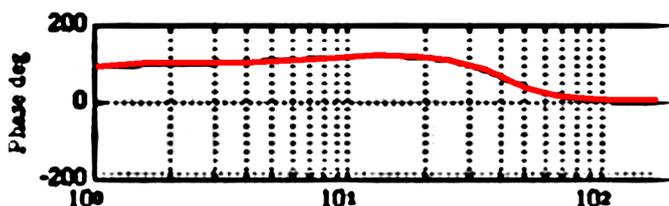
$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)}$$

La funzione di sensibilità fornisce l'errore nella risposta in regime permanente in funzione della frequenza.

```
numS=denF;
denS=denU;
pause
```



Le cose vanno bene nelle frequenze iniziali.  
 Per omega che va da 0 fino a  $8 \cdot 10^0$ , ovvero per valori naturali che vanno da 0 a 8 radianti al secondo, si nota che la funzione di sensibilità assume valori inferiori a -20 dB, che è un fattore di attenuazione pari a 0.1.



Questo vuol dire che c'è un errore a regime permanente inferiore al 10% per tutte le frequenze comprese tra 0 e 8.

Arrivati a frequenza 8 l'errore comincia a diventare maggiore del 10%, continua a salire e addirittura, quando c'è la frequenza  $10^{*}3$ ,  $\omega = 30$ , il modulo vale zero e l'errore è del 100%. Questo è quanto ci dobbiamo aspettare perché la funzione di sensibilità tende a 1 quando  $\omega$  tende all'infinito. Si possono attenuare gli errori solo nella in una banda iniziale di frequenza.

Questo conclude la dimostrazione dell'uso di MathLab per la sintesi per tentativi, ovvero per la scelta dei parametri delle funzioni anticipatrice.

~~~~~

Un nuovo esempio

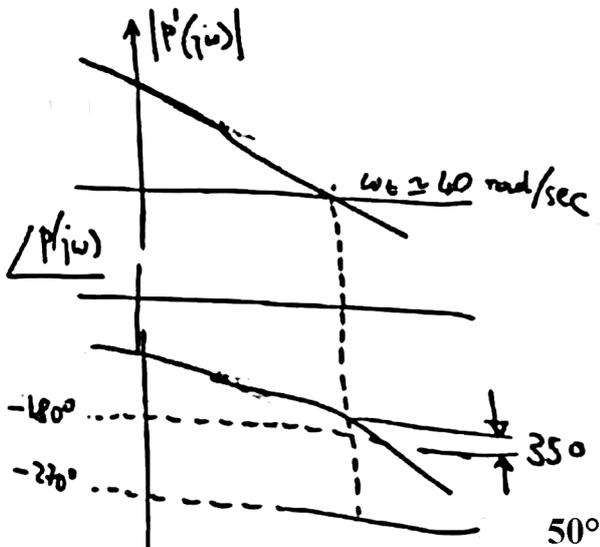
$$m_a = 10$$

$$\frac{1}{\tau_a} = 30$$

$$m_\varphi \approx 35^\circ \quad (M_r \approx 4 \text{ dB})$$

Le scelte fatte, $m_a = 10$ e $1/\tau_a = 30$, portavano ad avere un valore del margine di fase leggermente inferiore a 40° , supponiamo 35° . Il modulo alla risonanza era di circa 4 dB.

Quello che ci chiediamo è se è possibile ritornare su queste scelte al fine di migliorare le cose.



Nel voler spingere il margine di fase non si può agire su m_a in quanto dai diagrammi visti le curve si addensano.

Si può tentare sulla scelta di τ_a .

Ma questo può portare ad effettuare numerosi tentativi prima di trovare il valore ottimo di m_a .

Si può pensare di aggiungere un'altra funzione anticipatrice a quella già trovata.

Quindi nel sistema, oltre alla funzione R_a già scelta, si va ad aggiungere un altro fattore.

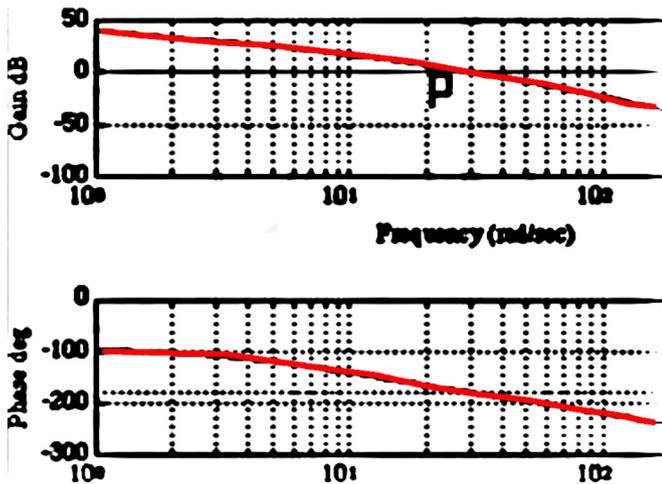
Questa nuova funzione deve modificare

poco i moduli, ma deve modificare in modo interessante le fasi, al fine di ottenere un guadagno di altri 15° e portare il margine di fase a 50° , senza modificare troppo la ω di attraversamento.

Al contrario di prima che si doveva aumentare di 40° , in questo caso l'aumento di 15° , quindi il compito della funzione sarà più "leggero". Si parte, in sostanza, dal valore della fase già buono. È pensabile di assolvere a tale compito con valori di m_a più bassi.

La scelta del nuovo τ_a vicino alla nuova ω di attraversamento.

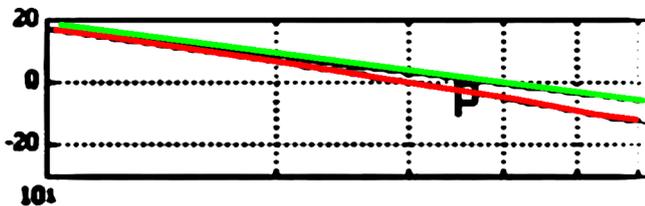
Diagrammi di Bode della prima funzione e della seconda funzione compensatrice.



X PRIMA FUNZIONE ANTICIPATRICE C1

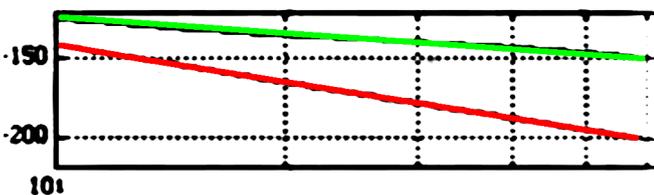
```
tau=1/30;
aa=10;
numC1=[tau, 1];
denC1=[tau/aa, 1];

pause
|
```



X SECONDA FUNZIONE ANTICIPATRICE C2

```
tau2=1/50;
aa2=2;
numC2=[tau2, 1];
denC2=[tau2/aa2, 1];
```



```
numF=conv(numF,numC2);
denF=conv(denF,denC2);
[magF,phaseF]=bode(numF,denF,omega);
magF=20*log10(magF);
```

La scelta del secondo τ_a sarà fatta in base alla regola empirica indicata prima per cui $1/\tau_a$ è uguale alla pulsazione di attraversamento.

Il diagramma verde corrisponde al processo più la prima funzione compensatrice, la nuova pulsazione di attraversamento è di circa 40, quindi nella nuova funzione sarà scelta $1/\tau_a = 40$.

Poiché l'aumento delle fasi è limitato, già trovandosi a -145° e volendo andare a -130° , sarà scelto un valore di m_a abbastanza piccolo, ad esempio 2.

Il diagramma blu rappresenta la somma di quello verde, quello rosso e l'ulteriore funzione compensatrice.

La pulsazione di attraversamento ottenuta è limitata, avendo scelto $1/\tau_a$ uguale alla pulsazione di attraversamento.

Nella zona vicino a 0 dB il diagramma si è modificato poco, 1 o 2 dB.

La nuova pulsazione di attraversamento si trova al di là del punto 40.

Il diagramma delle fasi è aumentato sensibilmente, circa 20° .

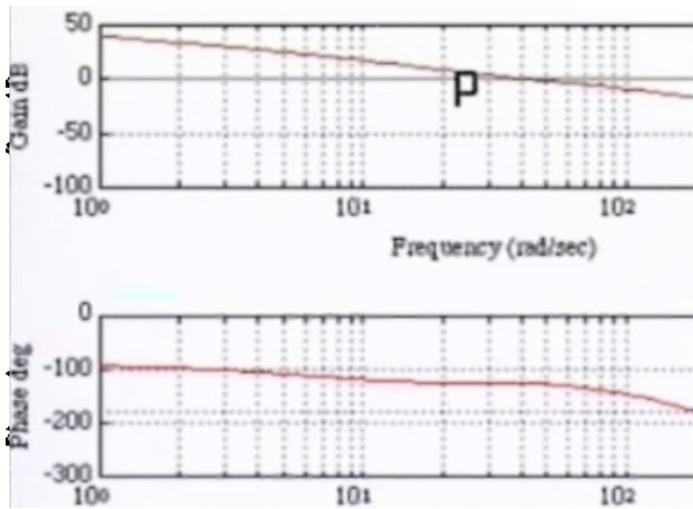
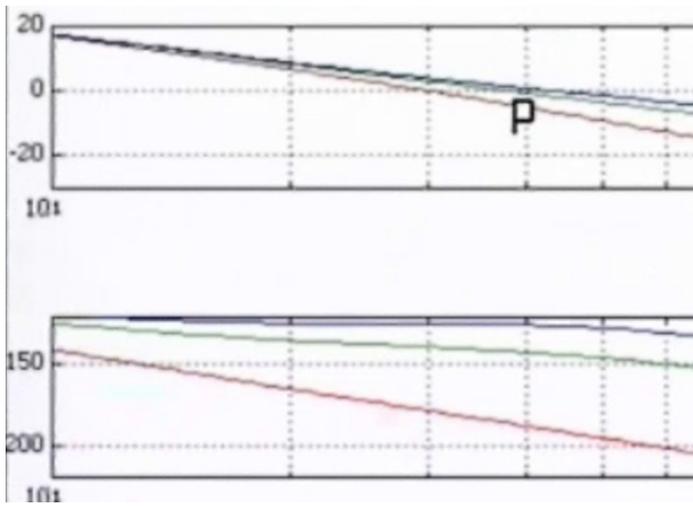


Diagramma di Bode completo, con entrambe le funzioni anticipatrici.

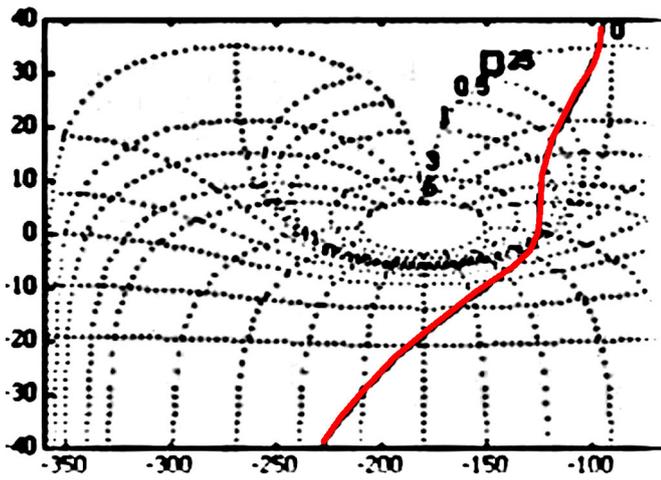
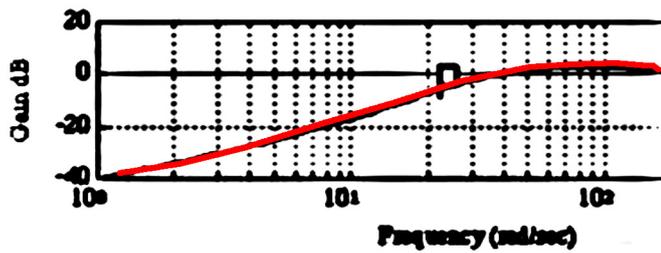
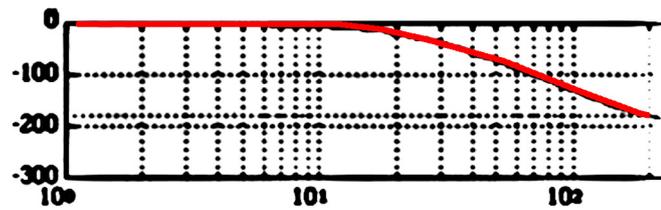
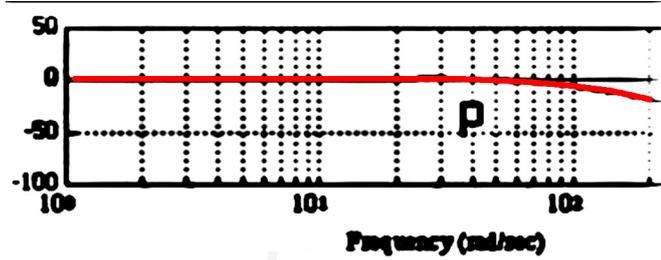
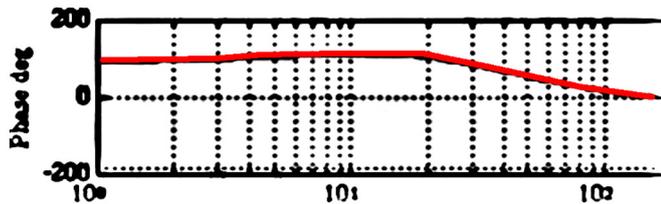


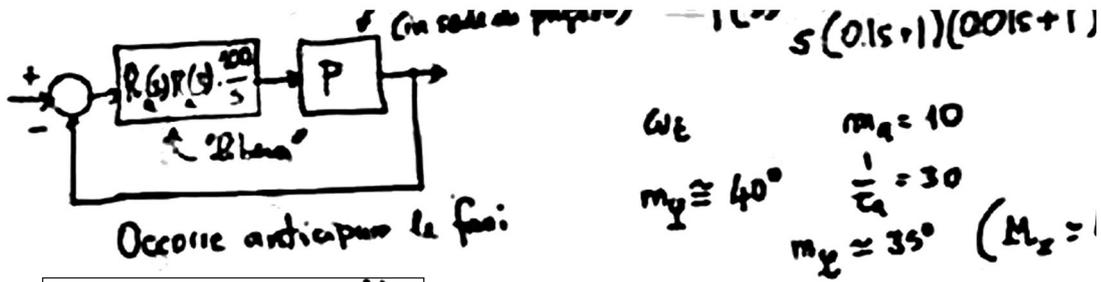
Diagramma di Nichols



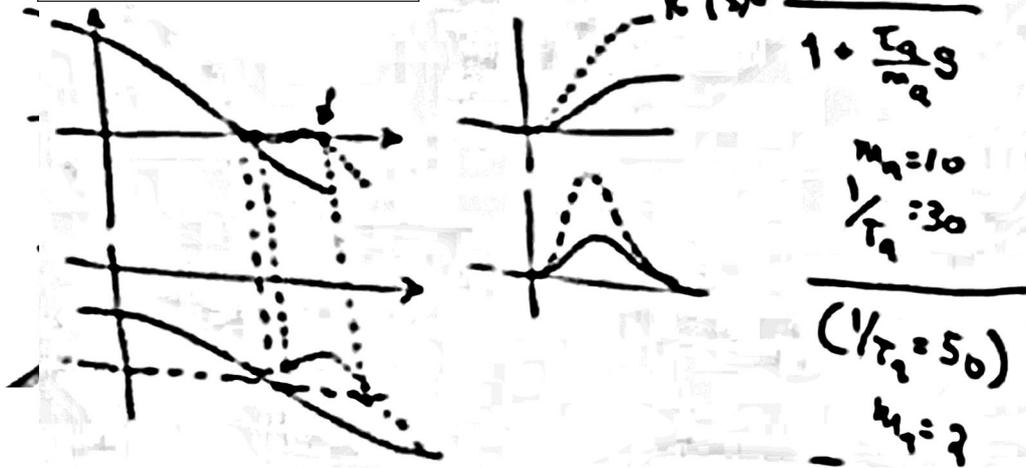
Funzione di sensibilità



E' una scelta sconsigliata quella di prendere i due parametri uguali (valori dei moduli e valori degli anticipi) per le due funzioni anticipatrici.



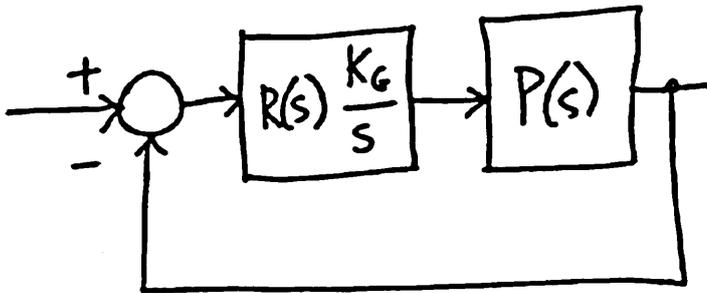
Sottoscompilata !!
 $R_a = \hat{R}_a$



□

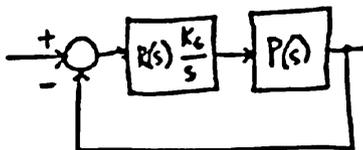
Prof. Alberto Isidori
40'15"

Continuiamo nella rassegna dei metodi per la scelta di una funzione che compensi il sistema di controllo.



$$R(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s} \quad m_a > 1$$

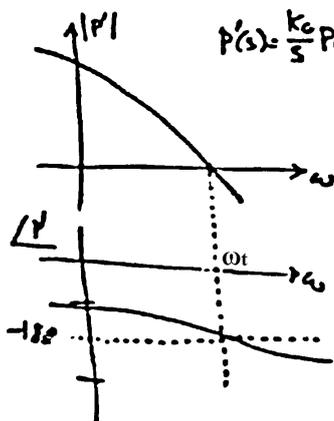
anticipare le fasi



$$R(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s} \quad m_a > 1$$

anticipare le fasi

$\omega t \rightarrow$ spostata verso destra
($\frac{1}{\tau_a} \approx \omega_t$)



Nella scorsa lezione abbiamo visto la funzione anticipatrice. Nello schema essa è la funzione $R(s)$, inserita in una struttura in cui c'è un guadagno K_G e un polo nell'origine, s , se occorre. Segue la funzione del processo $P(s)$.

Abbiamo studiato il caso in cui la funzione $R(s)$ sia caratterizzata da uno zero e da un polo.

Lo scopo della funzione $R(s)$ è quello di anticipare le fasi. L'anticipo di fase può essere necessario per ottenere il margine di fase voluto, nel sistema. Quindi per stabilizzare robustezza e stabilità.

Riportando modulo e fasi della funzione P' , definita come mostrato in figura, essa può servire per anticipare le fasi nella zona di interesse, ovvero in prossimità della pulsazione di attraversamento ω_t . Se il margine di fase è insufficiente tale funzione inserisce un margine di fase che può essere dimensionato nel modo desiderato, come visto negli esempi della scorsa lezione.

Se poi una funzione non basta se ne può aggiungere un'altra con alcuni accorgimenti per evitare attraversamenti multipli. Tali accor-

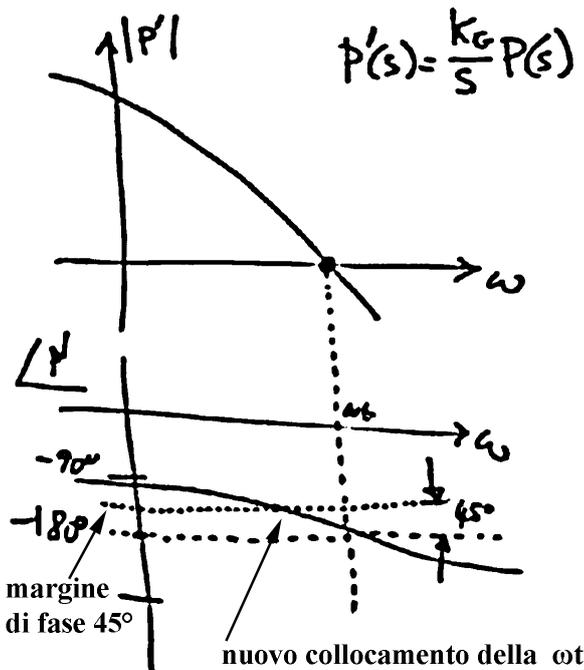
gimenti consistono nel non utilizzare gli stessi valori dei parametri.

Una conseguenza inevitabile della funzione P' è che la ω_t viene spostata verso destra a causa dell'aumento dei moduli.

L'aumento dei moduli può essere limitato dalla opportuna scelta del parametro $1/\tau_a$, di valore circa pari alla pulsazione di attraversamento ω_t .

Quindi questo per limitare l'aumento dei moduli e nello stesso tempo sfruttare in modo conveniente l'anticipo delle fasi.

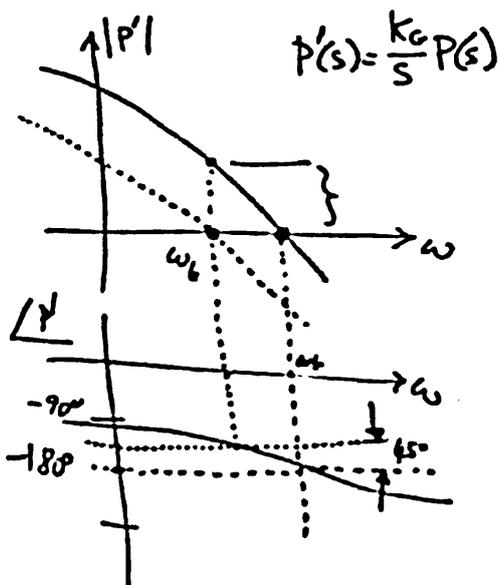
Ci possono essere però dei casi in cui non vogliamo aumentare ω_t al fine di assicurare una certa stabilità robusta, che è legato al fatto che la funzione di trasferimento ingresso-uscita non deve essere unitaria in tutta la banda di frequenza da 0 a + infinito, ma da un certo punto in poi deve cominciare a ridursi in quanto, per frequenze elevate, le tolleranze sul modello del processo tendono a diventare via via più ampie, e l'incertezza del processo tende a diventare via via più grande.



Dunque se si vuole acquisire un certo margine di fase per avere stabilità nel sistema è possibile utilizzare un altro tipo di compensazione, complementare a quella vista.

Osservando il diagramma dei moduli di Bode, si può pensare di spostare la pulsazione di attraversamento ω_t , il sistema non compensato, in un punto in cui la fase della funzione non compensata sia sufficiente per quanto riguarda il margine di fase stesso.

Se, ad esempio, si volesse avere un margine di fase intorno a 45° , allora in corrispondenza alla ω_t , la fase deve trovarsi al di sopra della corrispondente linea.



Quindi quello che si vuole fare è spostare la ω_t senza spostare le fasi.

L'azione che fa questo corrisponde a prendere il diagramma dei moduli e traslarlo verso il basso, in modo tale da avere il nuovo collocamento della ω_t . Questo corrisponde all'attenuazione dei moduli della quantità pari al segmento mostrato in figura. Il margine di fase ottenuto è quello voluto.

Per fare questa operazione occorre introdurre un guadagno che, in decibel, è un numero negativo per cui occorre introdurre un fattore moltiplicativo minore di 1. Facendo questo si modifica il guadagno K_G già fissato nella prima fase del progetto e può darsi che questo non sia consentito. Infatti il guadagno K_G può essere il valore di minimo guadagno per avere l'errore desiderato, prefissato, in regime permanente, per cui l'introduzione di un fattore minore di 1 non è possibile, perché questo violerebbe le specifiche dell'errore in regime permanente.

Questa azione non è dunque praticabile.

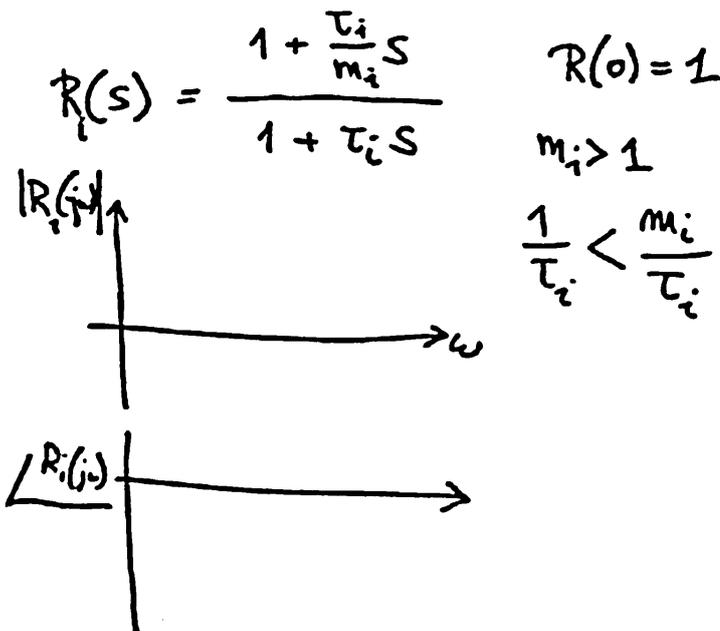
Allora si può pensare di attenuare i moduli non in modo uniforme su tutto l'asse delle frequenze, ma solo in corrispondenza della zona di interesse, in particolare quella dove vogliamo andare a collocare la nuova pulsazione di attraversamento, lasciando inalterato il guadagno, cioè lasciando inalterati i moduli a frequenze via via più basse, quelle che tendono a zero.

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s}$$

$$R_i(0) = 1 \quad \text{guadagno unitario}$$

Si può fare questo con una funzione caratterizzante $R_i(s)$, che abbia un solo polo e un solo zero, scritto nella forma come mostrato in figura.

La proprietà di questa funzione è quella di avere guadagno unitario, $R(0) = 1$. Questo vuol dire che a basse frequenze, in particolare per $\omega = 0$, il guadagno del sistema non viene alterato e quindi gli errori a regime permanente che erano stati prefissati per assegnazione del guadagno K_G , nella prima fase progetto, non vengono compromessi, ovvero non vengono peggiorati.



Analizzando il comportamento di questa funzione, $R_i(j\omega)$, rispetto alla frequenza, tracciando quindi il diagramma dei moduli e il diagramma delle fasi, si osserva che essa ha un polo e uno zero.

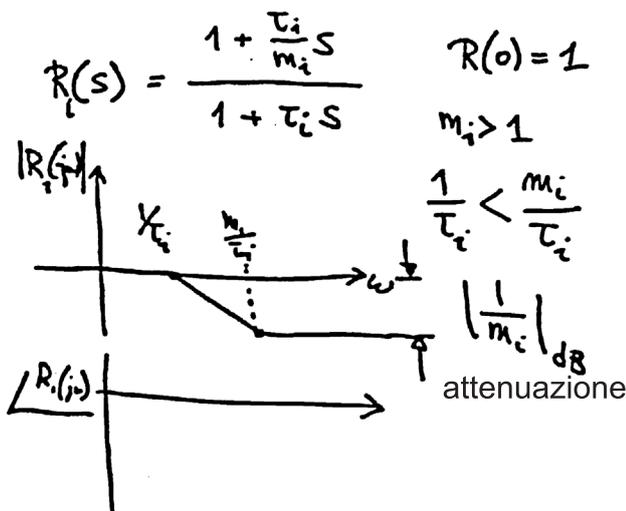
Prendendo $m_i > 1$ si osserva che la pulsazione di rottura relativo al polo, $1/\tau_i$, è inferiore alla pulsazione di rottura relativa allo zero.

Tracciando il diagramma dei moduli per spezzate, il modulo è nullo fino al punto $\omega = 1/\tau_i$, da qui si ha una pendenza negativa di -20 dB per decade, fino al punto $\omega = m_i/\tau_i$, da qui la funzione rimane costante.

Si noti come la funzione attenui i moduli, che sono sempre negativi, in decibel, oppure nulli quando ω tende a zero.

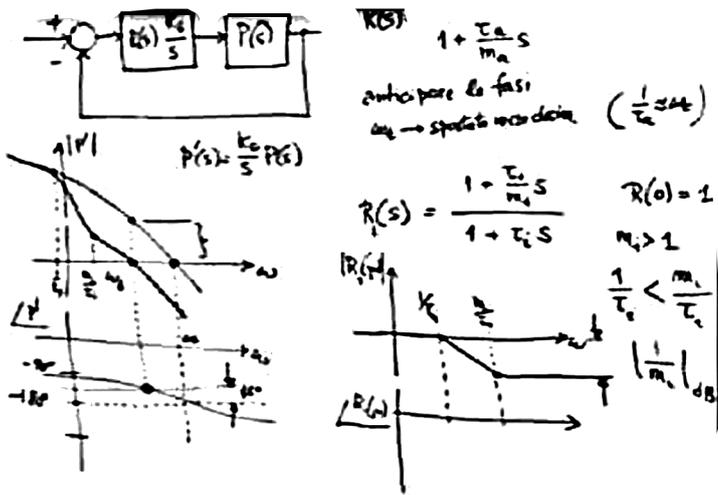
Nella composizione di questa funzione con il processo, il risultato sarà una attenuazione dei moduli.

Il valore di attenuazione è calcolabile facendo il limite della funzione per ω che tende all'infinito. Tale valore, espresso in decibel, pari a $1/m_i$.

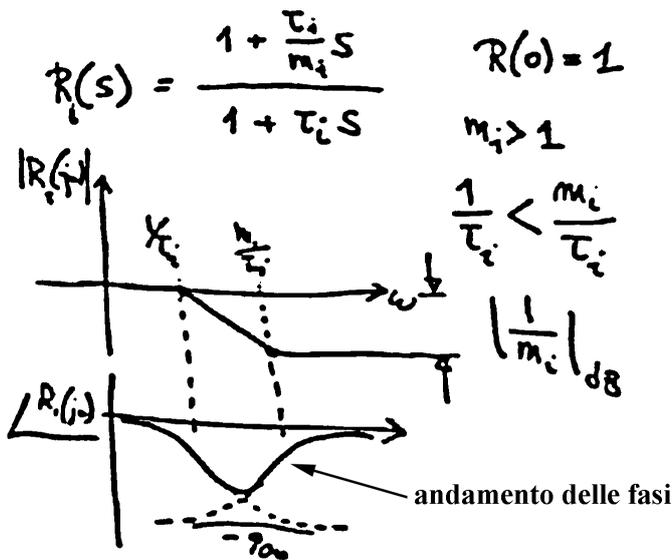


Siccome m_i è maggiore di 1, $1/m_i$ è un numero minore di 1 che, espresso in decibel, è un numero negativo.

L'effetto della composizione della funzione ottenuta con il processo, sembra dare il risultato voluto.



Dobbiamo vedere quello che succede alle fasi, importanti per la stabilità.



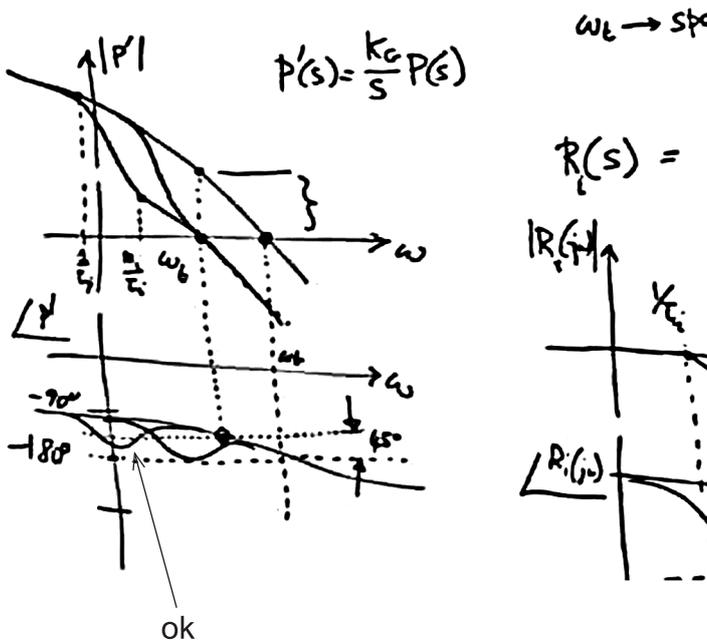
Le fasi sono, in sostanza, complementari rispetto a quelle ottenute con l'introduzione della funzione anticipatrice.

L'andamento delle fasi, riportato in figura, è un andamento negativo, si tratta dunque di un ritardo di fase.

La tendenza è di raggiungere il valore -90° .

L'effetto di ritardo di fase è un effetto indesiderato in quanto può far sì che il margine di fase che otteniamo non sia quello che desideriamo.

A tale scopo dobbiamo fare in modo che i due punti di localizzazione della massima fase di attenuazione siano abbastanza a sinistra della pulsazione di attraversamento che si vuole ottenere. A questo punto si ottiene l'effetto desiderato.



La funzione introdotta ha il compito di attenuare i moduli, solo in una certa banda di frequenza e non su tutte le frequenze.

Per tale ragione essa prende il nome di funzione attenuatrice.

Essa ha come effetto collaterale quella di ritardare le fasi, che è un effetto indesiderato.

L'indice i nella funzione R_i serve a distinguerla dalla funzione anticipatrice, inoltre, per valori di τ molto grandi, la funzione attenuatrice si comporta come un integratore.

Si noti come il diagramma dipenda da τ e da m .

La dipendenza da τ è eliminabile per mezzo della normalizzazione, mettendo $j\omega$ al posto di s . In questo modo i diagrammi dipendono da $\omega\tau$.

$$R_i(j\omega) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} j\omega}{1 + \tau_i j\omega}$$

Attenuatrice

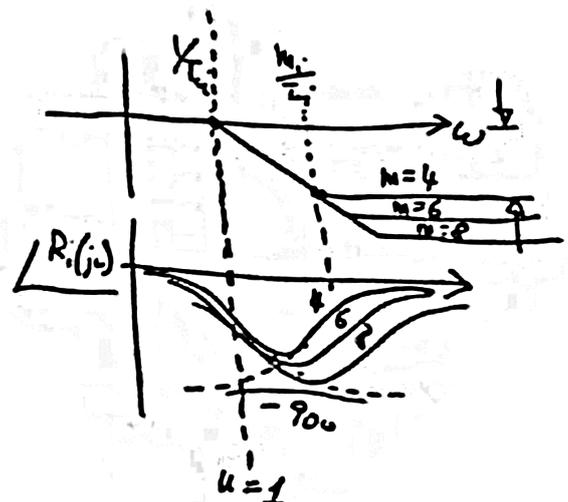
$$\left. \begin{array}{l} 1 + j \frac{u}{m} \\ 1 + j u \\ u = \omega \tau \end{array} \right\}$$

$m > 1$

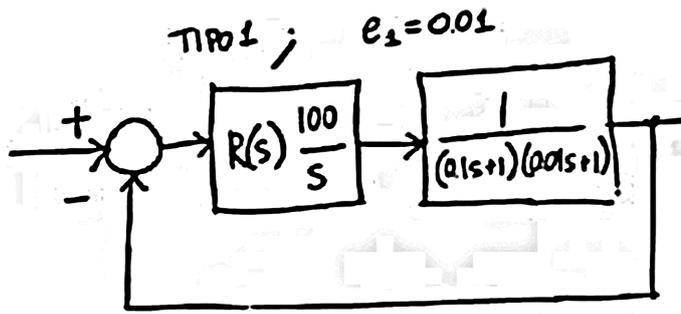
forma normalizzata

Dalla normalizzazione si avranno tanti diagrammi quanti sono i valori di m .

Con le fasi che decrescono avvicinandosi a -90° .



Esempio di funzione attenuatrice, sulla scorta dell'esempio visto nella lezione scorsa.



Il sistema è di tipo uno avente un errore alla rampa dell'1%.

Il problema che si pone è quello di stabilizzarlo con un certo margine di fase, con MathLab.

Vedremo poi cosa succede alla pulsazione di attraversamento.

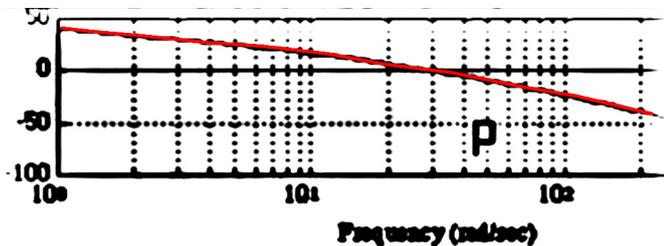
CASO 2: si vuole aumentare il margine di fase ed è ammissibile una diminuzione della pulsazione di attraversamento

PROCESSO P

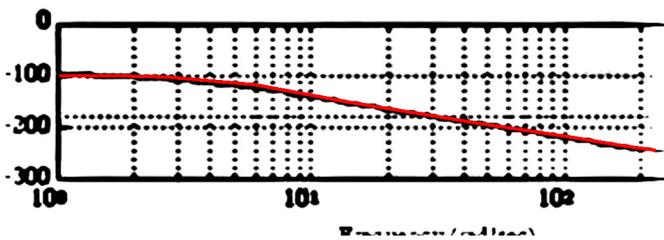
$$P(s) = \frac{100}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

```
numP=[100];
denP=conv([1,0],conv([0.1, 1],[0.01, 1]));
```

Questo è il caso 2, nel primo caso si voleva aumentare il margine di fase lasciando il più possibile inalterata la pulsazione di attraversamento, mentre in questo caso vogliamo sempre aumentare il margine di fase, con l'ammissibilità di una diminuzione della pulsazione di attraversamento.



Il diagramma di Bode è rappresentato su tre decadi perché si vuole rappresentare un po' tutte le frequenze di interesse.

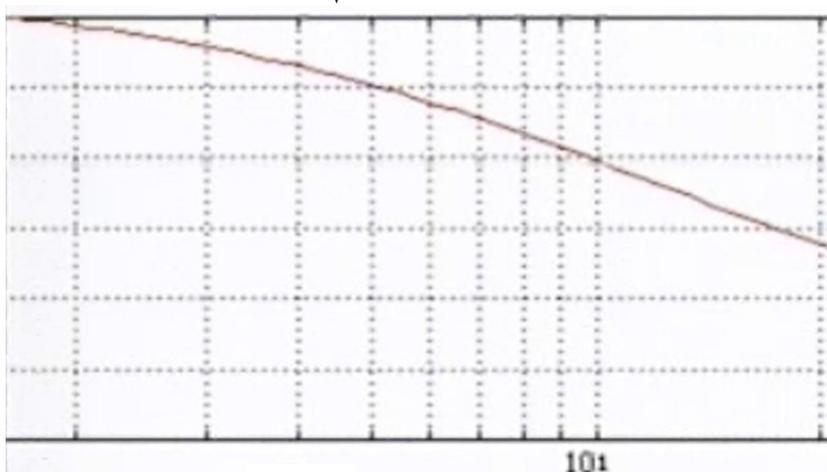
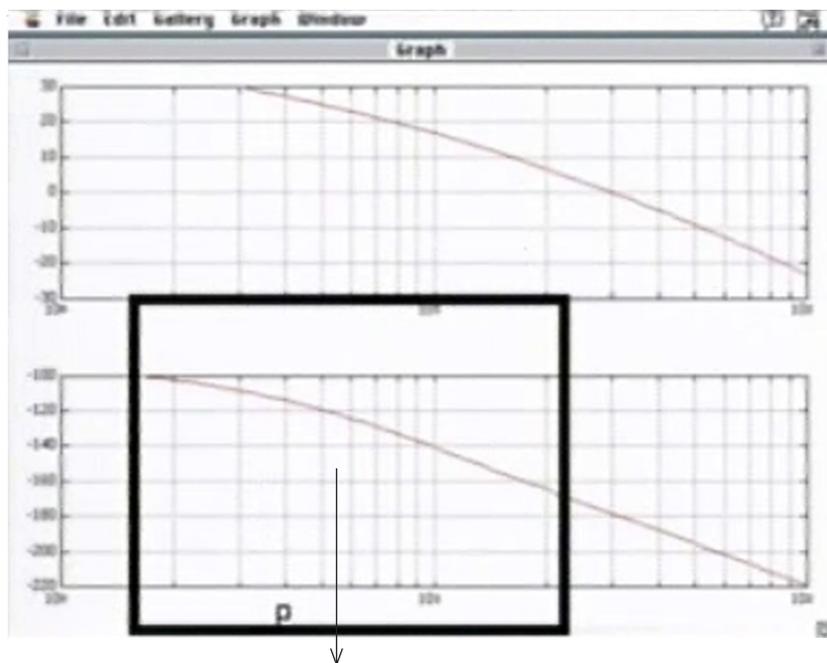


Dal diagramma si nota che, se vogliamo ottenere un certo margine di fase riducendo i moduli, dobbiamo spostarci verso la frequenza 10^1 .

In corrispondenza di $\omega = 10^1$ abbiamo, rispetto ai -180° , approssimativamente un eccesso di 40° .

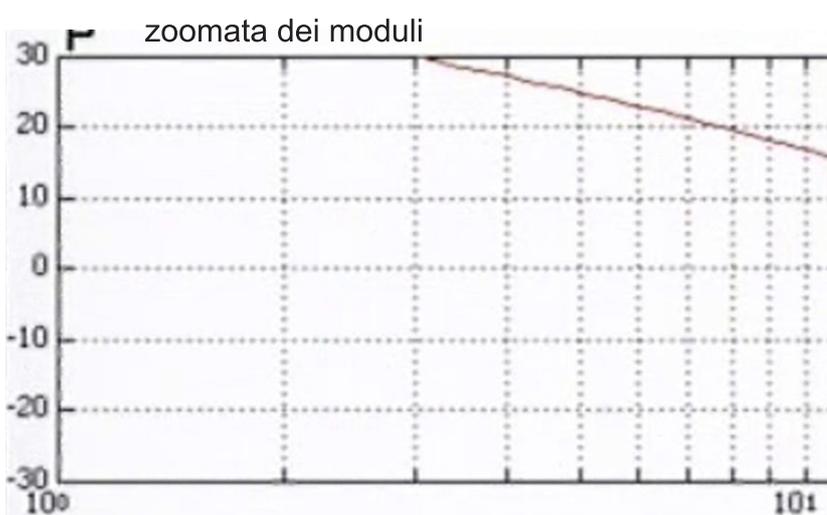
Se si vuole ottenere un margine di fase un po' più alto si deve andare a sinistra.

Per definire meglio la soluzione, quindi su dove collocare la ω_c , si effettua una zoomata del diagramma.



Siccome ogni striscia è 20° , se si vuole ottenere un margine di fase vicino ai 40° - 50° , si deve portare la pulsazione di attraversamento nella frequenza 0.7, corrispondente alla terza linea verticale da sinistra, venendo da 10, corrispondente a $\omega = 7$.

Si deve dunque mirare a ottenere $\omega = 7$.



Determinato questo, si torna sul diagramma dei moduli per vedere quanto si deve attenuare per avere la pulsazione di attraversamento uguale a 7.

In $\omega = 7$ il modulo vale 22, per cui la funzione non compensata in $\omega = 7$ vale 22 dB. Se ora si attenua di 22 dB si porta la ω di attraversamento in quel punto, ottenendo anche una diminuzione di fase, e si ottiene il margine voluto.

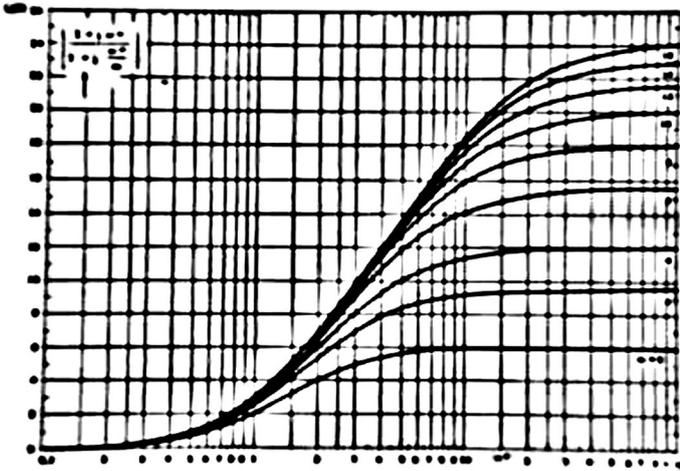
Ora vediamo, con l'ausilio dei diagrammi universali, come si scelgono i parametri τ_i e m_i .

La cosa da cui partire è il valore dell'attenuazione.

Abbiamo visto che vogliamo spostare la pulsazione di attraversamento nel punto $\omega = 7$. Per ottenere questo risultato abbiamo visto sul diagramma che è necessario introdurre, a quella pulsazione, una attenuazione di 22 dB.

Dalle carte universali si ricavano esattamente i valori da scegliere per i parametri τ_i e m_i in questo caso, oppure τ_a e m_a nella sintesi.

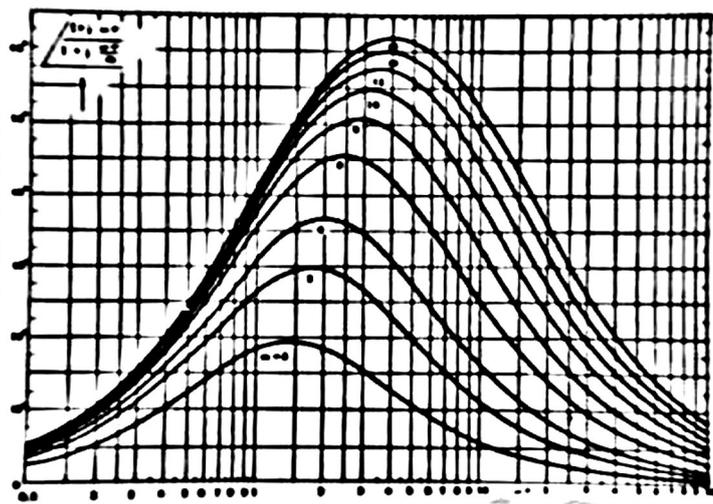
Si va a vedere qual è la curva che introduce una attenuazione di 22 dB in corrispondenza a valori elevati della pulsazione normalizzata.



Il diagramma è lo stesso di quello visto nella scorsa lezione solo che, in questo caso, i moduli devono essere considerati di valore negativo.

Per un valore di 22 (a sinistra) si ottiene $m_i = 12$ circa (a destra, in quanto i due punti di rottura $1/\tau_i$ e m_i/τ_i devono essere a sinistra della ω_i , quindi la ω_i deve stare nella regione a destra e corrispondere ad un punto in tale regione).

Dopo aver scelto m_i si deve vedere cosa succede alla fase, perché scegliendo m_i si modificano le fasi.



Anche il diagramma delle fasi a lato è lo stesso diagramma visto nella precedente lezione, con la funzione anticipatrice.

Però, in questo caso, dobbiamo interpretare le fasi come valori negativi.

Abbiamo scelto $m_i = 12$, quindi dobbiamo prendere la relativa curva e andarla ad osservare nella zona delle frequenze che ci interessano, quella in cui andremo a collocare la nuova pulsazione di attraversamento.

L'informazione che ricaveremo è quella di vedere quanta fase perdiamo.

Vediamo che quando $\omega_\tau = 50$, la curva relativa a $m_i = 12$ riduce le fasi di circa 10° .

Questo vuol dire che se prendiamo $m_i = 12$ e τ_i in maniera tale che la ω_τ si vada a collocare nel punto 50, la funzione introduce una riduzione di fase di 10° .

Siccome in quel punto la fase della funzione non compensata era 50° e più, i 10° li possiamo perdere, quindi la fase risulterà 40° e più. Per cui il margine di fase risulterà vicino a quello voluto.

SCelta CONTROLLORE C: FUNZIONE ATTENUATRICE

$\tau = 50/7$; % normalizzazione, $\omega\tau = 50$ con $\omega = 7$.

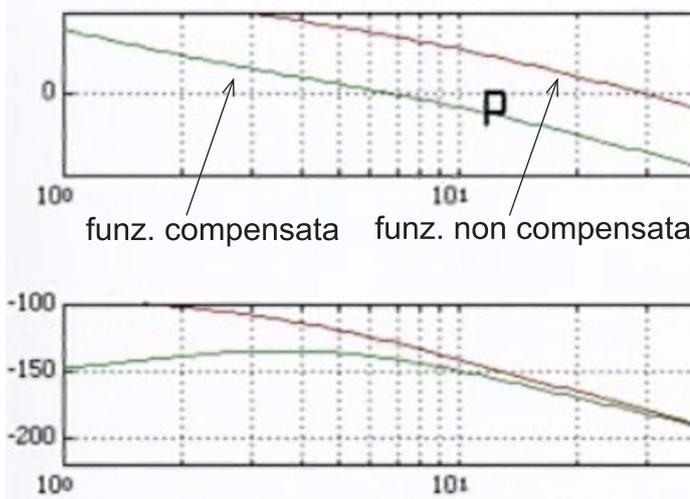
$n = 12$;

$\text{numC} = [\tau/n, 1]$;

$\text{denC} = [\tau, 1]$;

P

diagramma della funzione compensata



Il diagramma è conforme alla previsione.

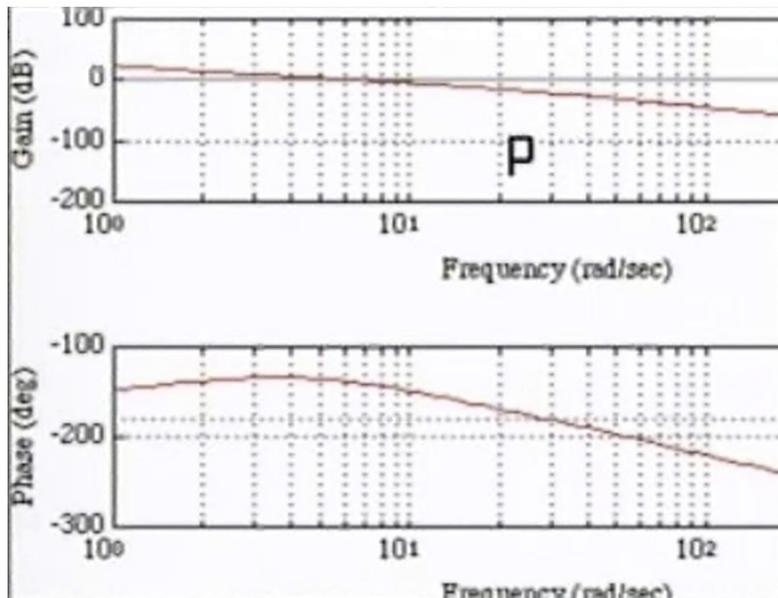
Il diagramma dei moduli attraverso la linea a 0 dB per $\omega = 7$.

Abbiamo dunque ottenuto la pulsazione di attraversamento pari a 0.7.

I valori delle fasi sono un po' diminuiti, esattamente dei 10° che avevamo previsto, in $\omega = 7$.

Dal diagramma sembra che i valori della fase siano a -140° , e che quindi il margine di fase sia di 40° .

Questo ci porta alla conclusione che la sintesi sembra abbia dato il risultato sperato.

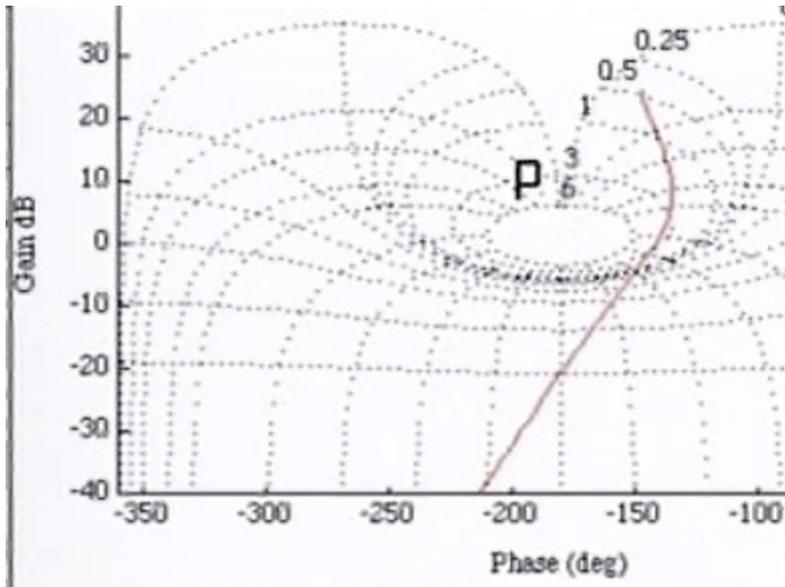


Calcoliamo ora il diagramma di Bode della funzione completa, che è utile tracciarlo in quanto è bene vedere quello che succede per tutte le frequenze.

Si noti come intorno alla frequenza 10^0 le fasi si siano ridotte.

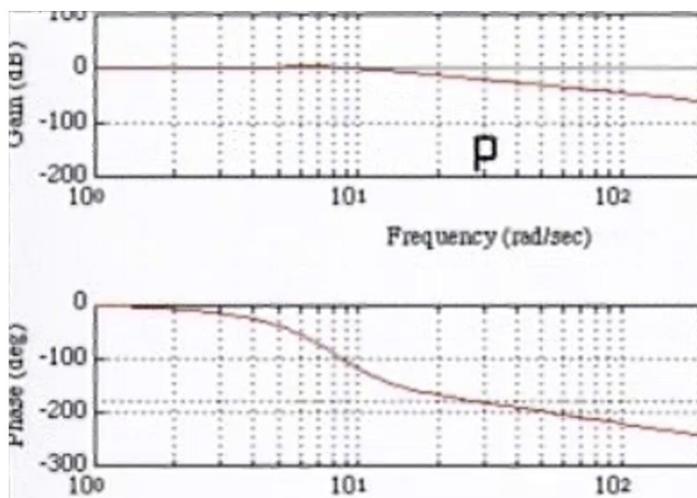
Questo è un effetto della funzione attenuatrice. Per fortuna in quella zona di frequenza i moduli sono maggiori di uno per cui non c'è pericolo di instabilità.

Vediamo ora alcune altre verifiche, la carta di Nichols, funzione di trasferimento del sistema completo, funzione di sensibilità.



Il diagramma di Nichols, zoomato per vedere esattamente quanto vale il modulo alla risonanza.

La curva si allontana verso destra e poi torna giù, in basso a sinistra. La curva attraversa di poco il luogo con modulo costante a 3 dB, quindi il modulo alla risonanza è un po' superiore a 3 e non arriverà probabilmente a 4.



Calcolo della funzione di trasferimento ad anello chiuso, ingresso-uscita.

Zoom per vedere quanto è venuta la banda passante.

La banda passante è poco leggibile nel diagramma in quanto la scala dei moduli, generata automaticamente, va da 100 dB a -200 dB.

Non c'è la definizione sufficiente per poter leggere i -3 dB.

Per poterli leggere occorrerebbe prendere soltanto la decade tra 10^1 e 10^2 . Ci si ren-

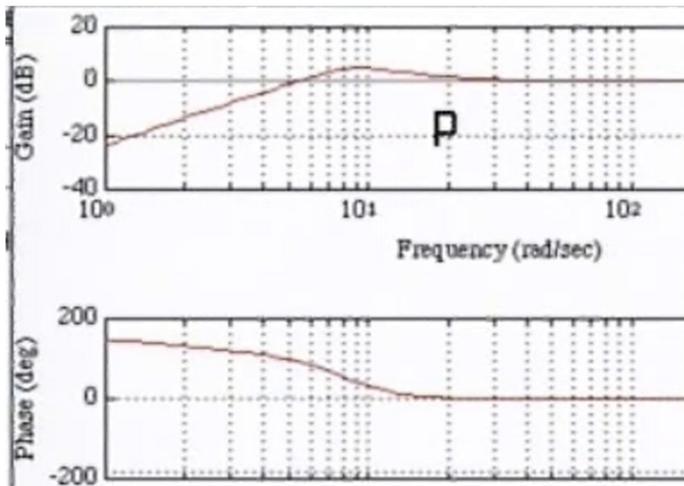
de conto che la banda passante è intorno a 10^1 .

Nell'esempio della scorsa lezione, basato sullo stesso processo, era stata ottenuta una banda passante di 50 radianti al secondo, quindi cinque volte più grande.

In questo caso è stato ottenuto un valore più piccolo per aver scelto una ω di attraversamento abbastanza più piccola.

Nel caso precedente era di circa 40, in questo caso di circa 7.

Si noti come sia sempre rispettata la regola empirica per la quale la banda passante si trova tra ω di attraversamento e due volte ω di attraversamento.



Calcolo della funzione di sensibilità.

La funzione di sensibilità è importante per quanto riguarda l'errore a regime permanente a ingressi sinusoidali.

L'andamento è quello che ci aspettiamo, esso tende a zero quando ω tende a 0, ovvero a -infinito in decibel.

Andamento tende a 1 per le altre frequenze. Si noti come la funzione sia abbastanza grande a partire da qualcosa dopo 1 in poi.

Abbiamo attenuazioni inferiori a -20 dB. La volta scorsa le stesse attenuazioni si avevano fino a $\omega = 8$.

Quindi in questo caso c'è una banda di frequenze che va da 1 a 8 in cui sono state perse le proprietà ottenute nella sintesi precedente di migliore funzione di sensibilità e quindi di maggiore precisione nella risposta a regime permanente.

Quindi riducendo la ω di attraversamento è stata ridotta la banda passante, ma è stata anche aumentata la funzione di sensibilità in una certa banda di frequenza e questa è una cosa da tenere presente quando si usa la funzione attenuatrice nella sintesi di un sistema di controllo.

□

Prof. Alberto Isidori
40'56"

$$G(s) = \frac{K (1 + \tau_a s)}{s (1 + \frac{\tau_a}{m_a} s)} \approx K_p + \frac{K_I}{s}$$

se $m_a \gg 1$

Abbiamo visto che la funzione di controllo $G(s)$ comprende un guadagno, che ha lo scopo di abbassare il valore dell'errore in regime permanente sotto un certo limite prefissato, che comprende eventualmente un polo nell'origine per ottenere un sistema di tipo 1 e cioè

un sistema in cui l'errore sia nullo in regime permanente quando l'ingresso è costante e che comprende quasi sempre un'azione di compensazione che, nella maggioranza dei casi, è una azione anticipatrice, necessaria molto spesso per ottenere un margine di fase desiderato.

Se il numero m_a è abbastanza più grande di 1, in pratica da 10 in poi, la funzione può essere approssimata, nella banda di frequenza di interesse ovvero da frequenze molto basse fino al valore della ω di attraversamento, con una funzione della forma visualizzata

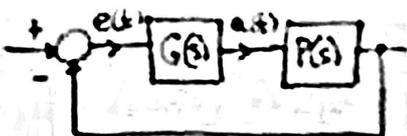
$$\left\{ \begin{array}{l} K_p e(t) + \\ + K_I \int e(t) dt \end{array} \right\} u(t)$$

in figura, ricavata dal fatto che il termine τ_a/m_a viene trascurato.

Come già osservato, una azione di questo genere comprende un termine proporzionale e, in questo caso, l'errore viene moltiplicato per il termine proporzionale e inoltre comprende un termine di tipo integrale.

Cioè moltiplicare il termine K_I per l'errore significa sviluppare un'azione di controllo che corrisponde all'integrale indefinito dell'errore moltiplicato per la costante K_I .

La somma delle due azioni è quella che dà luogo all'azione di controllo del processo.



$$G(s) = \frac{K (1 + \tau_a s)}{s (1 + \frac{\tau_a}{m_a} s)} \approx K_p + \frac{K_I}{s} \left\{ \begin{array}{l} K_p e(t) + \\ + K_I \int e(t) dt \end{array} \right\} u(t)$$

se $m_a \gg 1$

Nell'anello a retroazione elementare che abbiamo sempre considerato, dopo il controllo fra il valore desiderato e il valore effettivo, c'è un dispositivo con funzione di trasferimento $G(s)$, che sviluppa la funzione di controllo $u(t)$, che è imposta al processo $P(s)$.

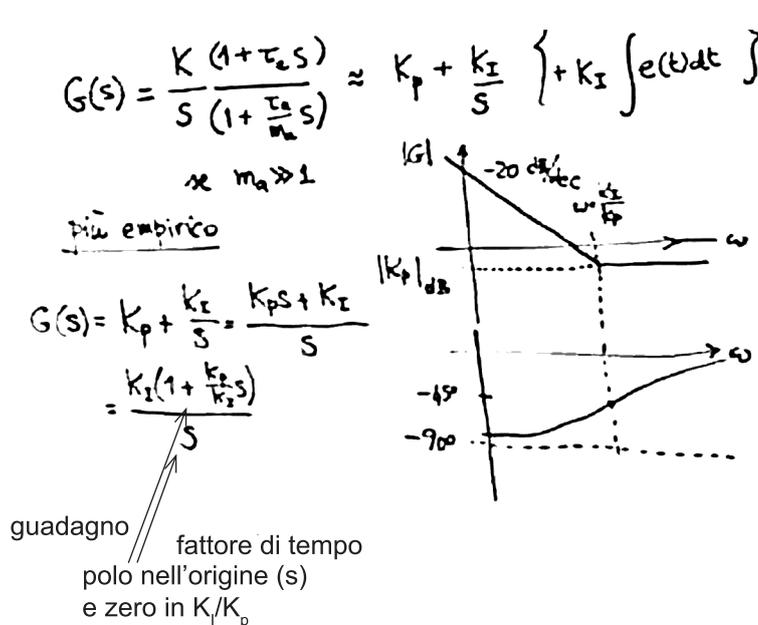
Nei casi in cui la funzione $G(s)$ assume la forma indicata e $m_a \gg 1$, di fatto, il controllo che si pone al processo, consiste nella somma di una azione di controllo proporzionale all'errore con un'azione di tipo integrale che può essere utile per avere, ancora, errori

nulli in regime permanente quando l'ingresso è costante.

Nelle ultime lezioni abbiamo poi visto come scegliere i valori di τ_a e m_a .

Vedremo ora un approccio più empirico per la scelta dei parametri che caratterizzano la funzione di compensazione, nel caso particolare in cui la funzione $G(s)$ può essere espressa nella somma di un'azione proporzionale con una azione integrale.

Per fare questo vediamo come sono fatti i diagrammi di Bode in questa situazione particolare.



La funzione $G(s)$ viene riscritta in forma standard per il tracciamento dei diagrammi di Bode, mettendo in evidenza il fattore K_I .

$G(s)$ ha dunque un polo, uno zero ed un guadagno. Da questo il relativo diagramma di Bode dei moduli e delle fasi.

Per il polo nell'origine la pendenza iniziale della curva è -20 dB per decade fino ad un certo punto, il punto in cui la pendenza cambia è il punto relativo all'inverso della costante di tempo associata allo zero, quindi K_I/K_p . La pendenza diventa orizzontale, perché lo zero provoca un

aumento di pendenza, che era negativa prima, quindi diventa nulla.

In effetti quando ω tende all'infinito il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore, quindi il modulo di G tende ad un valore costante, che può essere visto da entrambe le formule, ed è pari a K_p .

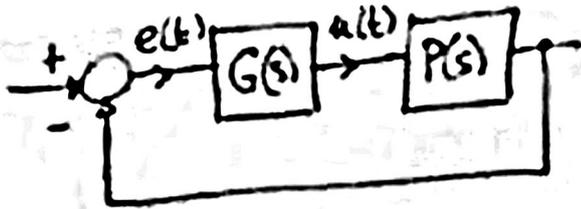
Il diagramma delle fasi comprende un termine fisso di -90° dovuto al polo nell'origine, c'è un termine in anticipo dovuto alla presenza dello zero; in corrispondenza di -45° , ω vale K_I/K_p .

La fase è quindi tutta negativa.

La funzione $G(s)$ produce un ritardo di fase, in quanto abbiamo introdotto un polo nell'origine. Per ogni polo introdotto nell'origine si ritardano le fasi uniformemente di 90° .

In questo caso il ritardo di fase è in parte recuperato, per le ω via via crescenti, dall'effetto dello zero, che è un'azione stabilizzante.

Questo zero è quello che viene ereditato dalla funzione anticipatrice, e rappresenta la situazione limite a cui si porta tale funzione quando il parametro m_a diventa molto grande.



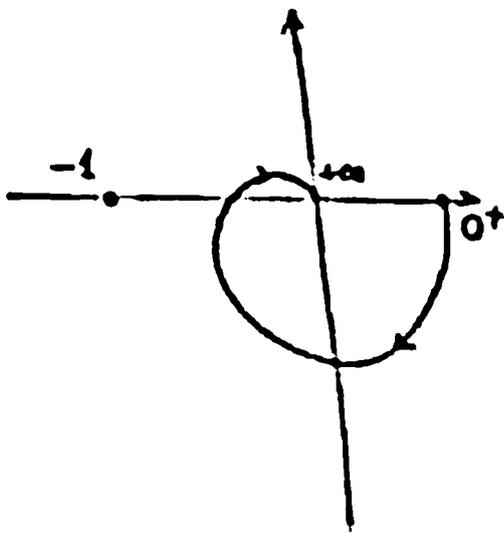
Abbiamo due parametri da scegliere, nell'approccio empirico, K_p e K_I .

La scelta di questi due parametri è sulla base di una informazione molto ridotta della funzione di trasferimento del processo.

Quindi conosciamo "poco" della funzione $P(s)$.

$$G(s) = \frac{K_p s + K_I}{s}$$

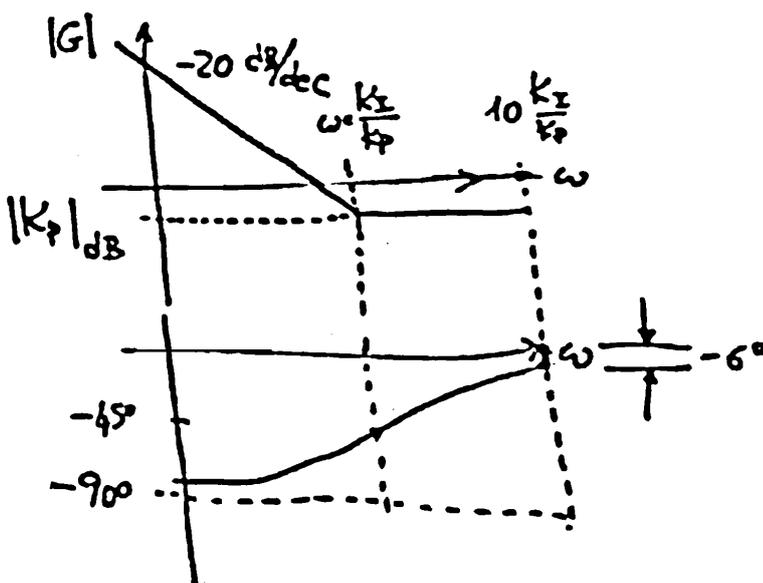
scegliere K_p e K_I
conoscere "poco" di $P(s)$



Se il diagramma della funzione è come quello riportato a lato, la relativa funzione non ha poli nell'origine, perché per un valore di ω tendente a zero si parte da un valore finito (a destra).

Inoltre c'è un eccesso di poli rispetto agli zeri pari a tre. Questo perché vengono percorsi tre quadranti, quando ω va da $0+$ a $+\infty$, con le frecce che indicano il verso crescente di ω .

Se questa è la funzione $P(s)$ e si utilizza una funzione compensatrice della forma $G(s)$, che contiene un'azione proporzionale e una azione integrale, certamente viene prodotto un ritardo di fase, così come lo abbiamo visto dai diagrammi di Bode.



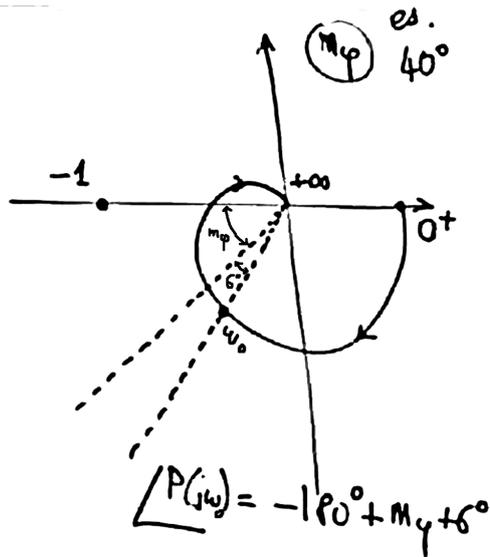
Il diagramma di fase è conveniente contenerlo, come si è visto nell'analisi per tentativi.

Quindi conviene che nella zona delle frequenze critiche, cioè quando ci troviamo vicini al punto -1 , il ritardo di fase sia basso. Questo vuol dire che nella zona delle frequenze critiche si deve andare a leggere la curva nella zona destra, cioè utilizzare la curva in tale zona di frequenze.

Per un valore di dieci volte K_I/K_p , ovvero una decade a destra del punto K_I/K_p , e il modulo è costante

da un certa frequenza, il ritardo di fase introdotto dalla funzione, corrispondente al piccolo segmento evidenziato, è pari a -6° . Cioè per un valore pari ad una frequenza

dieci volte corrispondente al punto di rottura K_I/K_p , la funzione ritarda le fasi di soli 6° .



$|K_p|_{dB}$

L'idea è ora quella di fissare un certo margine di fase, ad esempio 40° .

Sappiamo che introducendo quella funzione, con la ω scelta in corrispondenza al punto $10 K_I/K_p$, si deve tollerare un valore ulteriore della riduzione della fase di 6° .

Quindi, volendo ottenere un margine di fase di 6° , si va a prendere il valore della pulsazione ω in corrispondenza della quale la fase della funzione $P(j\omega)$ è uguale a $-180^\circ + m_\phi + 6$, dove m_ϕ è il margine di fase desiderato.

Sia ω_0 questa pulsazione.

Per ottenere il margine di fase desiderato occorre imporre che la pulsazione di attraversamento ω_t del sistema compensato sia pari alla pulsazione ω_0 .

Dovranno poi essere scelti parametri K_I e K_p in modo tale che il ritardo di fase sia soltanto quello di 6° .

Per imporre che la pulsazione di attraversamento ω_t del sistema compensato sia pari alla pulsazione ω_0 occorre imporre che $|F(j\omega_0)| = |P(j\omega_0)| |G(j\omega_0)| = 1$.

Con $F(s)$ la funzione compensata, P la funzione che rappresenta il processo e G la funzione che rappresenta il controllore.

In questo modo si ottiene che la pulsazione di attraversamento del sistema compensato è pari esattamente a ω_0 , per definizione.

$$|G| = K_p \left| 1 + \frac{K_I}{K_p j\omega_0} \right|$$

Questo comporta imporre $10 \frac{K_I}{K_p} = \omega_0$

Ovvero $\boxed{\frac{K_I}{K_p} = \frac{\omega_0}{10}}$

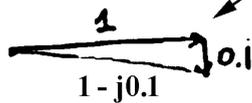
Le conseguenze dell'imposizione sono

$$|G| = K_p \left| 1 + \frac{K_I}{K_p j\omega_0} \right| = K_p \left| 1 + \frac{0.1}{j} \right|$$

$$|G| = K_p \left| 1 + \frac{K_I}{K_p j\omega_0} \right| = K_p \left| 1 + \frac{j0.1}{-1} \right|$$

Una ultima semplificazione. Il numero complesso in modulo è circa 1.

$$|G| = K_p \left| 1 + \frac{K_I}{K_p j\omega_0} \right| = K_p \left| 1 + \frac{j0.1}{-1} \right| \approx K_p \text{ In sostanza.}$$



Quindi, avendo scelto il rapporto $K_I/K_p = \omega_0/10$, $G(j\omega_0) \approx K_p$.

Da cui

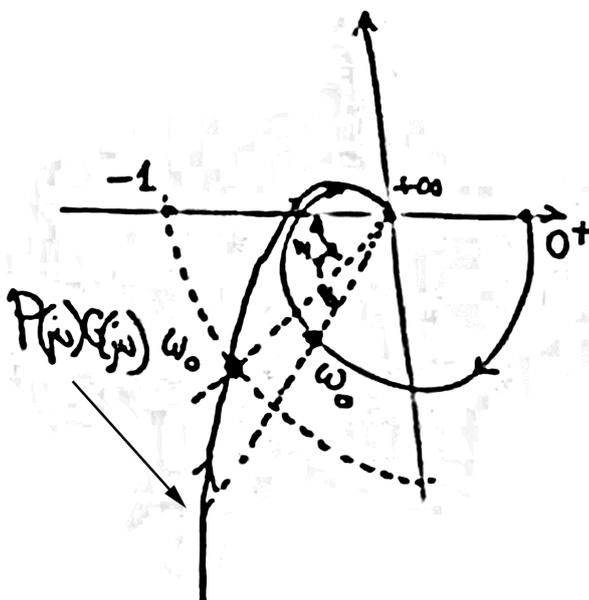
$$K_p = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$$

con

$$\frac{K_I}{K_p} = \frac{\omega_0}{10}$$

, per cui una volta scelto K_p , ottengo K_I .

Queste sono due formule che consentono di calcolare i due parametri K_I e K_p che caratterizzano il controllore in maniera tale da ottenere una pulsazione di attraversamento pari ad un certo valore ω_0 , ma, soprattutto, in quella pulsazione di attraversamento, sia il margine di fase desiderato.



Andando a considerare il sistema nel suo complesso, in sostanza $G(s)P(s)$, in corrispondenza alla pulsazione ω_0 del processo compensato, si avrà un modulo unitario per cui il processo compensato traverserà il cerchio di raggio unitario concetto nell'origine nella pulsazione ω_0 , con un margine di fase pari a quello desiderato, quello per cui la funzione compensatrice introduce un ulteriore ritardo di 6° . La nuova funzione $P(j\omega)G(j\omega)$ traversa il cerchio unitario in un certo punto alla pulsazione ω_0 .

La nuova funzione $P(j\omega)G(j\omega)$, in generale, avrà il seguente andamento: siccome la fun-

zione G aveva aggiunto un polo nell'origine P G parte da $-\infty$ con fase -90° , passa per il punto alla pulsazione ω_0 , poi continua e, siccome il numero di poli di zeri della funzione compensatrice è lo stesso, non vengono introdotte ulteriori variazioni di fase quando ω tende all'infinito, quindi la funzione tende a diventare uguale.

Ovviamente le scale della ω sono tutte diverse.

Quello che abbiamo ottenuto è un sistema compensato con il diagramma di Nyquist che si comporta nel modo descritto.

Notare che la pulsazione di attraversamento non è stata scelta, è stato solo imposto un certo margine di fase.

$$\omega_0 \left\{ \begin{array}{l} \angle P(j\omega_0) = -180^\circ + m_\varphi + 6^\circ \\ |P(j\omega_0)| \end{array} \right.$$

Da quanto visto si può dire che, avendo guardato una frequenza particolare ω_0 e avendo osservato per tale frequenza la variazione di fase, cioè il ritardo di fase della funzione P, pari al valore riportato in figura, e avendo osservato il modulo della funzione nel punto ω_0 , sono state scritte delle formule che forniscono due parametri.

$$K_p = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$$

$$\frac{K_I}{K_p} = \frac{\omega_0}{10}$$

In molti casi una filosofia del genere va bene, in altri no.

L'utilizzo di queste due semplici formule nella sintesi è possibile in tutti i casi in cui il comportamento della funzione P non è troppo strano, ovvero nei casi in cui il modulo di tale funzione parte da un certo valore, poi si riduce e la fase non fa giri troppo strani, non si avvicina troppo al punto -1, non fa doppi attraversamenti ecc.

Sono tutti i casi "normali", in cui si può prevedere che la funzione di trasferimento del processo, la risposta armonica del processo, abbia un andamento piuttosto regolare, decrescente in modulo e decrescente in fase, senza troppe variazioni.

Se l'obiettivo del controllo è quello di raggiungere stabilità con un certo margine allora si può ricorrere a queste formule semplificate.

Per fare la predisposizione di queste costanti, K_p e K_I , si deve conoscere la pulsazione ω_0 , e si deve conoscere il modulo.

Però a volte non è facile conoscere tale pulsazione, perché essa è definita come quella pulsazione per cui c'è un certo ritardo di fase, ad esempio $-180^\circ + 40^\circ$ di margine desiderato più altri 6° .

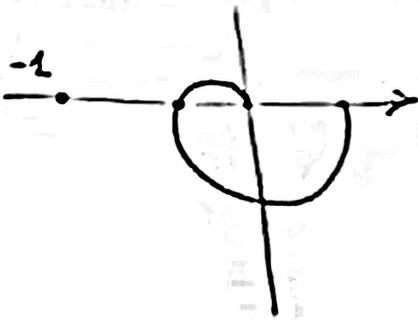
Quindi occorrerebbe disporre di misure per sapere quanto ritarda la fase, in altre parole

si dovrebbe già avere un abbozzo di diagramma di Nyquist oppure del diagramma di Bode della funzione di trasferimento, della risposta armonica al processo.

In molti casi questo non è possibile ad esempio in certi processi industriali o in certi processi chimici.

Per quest'ultimi casi viene seguita una alternativa che per certi versi è simile, così descritta.

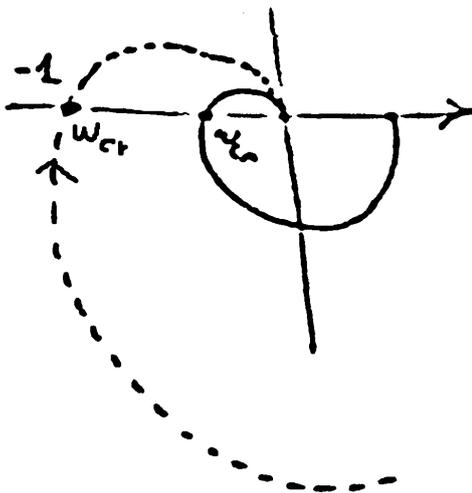
$$\omega_{cr} = \angle P(j\omega_{cr}) = -180^\circ$$



La frequenza ω_0 , a cui abbiamo un ritardo speciale, può non essere facilmente identificabile, ma abbiamo un'altra frequenza che è identificabile, ed è quella per la quale il ritardo del processo è esattamente -180° .

Definiamo questa frequenza ω_{cr} , come riportato in figura.

È stato usato il termine "critico" perché se si prende il sistema e ci si limita a variare il guadagno (avendo inserito il sistema in un anello a controreazione), aumentandolo, allora siamo sicuri che prima o poi passiamo alla instabilità perché ad un certo valore del guadagno la curva di Nyquist amplificata avrà un andamento che la porta al valore ed oltre il punto critico -1 .



Se si sceglie esattamente un valore del guadagno che porta dal punto iniziale al punto critico -1 allora il sistema si mette a oscillare dal passaggio alla situazione di stabilità alla situazione di instabilità ed oscilla con una pulsazione esattamente pari a ω_{cr} , la pulsazione critica.

Nell'aumentare i guadagni le frequenze non cambiano ma cambiano solo le ampiezze in senso radiale, quindi nella curva tratteggiata che corrisponde al valore più alto del guadagno il punto di attraversamento

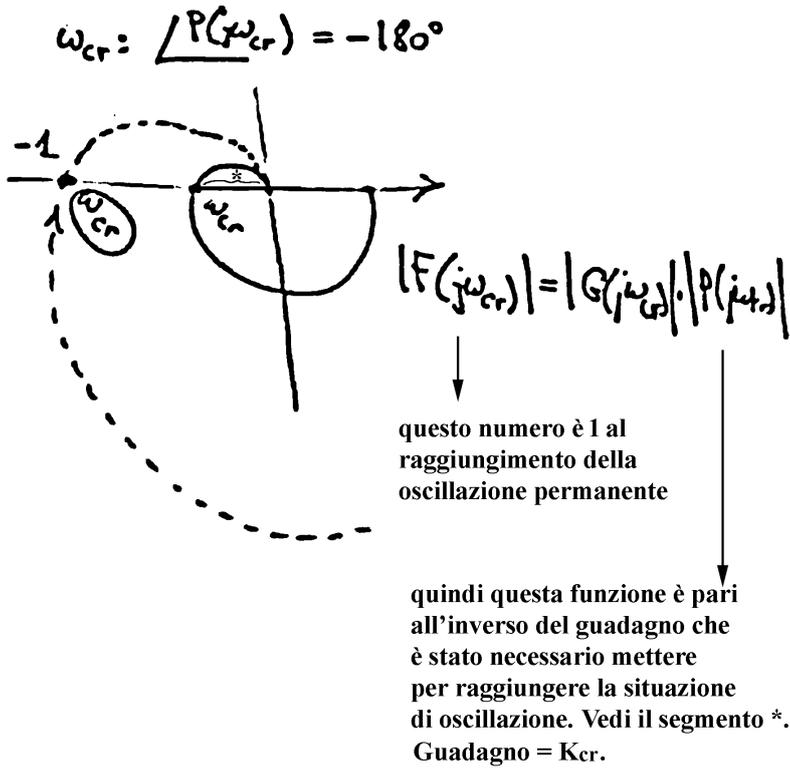
della curva con il semiasse reale negativo è ancora il punto definito come ω critico.

Questo fenomeno può essere rilevato sperimentalmente prendendo il sistema di controllo e immaginando di variare il parametro del guadagno, sostituendo G con un guadagno puro, un amplificatore. Poi si tende ad aumentare tale guadagno fino a che nel sistema non viene riscontrata una oscillazione permanente, che in certi casi può avere anche caratteristiche distruttive.

Si tratta dunque di portare il sistema al limite di stabilità, in una situazione di oscillazione permanente aumentando il guadagno; in questo caso è facile identificare la pulsazione perché essa sarà esattamente il valore della ω corrispondente alla oscillazione permanente che si è instaurata.

Individuata la pulsazione ci si chiede di quanto è stato aumentato il guadagno per raggiungere tale oscillazione, che è un dato ottenibile.

Quello che si ottiene nei diagrammi è riportato in figura.



$\omega_{cr} : \angle P(j\omega_{cr}) = -180^\circ$

$|P(j\omega_{cr})| = \frac{1}{K_{cr}}$

Sostanzialmente quello che occorre fare è prendere un sistema, inserire come controllore un guadagno puro, se è possibile, cioè se è prevedibile che non accadano fenomeni distruttivi, portare il guadagno fino alla condizione di oscillazione permanente. A questo punto sono rilevabili due grandezze, una è la pulsazione dell'oscillazione che corrisponde alla pulsazione di attraversamento, e il valore del modulo della funzione P in quel punto.

Questi due numeri possono essere usati per risalire, con delle formule empiriche, ai numeri ω_0 e $P(j\omega_0)$, utilizzati nel ragionamento precedente.

Normalmente si assume che $\omega_{cr} = 2\omega_0$.

Inoltre, normalmente, è assumibile che $|P(j\omega_{cr})| = |P(j\omega_0)| / 4$

Normalmente

$\omega_{cr} = 2\omega_0$

$|P(j\omega_{cr})| = \frac{1}{4} |P(j\omega_0)|$

Quindi l'azione di controllo che viene imposta è pari ad un termine che è proporzionale all'errore, più un termine che è proporzionale all'integrale dell'errore, più un termine che è proporzionale alla derivata dell'errore.

In questo caso si dice che si sta usando un controllore ad azione proporzionale, integrale, e derivativa, ovvero P.I.D, in quanto sono le tre azioni che compongono il sistema.

$$G(s) = \frac{k_p s + k_i (1 + \tau' s)}{s (1 + \frac{\tau' s}{m'})} \approx k_p + \frac{k_i}{s} + k_D s$$

$m' \gg 1$

$$u = k_p e(t) + k_i \int e(t) dt + k_D \frac{de}{dt}$$

Proporz.
 Integrale
 Derivata

Queste tre azioni corrispondono semplicemente all'aver pensato un polo nell'origine, quindi un'azione integrale, e poi una doppia compensazione anticipatrice con valori abbastanza elevati del parametro m.

Si pone nuovamente il problema della scelta dei tre parametri, con formule relative diverse alle precedenti.

□