# ELETTROTECNICA

## Appunti Lezioni

# ELETTROTECNICA

## Appunti Lezioni

L'ELETTROTECNICA

Appunti Lezioni

# ELETTROTECNICA - Lezioni

Docenti video: Luciano De Menna - Università di Napoli "Federico II" (Napoli - Italia)

Lezione n. 1: Introduzione al corso; La tensione
- Introduzione al corso
- Testi consigliati
- Laboratorio virtuale
- Prerequisiti
- Fenomeni elettromagnetici
- Modello dei campi e dei circuti
- Legge di Coulomb e legge di Cavendish
- Il Sistema Internazionale (S.I.)
- Tensione e differenza di potenziale

Lezione n. 2: La corrente, la legge di Ohm ed il bipolo resistore
- Il moto delle cariche e la corrente elettrica
- Modello di Drude
- Unità di misura
- Legge di Ohm
- La caratteristica di un bipolo
- Concetto di Bipolo
- Il bipolo resistore e la sua caratteristica

Lezione n. 3: La legge di Joule; il Multimetro virtuale
- La caratteristica di un bipolo
- Le convenzioni dei segni
- Potenza disspata nel resistore - Legge di Joule
- Rappresentazione grafica della caratteristica
- Il bipolo corto circuito
- Il Laboratorio Virtuale
- Il bipolo circuito aperto o a vuoto
- Parallelo e serie di resistori
- Il Multimetro Virtuale
- Parallelo di due bipoli

Lezione n. 4: Serie e parallelo; bipolo equivalente
- Ancora sul Parallelo dei bipoli
- Partitore di corrente
- Serie di due bipoli
- Partitore di tensione
- Bipolo equivalente di un circuito visto da due morsetti
- Circuito "a ponte"
- Esercizi

Lezione n. 5: I generatori; classificazione dei bipoli
- I generatori ideali
- Parallelo e serie di Generatori ideali
- Il generatore reale idealizzato
- Classificazione dei bipoli
- Soluzione grafica di un circuito elementare
- Esercizi

Lezione n. 6: Le leggi di Kirchhoff: il grafo della rete
- Circuito di una maglia
- Circuiti a più maglie
- Leggi di Kirchhoff
- Grafo albero e coalbero di una rete
- Equazioni indipendenti ai nodi ed alle maglie
- Equazioni nelle incognite tensioni e correnti di lato
- Esercizi

Lezione n. 7: Equazioni delle incognite tensioni e correnti
- Ancora sulle equazioni nelle tensioni e correnti di lato
- Equazioni nelle incognite correnti
- Esempio
- Esercizi

Lezione n. 8: Metodi dei potenziali ai nodi e delle correnti alle maglie
- Metodo dei potenziali ai nodi
- Metodo delle correnti di maglia
- Esercizi

Lezione n. 9: Teorema di Tellegen ed altri teoremi
- Teorema di Tellegen
- Teorema di non amplificazione
- Sovrapposizione degli effetti
- Esempio
- Esercizi

Lezione n. 10: Caratterizzazione esterna delle reti
- Teorema di reciprocità
- Caratterizzazione esterna delle reti attive
- Teorema del generatore equivalente di f.e.m.
- Teorema del generatore equivalente di corrente
- Esempio
- Esercizi

Lezione n. 11: Metodi sistematici per la risoluzione delle reti
- Metodi sistematici per la risoluzione delle reti
- Matrice di incidenza
- Forma matriciale delle equazioni di Kirchhoff
- Teoremi di sostituzione

Lezione n. 12: Equazioni risolventi in termini matriciali
- Teoremi di sostituzione
- Forma generale della caratteristica di un ramo
- Matrice delle conduttanze di lato
- Equazioni risolventi in termini matriciali
- Matrice delle conduttanze ai nodi
- Esercizi

Lezione n. 13: I bipoli nella realtà
- Confronto fra bipoli ideali e componenti reali
- Resistori
- Generatori
- Proporzionamento dei conduttori
- Esercizi

Lezione n. 14: N-poli
- Definizione di N-polo passivo
- Matrice delle conduttanze
- Proprietà della matrice G
- Esercizi

Lezione n. 15: Analisi e sintesi del N-polo
- Trasformazione stella-poligono
- Analisi e sintesi dell'N-polo
- Sintesi di un N-polo a poligono completo
- Esercizi

Lezione n. 16: Introduzione degli n-bipoli o n-porte
- n-bipoli o n-porte
- Matrice delle G e delle R
- Doppi bipoli a T o a Pi-greco
- Doppi bipoli come adattatori
- Potenza assorbita da un doppio bipolo
- Esercizi

Lezione n. 17: Altre rappresentazioni dei doppi bipoli
- Doppi bipoli a T o a pi-greco: formule
- Altre rappresentazioni dei doppi bipoli: parametri ibridi
- Matrice di trasmissione
- Esercizi
- Ponte in equilibrio

Lezione n. 18: Generatori pilotati e amplificatori operazionali
- Generatori pilotati
- Amplificatore operazionale
- Nullatore o noratore
- Circuiti equivalenti
- Esercizi

Lezione n. 19: Bipoli in regime dinamico
- Ancora un circuito equivalente
- Bipoli in regime dinamico
- Condensatori ed induttori
- Energia immagazzinata
- Equazioni di Kirchhoff
- Serie e parallelo di L e C
- Esercizi

Lezione n. 20: Circuiti del primo ordine
- Serie di R e C
- Interruttore
- Equazione risolvente
- Equazioni differenziali
- Scarica di C ed energia dissipata; l'oscilloscopio virtuale.
- Esercizi

Lezione n. 21: Circuiti del secondo ordine
- Ancora sulla serie di R e C e sull'energia immagazzinata
- Serie di R ed L
- Serie di R,L e C: equazioni del secondo ordine
- Le diverse condizioni di funzionamento
- Equazioni del secondo ordine
- Radici reali e distinte
- Esercizi

Lezione n. 22: Le oscillazioni nei circuiti del secondo ordine
- Ancora sulla serie L, R e C
- Radici complesse e coniugate
- Radici coincidenti
- Le condizioni iniziali
- Bilanci energetici
- Esercizi

Lezione n. 23: I bipoli attivi in regime dinamico
- Circuito RC con generatore costante
- Circuito LRC con generatore costante
- Generatori variabili
- Forme d'onda periodiche
- Esercizi

Lezione n. 24: Introduzione al metodo simbolico
- Perché generatori sinusoidali?
- Il circuito LR con un generatore sinusiodale
- La soluzione particolare e l'integrale completo
- Il metodo simbolico

Lezione n. 25: Vettori Rotanti
- Ancora sul metodo simbolico
- Impedenza ed ammettenza
- Vettori rotanti
- Esercizi

Lezione n. 26: Diagrammi fasoriali; il circuito RLC al variare dei parametri
- Diagrammi fasoriali
- Potenza in regime sinusoidale
- Il circuito RLC al variare dei parametri
- Il circuito RLC al variare della pulsazione
- Esercizi

Lezione n. 27: Il Circuito RLC come filtro 43'57"

Lezione n. 28: Strumenti di misura in C.A. 45'03
- RLC parallelo
- La risonanza in generale
- Un esempio di circuti in AC
- Strumenti di misura in AC
- Il multimetro in AC
- Esercizi

Lezione n. 29: Il rifasamento; l'accoppiamento mutuo 47'53"
- Il rifasamento
- L'accoppiamento mutuo un nuovo doppio bipolo
- Reciprocità
- Esercizi

Lezione n. 30: Circuiti equivalenti dell'accoppiamento mutuo 48'38"
- L'accoppiamento mutuo in AC
- L'accoppiamento perfetto
- Circuito equivalente
- L'accoppiamento non perfetto
- Circuito equivalente
- Esercizi

Lezione n. 31: Circuiti equivalenti dei componenti; il trasformatore 43'11"
- Condensatori e induttori reali
- Circuiti equivalenti
- Il trasformatore senza perdite
- Cenni di distribuzione dell'energia elettrica
- Esercizi

Lezione n. 32: Sistemi trifasi simmetrici ed equilibrati 42'15"

Lezione n. 33: Sistemi trifasi squilibrati; misura della potenza nei sistemi trifasi 47'55"
- Sistemi trifasi
- Esercizi
- Sistemi equilibrati e squilibrati
- Misura della potenza nei sistemi trifasi

Lezione n. 34: Dinamica dei circuiti di ordine superiore 42'25"
- Dinamica dei circuiti di ordine superiore
- Un esempio

Lezione n. 35: Introduzione a SPICE 43'53"

Lezione n. 36: Ancora su SPICE 42'58"

Lezione n. 37: I segnali impulsivi 42'27

Lezione n. 38: Il bilanciamento degli impulsi 42'11"

Lezione n. 39: La trasformata di Laplace 43'03"

Lezione n. 40: Ancora sulla trasformata di Laplace 42'38"

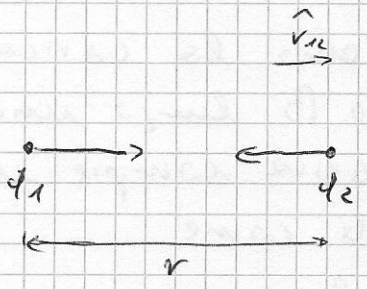
# ELETTROTECNICA

## LEZIONE 1 - INTRODUZIONE

## CARICHE ELETTRICHE E FORZE ELETTRICHE

Legge di Coulomb

$$F_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$




$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ nel S.I.

con $\varepsilon_0 = 8.856\,10^{-12}$ F/m

$\varepsilon_0$ = costante dielettrica nel vuoto

$\varepsilon_2$ = costante dielettrica relativa

$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2$ = costante dielettrica del mezzo assoluta = $\varepsilon$

$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

## TENSIONE e DIFFERENZA DI POTENZIALE

Sia data una distribuzione di cariche in una regione dello spazio.
Disponiamo una carica puntiforme e positiva che non disturbi la posizione o il movimento delle altre cariche.
Questa carica è detta carica di prova, essa risentirà di una forza prodotta dalle altre cariche che saranno cariche sorgenti.
Se la carica di prova è unitaria, chiameremo

CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ la forza che essa risente

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$q$ = carica
$\vec{E}$ = campo elettrico

La forza percepita dalla carica di prova dipenderà dalla posizione in cui si trova e dalla velocità con cui essa passa per il punto in questione

Se portiamo la carica di prova $q$ da un punto A ad un punto B lungo una linea $\gamma$, la forza F che agisce sulla carica compie un lavoro per unità di carica calcolabile come:

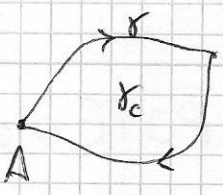
$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l}_\gamma$$

$T_{A\gamma B}$ = Lavoro di F per portare la carica $q$ da A a B lungo $\gamma$.

primo cenno al modello di campo

A tale lavoro viene dato il nome di TENSIONE lungo la linea $\gamma$ tra i punti A e B e si misura in Volt (V).

Il lavoro compiuto dalla forza F lungo un percorso chiuso è nullo




$$\oint_{\gamma_c} \frac{\vec{F}}{q} d\vec{l}_{\gamma_c} = 0$$

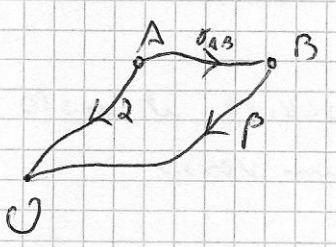
La funzione $V(A)$ è detta potenziale del punto A rispetto ad un punto fisso O ed è il lavoro che il campo compie quando la carica di prova si muove da un punto qualsiasi dello spazio ad un punto fisso O.

La funzione V in O è nulla.

Si dice che il punto O è stato scelto come punto di riferimento del potenziale.

Calcolando la Tensione tra due punti A e B abbiamo

$$T_{A\gamma B} = T_{A\alpha O} - T_{B\beta O} = V(A) - V(B)$$




$$V_{AB} = \int_A^B \frac{F}{q} d\ell_{\gamma_{AB}} = \int_A^O \frac{F}{q} d\ell_\alpha - \int_B^O \frac{F}{q} d\ell_\beta = V(A) - V(B)$$

c.d.d.p.

Il lavoro da A e B è lo stesso sia lungo $\gamma_{AB}$ che lungo $\alpha$ nel verso uscente e lungo $\beta$ nel verso opposto.

Nel caso in cui il lavoro è indipendente dal percorso esso può essere messo sotto la forma di una differenza di potenziale tra i due punti in esame.

Il lavoro è positivo se $V(A) \geq V(B)$.

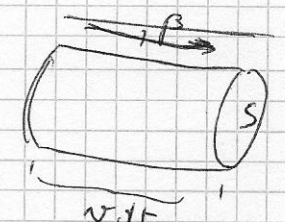
# INTENSITÀ DELLA CORRENTE ELETTRICA

Supponiamo di avere cariche q in movimento a velocità $\vec{v}$. La loro distribuzione sia descritta attraverso una funzione densità n: se dV è il volume elementare, il portatori di carica in tale volume sono, per definizione, $dN = n\,dV$.

Sia S una superficie attraverso la quale, nel loro moto, passano le cariche.

Calcoliamo la quantità di carica che nel tempo dt attraversa la superficie, costruendo un cilindro che ha per base la superficie S e lunghezza, nella direzione parallela alla velocità $\vec{v}$, pari a $v\,dt$

La carica totale che attraversa S nel tempo dt è:




$$dQ = n q \underbrace{S\, v\, dt \cos\beta}_{\text{VOLUME DEL CILINDRO}}$$

($h$ del cilindro; $\cos\beta$ → del prodotto scalare)

e nell'unità di tempo

$$I = \frac{dQ}{dt} = n q S v \cos\beta = \vec{J} \cdot \vec{S} \qquad \text{con } |\vec{J}| = nq\vec{v}$$

Alla grandezza $I$ viene dato il nome di intensità di corrente (è l'altro dei modelli circuitali)

$J$ è il campo di densità di corrente e descrive il moto delle cariche, dopo aver scelto una superficie e un verso.

$I$ è un vettore per superficie, quindi un flusso.

$I$ è visto come un flusso di $J$ attraverso $S$: quando si fa un prodotto scalare tra un vettore e una superficie si parla di flusso del vettore attraverso la superficie.

La forma $I = \bar{J} \cdot \bar{S}$ dell'espressione dell'intensità di corrente è interessante perché sono separati i due fattori che contribuiscono a formare l'intensità di corrente, cioè $S$ e $J$: $S$ è la sezione attraverso cui passa la corrente nell'unità di tempo e $J$ è il campo di corrente o campo di densità di corrente che descrive da solo il moto delle cariche in questa particolare conduzione.

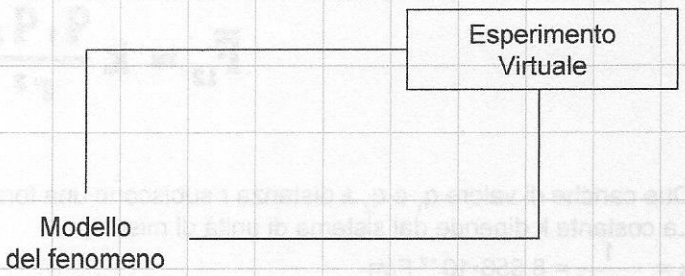
Strumento di misurazione della corrente elettrica è l'AMPEROMETRO.
Il misuratore di d.d.p. e corrente è il MULTIMETRO.

# ELETTROTECNICA

Lezione 1 - INTRODUZIONE AL CORSO. LA TENSIONE.
Prof. Luciano Menna
39'44"

Testi consigliati
- Luciano De Menna: Elettrotecnica, ed. Vittorio Pironti, Napoli, 1998
- S. Bobbio, L. De Menna, G. Miano e L. Verolino: Esercizi di Elettrotecnica: Vol. 1, Vol. 2, Vol. 3. ed. CUEN, Napoli, 1998.
- Appunti dalle Lezioni

LABORATORIO VIRTUALE




Modello del fenomeno

Verifica Sperimentale

Parametri Fondamentali

Fenomeno Sperimentale

(*Lettura da qui in su*)

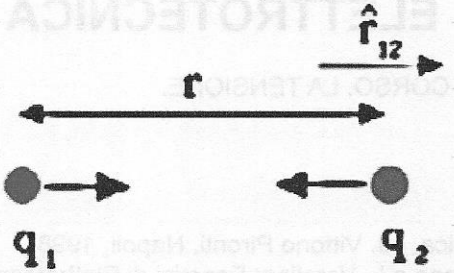
FENOMENI ELETTROMAGNETICI

Modello dei campi

Modello dei circuiti

LA TENSIONE

Legge di Coulomb
- Carica elettrica;
- $e = 1{,}60210\ 10^{-19}$ C;
- $a = 0{,}529\ 10^{-8}$ cm;
- Carica puntiforme;
- Sistema Internazionale.

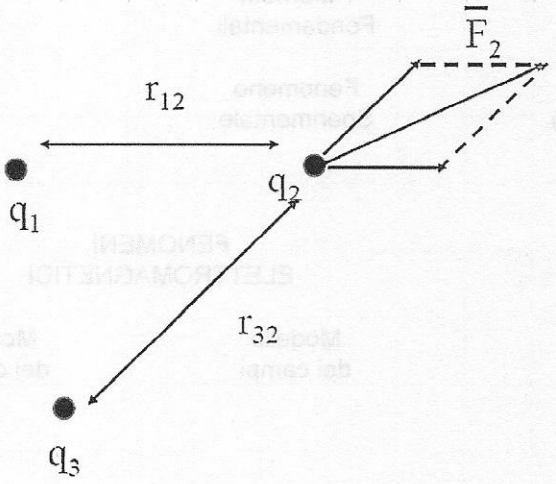



$$\bar{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Due cariche di valore $q_1$ e $q_2$ a distanza r subiscono una forza F.
La costante k dipende dal sistema di unità di misura.

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.856 \cdot 10^{-12}$ F/m

$\varepsilon_0$ è la costante dielettrica nel vuoto.
Cariche dello stesso segno sono repulsive.
In presenza di più cariche vale la somma vettoriale.




$$\bar{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \hat{r}_{12} + k \frac{q_3 q_2}{r_{32}} \hat{r}_{32}$$

$F_2$ è la forza a cui è soggetta la carica $q_2$.

La legge di Coulomb vale per cariche ferme. Per cariche in movimento vale la Legge di Cavendish, con contiene anche il caso di cariche in movimento.
Cariche come sopra sono considerabili come cariche sorgenti; una carica ininfluente sulle altre è detta una carica di prova.
La forza che la carica di prova subisce dipende dal punto dello spazio in cui è collocata perché tale punto sarà a distanze diverse dalle diverse cariche sorgenti.
Conoscendo la forza che si esercita in ogni punto su una carica di prova unitaria, quello che chiameremo

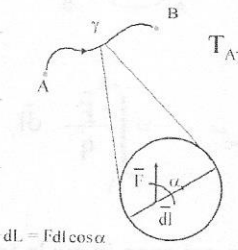
campo elettrico, non sarebbe necessario conoscere la posizione delle cariche sorgenti, cioè delle cariche che creano questa deformazione dello spazio perché se sulla carica la forza è E (forza per unità di carica che è il campo elettrico) allora la forza sarà q moltiplicato per E:
$F = q \cdot E$

Quella che abbiamo chiamato deformazione dello spazio dalle cariche sorgenti è descrivibile da quello detto un campo elettrico, cioè la conoscenza di un vettore E in ogni punto. E è un vettore che è la forza che si eserciterebbe su una carica unitaria in quel punto.

Il CAMPO ELETTRICO è alla base di tutta la fenomenologia insieme al campo successivo, quello magnetico. Esso è alla base anche dei due attori fondamentali del modello dei circuiti: la TENSIONE (o differenza di potenziale) e la CORRENTE.

LA TENSIONE

Supponiamo di avere una linea tra due punti A e B in uno spazio dove c'è un campo elettrico. In ogni punto del blocco disegnato esisterebbe una forza pari ad E se ci fosse messa una carica elettrica unitaria di prova: la carica subirebbe la forza. Se si sposta la carica da A a B lungo la linea gamma (γ), questa forza compie un lavoro che si ottiene facendo l'integrale di linea della forza F / q scalare $dl_\gamma$, che è il trattino elementare della curva.

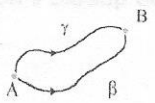



$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\gamma$$

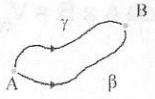
Dunque se sposto la carica unitaria da punto A al punto B lungo la linea γ, questa forza compie un lavoro che si ottiene facendo l'integrale di linea della forza che in questo caso è il lavoro del campo elettrico, la forza per unità di carica, scalare $dl_\gamma$, che è il trattino elementare della curva.

Sappiamo che integrale di linea è una somma infinita di contributi infinitesimi, per ogni trattino infinitesimo $dl_\gamma$ devo considerare il prodotto scalare tra $dl_\gamma$ versor della curva in quel punto e la forza F, quindi F modulo dl coseno α come scritto in basso a sinistra della figura sopra; questo è il contributo elementare al lavoro dovuto ad un piccolo trattino dl e devo sommare tutti i contributi.

Ora considero un'altra linea che vada da A a B, ad es. la linea β ed ottengo un altro lavoro compiuto per spostare la carica da A a B lungo β, che è in generale diverso da quello compiuto per spostare la carica da A a B lungo la linea γ.




$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\gamma$$




$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\gamma$$

$$T_{A\beta B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\beta$$

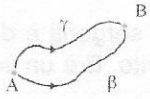
$$T_{A\gamma B} \neq T_{A\beta B}$$

$$T_{A\beta B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\beta$$

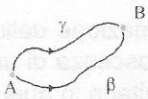
E' usato il simbolo T perché questa è la tensione tra i punti A e B lungo la linea γ.

Ci sono alcune situazioni in cui qualsiasi sia la linea che considero tra A e B la tensione tra A e B è sempre uguale.

In questo caso la tensione non dipende dal percorso e quindi dipende soltanto dai punti estremi A e B ed è chiamata DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA A e B.
Si usa allora il simbolo V e si scrive $V_{AB}$.




$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\gamma$$




$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\gamma$$

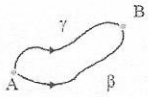
$$T_{A\beta B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\beta$$

Se invece $T_{A\gamma B} = T_{A\beta B}$ per qualsiasi linea!

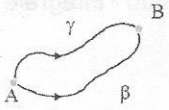
$$T_{A\beta B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\beta$$

Allora $T_{A\gamma B} = V_{AB} =$ = differenza di potenziale tra A e B!

Possiamo fare di più: osserviamo che in queste condizioni il lavoro che compio per portare la carica da A a B lungo γ e da B ad A lungo β è zero. Si vede chiaramente facendo la circuitazione del campo E lungo la curva γC che è l'insieme della curva γ e β nella direzione indicata: l'integrale viene scomposto ed il risultato è zero.




$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\gamma$$



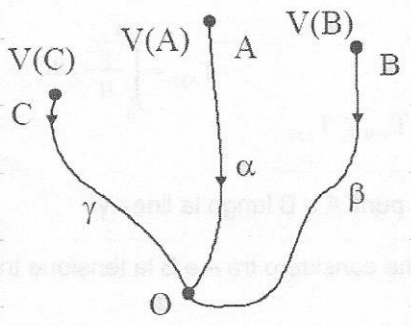

$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\gamma$$

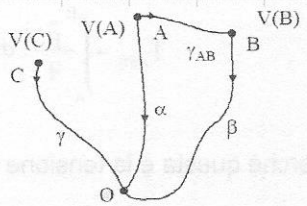
$$\oint_{\gamma C} \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_{\gamma C} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_{\gamma C} + \int_B^A \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_{\gamma C} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\gamma - \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_\beta = 0.$$

Quindi il lavoro che compio su un percorso chiuso nel caso in cui la tensione è una differenza di potenziale, quindi non dipende dal percorso, il lavoro è zero. Si dice anche che la circuitazione del campo è uguale a zero.
Potremmo anche dire che nel caso in cui la circuitazione del campo E è uguale a zero, la tensione è una differenza di potenziale e non dipende dal percorso.

Se prendiamo un punto di riferimento O e tre punti dello spazio A, B, C e considero una linea che porta da un punto al punto O, calcolando il lavoro necessario per portare la carica unitaria da uno dei punti ad O il risultato è sempre lo stesso.

In questa maniera definisco per ogni punto una funzione scalare perché V(C) è il valore del lavoro che si compie per portare la carica da C ad O lungo una qualsiasi linea che va da C ad O.
Questa è una funzione di punto da cui è possibile ricavare qualsiasi espressione di lavoro, di tensione, di differenza di potenziale fra due punti che non comprendano il punto O.
In figura è segnata la tensione, che è una differenza di potenziale tra A e B.
Nel calcolo si vede come la tensione da A a B = $V_{AB}$ viene V(A) - V(B) e da questo il nome differenza di potenziale.




$$V_{AB} = \int_A^B \frac{\bar{F}}{q} \cdot \bar{dl}_{\gamma AB} = \int_A^0 \frac{\bar{F}}{q} \cdot dl_\alpha - \int_B^0 \frac{\bar{F}}{q} \cdot dl_\beta = V(A) - V(B)$$

Unità di misura è il Volt.

Riepilogo della Lezione 1
- Introduzione al Corso;
- Testi consigliati;
- Laboratorio Virtuale;
- Prerequisiti;
- Fenomeni Elettromagnetici;
- Modello dei Campi e dei Circuiti;
- Legge di Coulomb e legge di Cavendish;
- Il Sistema Internazionale (S.I.);
- Tensione e differenza di potenziale.

Contenuti della prossima lezione
- Il movimento delle cariche e la corrente elettrica: (*secondo attore fondamentale del modello circuitale, la corrente elettrica*)
- I materiali e la corrente elettrica;
- Conduttori ed isolanti;
- Legge di Ohm;
- Il bipolo resistore. (*primo elemento della teoria delle reti*)

# LEZIONE 2 - LA CORRENTE, LA LEGGE DI OHM E IL BIPOLO RESISTORE

Prof. L. De Nardo

Il moto delle cariche e la corrente elettrica
Modello di Drude
Unità di misura
Legge di Ohm
La caratteristica di un bipolo
Concetto di bipolo
Il bipolo resistore e la sua caratteristica

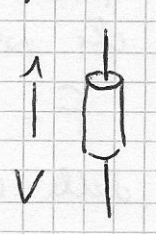
Intensità di corrente: $I = \bar{J} \cdot \bar{S}$

ovvero $I = \frac{dQ}{dt} = n q S v \cos\beta$

## LEGGE DI OHM

Essa è la rappresentazione della relazione di proporzionalità tra la differenza di potenziale applicata e la corrente prodotta in conduttori.
Gli elettroni in un conduttore, sotto l'azione di una forza prodotta dall'applicazione di una f.e.m. si mettono in moto e si produce corrente.

Ad un corpo si applica una f.e.m. e supponiamo di portare in un punto del corpo corrente e di prelevarla in un altro punto




Applicando agli stessi punti diverse f.e.m. e misurando la corrente che ne deriva, avremo la legge di Ohm, per cui

$$V = R I$$

$V = RI$

R = resistenza, misurata in $\Omega$, Ohm.

Alla costante di proporzionalità R, che nel S.I. si misura in ohm, viene dato il nome di resistenza del corpo in esame, quando alimentato nel modo indicato

La stessa legge di proporzionalità può essere anche espressa nella forma

$$I = GV$$

dove $G = \frac{I}{R}$ prende il nome di conduttanza ed è misurata in Siemens (S).
In un conduttore filiforme ($L >> \sqrt{S}$) sperimentalmente vale

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

dove $\rho$ prende il nome di resistività del materiale e $\frac{1}{\rho} = \sigma$, cioè l'inverso di $\rho$, prende il nome di conducibilità.
Queste caratteristiche sono proprie del materiale e delle condizioni fisiche in cui si trova ad operare

## IL MODELLO DI DRUDE

Dalla definizione di intensità di corrente essa è proporzionale alla velocità media dei portatori di carica.

La differenza di potenziale, in quanto integrale del campo, deve essere proporzionale alla forza esercitata sui portatori stessi; il campo è infatti la forza per unità di carica.

La legge di Ohm sembra affermare che la velocità è proporzionale alla forza, in contraddizione con la legge della dinamica $F = ma$.

In realtà i portatori di carica non sono liberi di muoversi a causa del reticolo che pone ostacolo al movimento.

Avremo $F - kv = ma = 0$, con $kv$ la forza dovuta all'attrito delle cariche fisse che costituiscono il reticolo.

Abbiamo quindi $F = kv$, come prescritto dalla legge di Ohm.

Questo modello della conduzione nei conduttori ohmici va sotto il nome di modello di Drude.

# I BIPOLI

Un BIPOLO RESISTORE è un sistema a due morsetti in cui:

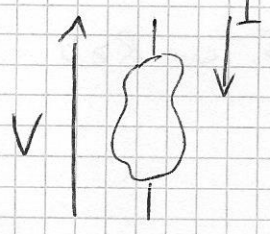
1) la corrente che entra da un morsetto è uguale a quella uscente dall'altro.
2) la tensione tra i due morsetti è una differenza di potenziale.

Se non fosse una d.d.p. dipenderebbe dal percorso che uso nel calcolo.

La tensione tra i morsetti è proporzionale all'intensità di corrente che lo attraversa; la costante di proporzionalità R prende il nome di resistenza del bipolo

Dunque per definire un bipolo i parametri sono 2:
- corrente che entra nel morsetto uguale a quella che esce.
- una sola tensione perché è una d.d.p. e quindi non dipende dal percorso.

La relazione $V = RI$ si dice caratteristica del bipolo.




CORPO CONDUTTORE

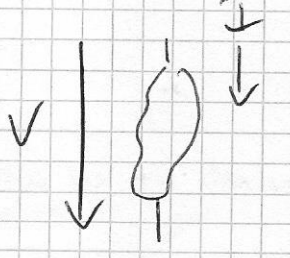
$V = RI$

R = resistenza

$R = \rho \cdot \frac{L_{media}}{S_{media}}$

$\rho$ = Resistività

Il bipolo si chiama resistore e il valore della costante che definisce la sua caratteristica si chiama resistenza




$V^* = -RI$

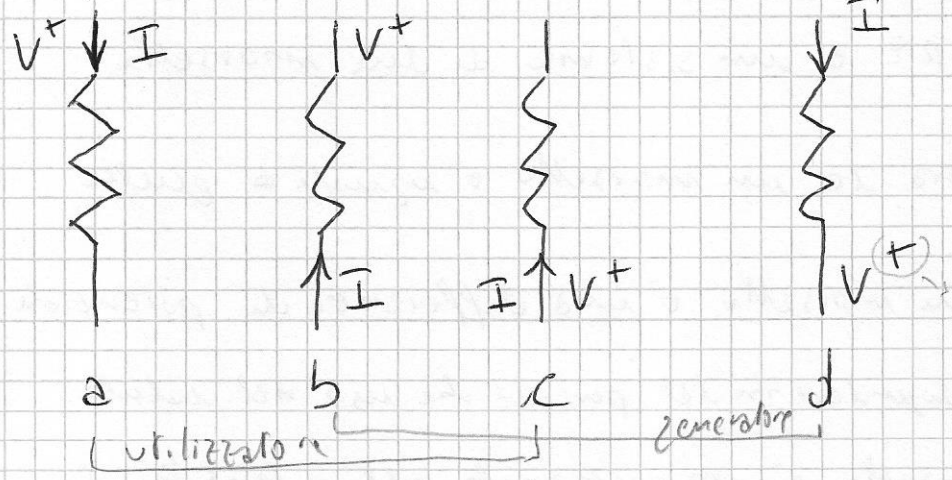
R = resistenza

$R = \rho \frac{L_m}{S_m}$

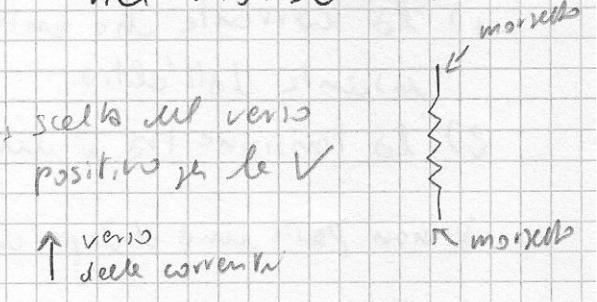
La tensione è invertita rispetto al caso precedente.

In un resistore occorre dunque che siano definiti i versi di tensione e corrente

# CONVENZIONE DEI SEGNI




In a e c la corrente entra nel morsetto V+

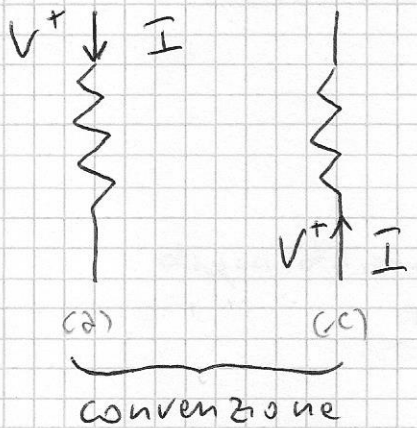



a e c sono la stessa convenzione, d = c ruotato di 180° e prende il nome di convenzione dell'utilizzatore.

b e d sono la stessa convenzione, b = d ruotato di 180° e prende il nome di convenzione del generatore

NELLA CONVENZIONE DELL'UTILIZZATORE I VERSI POSITIVI SCELTI PER LA TENSIONE E LA CORRENTE SONO TALI CHE LA CORRENTE È POSITIVA QUANDO ENTRA NELLO STESSO MORSETTO CHE, SE A POTENZIALE MAGGIORE DELL'ALTRO, DETERMINA UNA V POSITIVA.
Il resistore ha, in questo caso, una caratteristica $V = RI$, con $R > 0$.

# POTENZA




V, la d.d.p., per come è stata definita, è il lavoro compiuto per unità di carica

$V = \int_{\gamma} E \, dl$ integrale del morsetto V+ all'altro morsetto

I è la quantità di carica trasportata nell'unità di tempo

$P = VI$ = Potenza

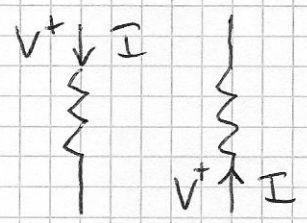
La potenza è il prodotto del lavoro compiuto per unità di carica ($V$) per la quantità di carica trasportata nell'unità di tempo ($I$).
La potenza è il lavoro compiuto nell'unità di tempo.

$P = VI$ = Potenza  Legge di Joule ($dW = Pdt = VI\,dt = RI^2 dt$)

JOULE DIMOSTRÒ CHE IL LAVORO NELL'UNITÀ DI TEMPO CHE VIENE FORNITO AL RESISTORE (LA POTENZA) SI RITROVAVA TUTTO IN CALORE.
IL RESISTORE SI RISCALDA.
LA QUANTITÀ DI CALORE PRODOTTA FEM CORRISPONDENTE ALLA ENERGIA DI QUELLA POTENZA; POTENZA PER INTERVALLO DI TEMPO DELLA MISURAZIONE DELL'ENERGIA.

Unità di misura della POTENZA nel S.I. è il WATT (W).

## Convenzione dell'utilizzatore



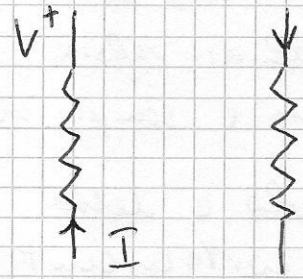

$V = RI$

$P = VI = RI^2$ = Potenza $> 0$

con la convenzione dell'utilizzatore la potenza è un numero positivo

La potenza va in calore, se positiva si dice potenza utilizzata

## Convenzione del generatore




$V = -RI$

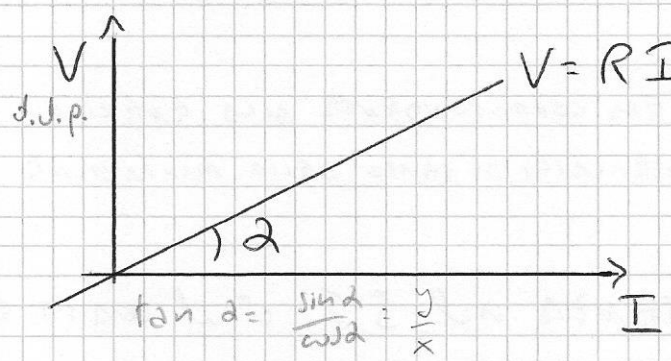
$P = VI = -RI^2$ = Potenza $< 0$

con la convenzione del generatore la potenza viene definita negativa.
Siccome il resistore trasforma energia elettrica in calore, l'energia sarà data da generata negativa, cioè una potenza utilizzata positiva

positiva.

La legge che collega la tensione alla corrente, i due parametri che permettono il funzionamento del bipolo, si chiama, come detto, caratteristica.

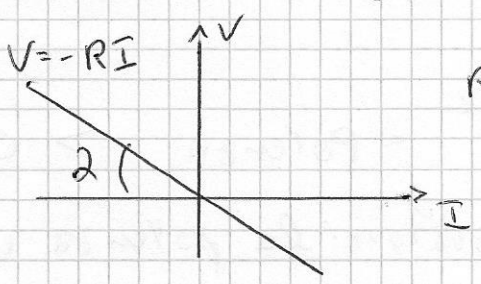
Nel caso particolare del resistore è $V = RI$ come convenzione dell'utilizzatore. Di questa una rappresentazione grafica:




$R = \tan \alpha$

$\alpha = \arctan R$

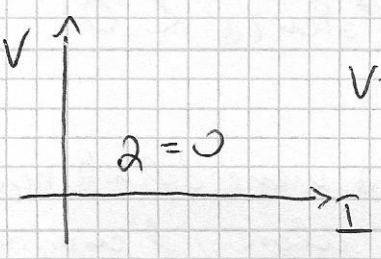
La rappresentazione grafica della caratteristica del resistore nella convenzione del generatore è:




$R = \tan \alpha$

Se R diminuisce, ovvero consideriamo bipoli con resistenze sempre più piccole l'angolo $\alpha$ diminuisce e quando abbiamo bipoli diversi.

Quando $\alpha = 0$ la caratteristica del bipolo coincide con l'asse delle I e questo corrisponde a dire che qualsiasi valore della corrente circola in questo bipolo la tensione è sempre nulla.




$V = RI$ $\quad R = \tan \alpha$

$R = \rho \frac{L}{S}$



rappresentazione del bipolo cortocircuito.

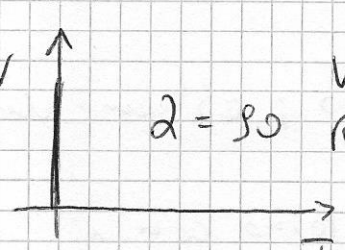
Tale bipolo è detto bipolo cortocircuito; non esiste, è una rappresentazione. CORTOCIRCUITO PERCHÉ' $L \to 0$ ;



[16'10"

Un bipolo cortocircuito è un bipolo che può essere attraversato da qualsiasi corrente senza che ai suoi morsetti si manifesti una d.d.p.

Se l'angolo $\alpha$ aumenta la resistenza aumenta perché $R = \tan\alpha$
La condizione limite è $\alpha = 90°$ in cui $\tan\alpha = \infty$
e quindi la rappresentazione grafica della caratteristica del resistore è la retta che coincide con l'asse delle tensioni, V.
Per questo bipolo, qualsiasi valore della tensione applicata ai suoi morsetti non lascia passare corrente, la corrente è sempre uguale a zero.
Questo bipolo sarà chiamato bipolo a vuoto o circuito aperto




Bipolo a vuoto (o isolante perfetto) o circuito aperto, il suo simbolo è



Dunque un bipolo a vuoto o circuito aperto è un bipolo che con qualsiasi tensione ai morsetti non lascia passare alcuna corrente.

Abbiamo definito 3 tipi di bipolo:
- bipolo resistore
- bipolo cortocircuito
- bipolo a vuoto o circuito aperto

Abbiamo trattato grandezze di tipo diverso come la tensione o la differenza di potenziale; la corrente, intesa come intensità di corrente; la resistenza.
Per questo dobbiamo concepire strumenti in grado di misurare queste grandezze.

STRUMENTI DI MISURA

| | |
|---|---|
| Tensione o d.d.p. | Voltmetro |
| Corrente | Amperometro |
| Resistenza | Ohmmetro |
| Tutte | Multimetro |

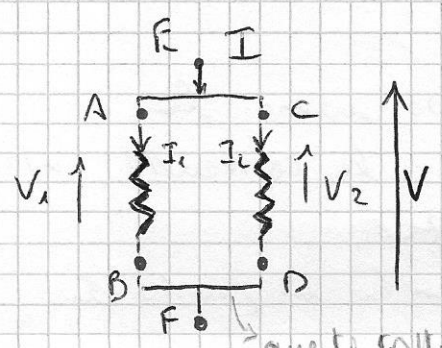
MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI

| | |
|---|---|
| pico (p) | $10^{-12}$ |
| nano (n) | $10^{-9}$ |
| micro ($\mu$) | $10^{-6}$ |
| milli (m) | $10^{-3}$ |
| kilo (k) | $10^{3}$ |
| mega (M) | $10^{6}$ |
| giga (G) | $10^{9}$ |
| Tera (T) | $10^{12}$ |
| Peta (P) | |

Iniziamo a introdurre il concetto di circuito; estraiamo due bipoli resistori e li colleghiamo.
Il bipolo è un oggetto che comunica con l'esterno con i suoi morsetti poiché deve essere caratterizzato solo da un valore della corrente e un valore della tensione.

Due bipoli possono essere collegati mettendo a contatto i morsetti.
Due bipoli possono essere collegati in serie o in parallelo

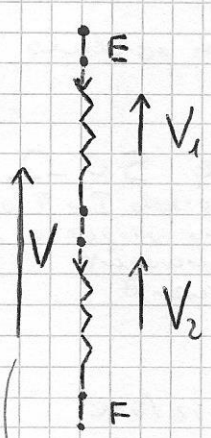
PARALLELO DI RESISTORI




Ai due resistori è applicata la stessa d.d.p., ma essi possono essere attraversati da diverse correnti.
A lato due resistori in parallelo in cui ognuno è attraversato da una corrente.

questi tratti possono essere considerati bipoli cortocircuito, bipoli che fanno passare la corrente senza introdurre d.d.p.

# SERIE DI RESISTORI




I due resistori sono attraversati dalla stessa corrente, ma ai loro morsetti può essere applicata una diversa d.d.p.

V è la tensione che è la d.d.p. tra il morsetto E e il morsetto F. Essi sono i due morsetti che delimitano l'insieme di questi due bipoli collegati in serie. Analogamente al caso in parallelo

↳ questa è la tensione che è la d.d.p. tra il morsetto E e il morsetto F.

I due bipoli, considerati come un tutt'uno, sono un altro bipolo.

Cioè, se considero soltanto i morsetti E e F e voglio la legge caratteristica che lega la tensione ai morsetti E e F e la corrente che circola nei due bipoli, in questo caso collegati in serie, vuol dire che sto considerando un unico bipolo, immaginabile come racchiuso in una scatola, che è l'equivalente della serie di due resistori
Analogamente si può ragionare nel caso di due resistori in parallelo

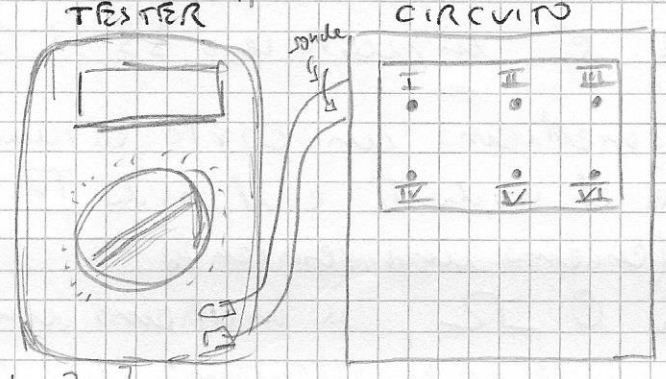
# IL LABORATORIO VIRTUALE [25'27"]

...

# IL MULTIMETRO o TESTER

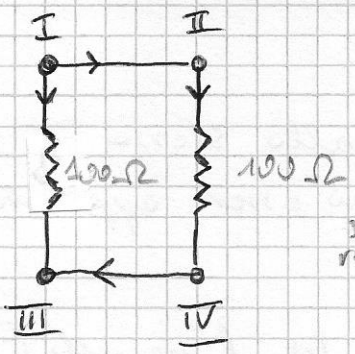
SPIEGAZIONE del TESTER

CIRCUITO rappresentato simbolicamente: si dà il numero di nodi, i bipoli e il valore delle resistenze ecc.




Nel circuito I, II, ..., VI sono i nodi

L.3.7




# Resistori in parallelo

I - III → bipolo resistore 100 Ω
II - IV → bipolo resistore 100 Ω
} in parallelo

(I - III: morsetto nero; sonda = morsetto rosso)

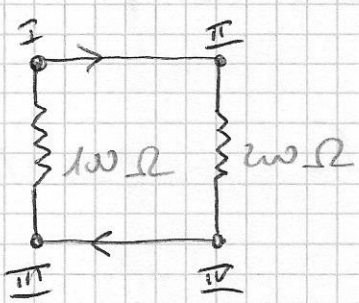
La misurazione della sua resistenza è 50 Ω (convenzione caratteristica) e si fa tra il morsetto I e II oppure tra il morsetto II e IV. Siccome i morsetti I e II sono collegati a un corto circuito vanno considerati come se fossero coincidenti una volta inserito un ramo viene disegnato una freccia che rappresenta il verso della corrente.

Conveniamo di fare sempre la convenzione dell'utilizzatore su tutti i bipoli.

Ad es. sul ramo che va dal nodo 1 al nodo 3 la corrente è positiva nel verso da I a III e la differenza di potenziale su questo ramo sarà la differenza tra il potenziale del nodo I e il potenziale del nodo 3 e non viceversa

Dalla misurazione effettuata, la resistenza in parallelo di due resistori da 100 Ω è 50 Ω (la metà).

Cambiando il valore della resistenza del bipolo resistore ai morsetti II e IV da 100 Ω a 200 Ω, otteniamo una misurazione della resistenza tra i morsetti I e III di 66,67 Ω




Quindi in questo caso la resistenza del parallelo è un po' più grande di quella misurata in precedenza, ma rimane minore a quella dei due resistori messi in parallelo.

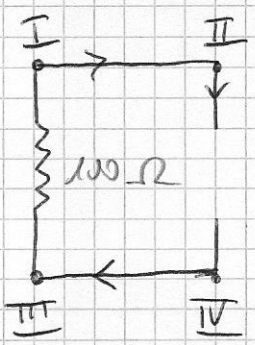
Mettendo tra II e IV un resistore da 50 Ω, ovvero la metà dell'altro otteniamo una misurazione di 33,33 Ω.

La resistenza equivalente è, in questo caso 33,33 Ω

| I - III | II - IV | resist. equivalente in parallelo |
|---|---|---|
| 100 Ω | 100 Ω | 50 Ω |
| 100 Ω | 200 Ω | 66,67 Ω |
| 100 Ω | 50 Ω | 33,33 Ω |

Se mettiamo un corto circuito tra il nodo II e il nodo IV otteniamo una resistenza di 0 Ω, se mettiamo un circuito aperto otteniamo 100 Ω

Il circuito aperto è:




la resistenza equivalente è 100 Ω

La tensione ai due che la tensione $V$ è la stessa sui due bipoli resistori:

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V G$$

$$G = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad G = \text{conduttanza}$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

4.3.10

# LEZIONE 4 — SERIE E PARALLELO; BIPOLO EQUIVALENTE

Prof. L. De Nardis

43' 52"

Nella scorsa lezione abbiamo visto come collegare due bipoli resistori fra di loro. I collegamenti possibili sono in parallelo o in serie.

Nel parallelo i due resistori hanno la caratteristica di essere applicata ai loro morsetti la stessa d.d.p.

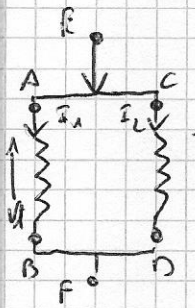
Nella serie nei due resistori circola la stessa corrente

Nel parallelo le correnti nei due rami possono essere diverse

Nella serie le tensioni sui due resistori possono essere diverse

Nella scorsa lezione abbiamo anche misurato la resistenza equivalente di due resistori in parallelo, che segue la legge

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$




Parallelo di resistori

valgono le condizioni $V = R_1 I = R_2 I_2$

$I = I_1 + I_2$

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = VG$$

G = conduttanza

$$G = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

100 // 100 => 50
50 // 100 => 33,33
100 // 200 => 66,66
100 // 0 => 0
100 // ∞ => 100

0 = corto circuito

∞ = circuito aperto

## FORMULA DEL PARTITORE DI CORRENTE

La formula ci dà il valore della corrente in uno dei rami del parallelo in funzione della corrente che entra nel complesso dei due resistori in parallelo e in funzione della resistenza dei due rami in parallelo.

La formula è detta del partitore di corrente trattandosi di una partizione della corrente, cioè due parti della corrente.

$$I_1 = I \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \right]$$

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

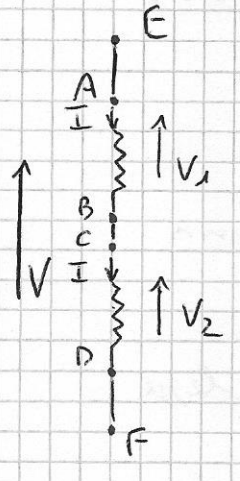
L. 4. 1

La corrente in un ramo di due resistori è pari alla corrente totale per un fattore

Quindi la regola del partitore è che la corrente in un ramo è uguale alla corrente totale per la resistenza del ramo opposto e diviso per la somma delle due resistenze in parallelo.

Nella serie i resistori sono attraversati dalla stessa corrente mentre le tensioni sui due resistori possono essere ovviamente diverse

SERIE DI RESISTORI




$$I = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2}$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = R_1 I + R_2 I = R I$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$G = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

FORMULA DEL PARTITORE DI TENSIONE DI SERIE DI RESISTORI

$$I = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2}$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = R_1 I + R_2 I = R I$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$V_1 = V - V_2$$

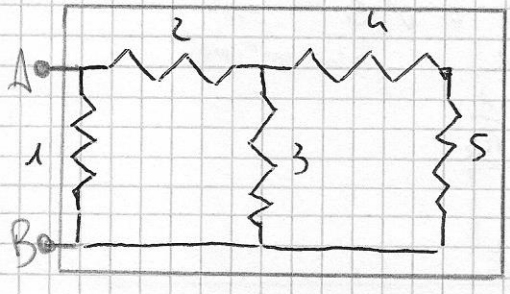
$$V_1 = V - R_2 I = V - R_2 \frac{V}{R}$$

$$V_1 = V \left[ 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right]$$

$$\boxed{V_1 = V \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

# PIU' BIPOLI 15'30"

I bipoli possono essere collegati fra loro a formare un circuito




Collegamento di 5 bipoli.

Per convenzione ad ogni bipolo viene associato un numero che indicherà il lato, cioè $R_1$ sarà la resistenza del bipolo 1, $V_1$ la tensione, $I_1$ la corrente che vi circola.

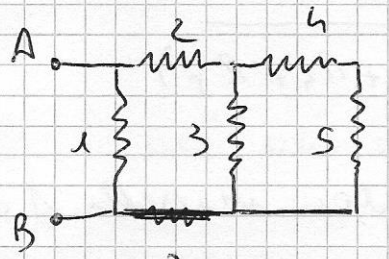
Quando i bipoli vengono numerati

Sono scelti due punti, A e B, del circuito, uno dei due morsetti di un bipolo qualunque.

Tutto il circuito racchiuso nel riquadro è equivalente a un bipolo, ~~equivalente~~ Questo perché ha due morsetti soltanto, i due morsetti A e B scelti.

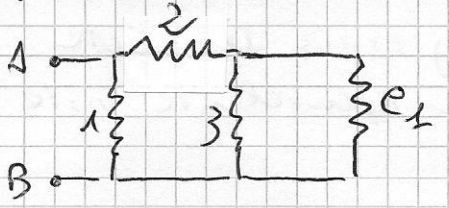
L.4.2 Questo circuito, visto dai due morsetti A e B

deve essere equivalente ad un bipolo. (perché i morsetti sono una coppia)



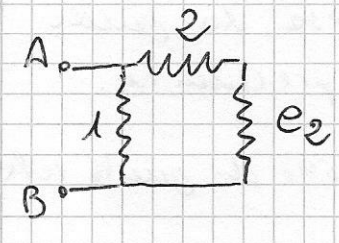

$R_4$ e $R_5$ sono in serie, quindi equivalgono a poter sostituirli con una resistenza equivalente pari a $R_4 + R_5$, cioè

$R_{e1} = R_4 + R_5$ e quindi abbiamo la possibilità di sostituire i bipoli 4 e 5 con il bipolo $e_1$.



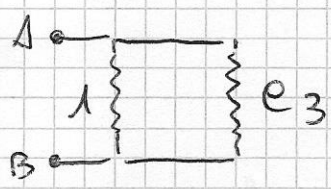

Il processo può essere portato avanti in modo analogo: $R_{e1}$ e $R_3$ sono in parallelo, cioè il resistore $e_1$ ha, ai suoi morsetti, applicata la stessa tensione del resistore $R_3$. Quindi ai due resistori $R_{e1}$ e $R_3$ possono essere sostituiti con una resistenza equivalente $R_{e2}$ calcolata come segue:

$$R_{e2} = R_{e1} \cdot \frac{R_3}{R_{e1} + R_3}$$



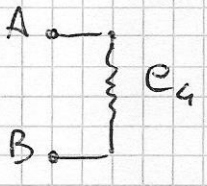

Ora $R_2$ e $R_{e2}$ sono in serie ed ai due resistori $R_2$ e $R_{e2}$ può essere sostituita una resistenza equivalente

$$R_{e3} = R_2 + R_{e2}$$




$R_{e3}$ e $R_1$ sono in parallelo, ai morsetti dei due resistori è applicata la stessa tensione. Quindi ai loro parallelo è possibile sostituire un unico resistore di resistenza $R_{e4}$ pari a

$$R_{e4} = R_1 \cdot \frac{R_{e3}}{R_1 + R_{e3}}$$




Abbiamo quindi ridotto la rete vista ai morsetti A e B ad un unico bipolo la cui resistenza è $R_{e4}$, pari a:

$$R_{eq} = R_1 \cdot \frac{R_3(R_4+R_5) + R_2(R_3+R_4+R_5)}{R_3(R_4+R_5) + (R_1+R_2)(R_3+R_4+R_5)}$$

$50\,\Omega \quad 50\,\Omega \quad 100\,\Omega \quad 50\,\Omega \quad 100\,\Omega \quad 50\,\Omega \quad 100\,\Omega \quad 50\,\Omega$

$R_1 = 33{,}67\,\Omega$

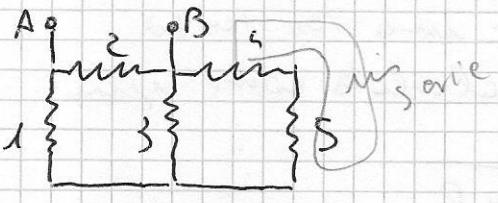
$50\,\Omega \quad 100\,\Omega \quad 50\,\Omega \quad 50\,\Omega \quad 100\,\Omega \quad 50\,\Omega \quad 100\,\Omega \quad 50\,\Omega$

$R_{eq}$ è la resistenza equivalente vista dai morsetti A e B.

Questo procedimento è detto riduzione progressiva della rete allo scopo di determinare la resistenza equivalente vista da una coppia di morsetti.

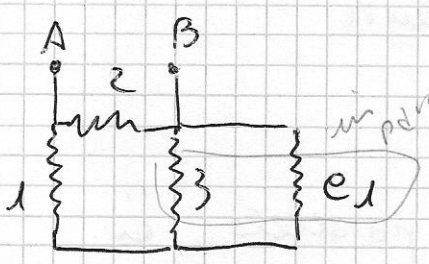
In generale deve sempre essere possibile calcolare la resistenza equivalente vista a due morsetti di una rete.

Si deve osservare che la riduzione della rete è stata parzialmente condizionata dalla scelta dei morsetti A e B. Con una scelta differente dei morsetti A e B, il risultato è in generale diverso.



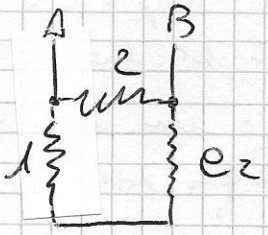

Nello semplice in laboratorio virtuale si ricava una resistenza equivalente di $46{,}67\,\Omega$, diversa da quella ottenuta con i morsetti precedenti.

Vediamo dunque la riduzione di questa rete.



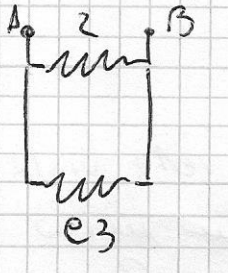

$R_4$ e $R_5$ sono in serie

$$R_{e1} = R_4 + R_5$$




$R_{e1}$ e $R_3$ sono in parallelo

$$R_{e2} = R_{e1} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_{e1}}$$

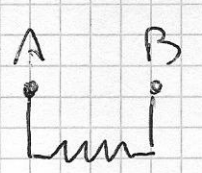



$R_{e2}$ e $R_1$ sono in serie

$$R_{e3} = R_1 + R_{e2}$$

$R_{e3}$ e $R_2$ sono in parallelo

$$R_{eq} = R_{e3} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_{e3}}$$




La resistenza equivalente vista dai morsetti A e B è:

$$R_{eq} = R_2 \cdot \frac{R_3 (R_4 + R_5) + R_1 (R_3 + R_4 + R_5)}{R_3 (R_4 + R_5) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4 + R_5)}$$

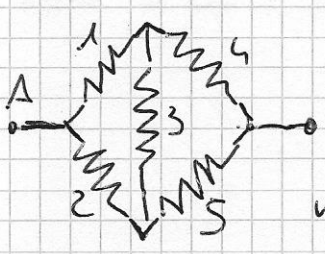
Confrontando le due $R_{eq}$ ottenute, vediamo che il denominatore è uguale, mentre cambia il numeratore.

Quindi il valore della resistenza equivalente dipende dalla scelta dei morsetti.
Finora abbiamo visto la riduzione usando le formule della serie e del parallelo.

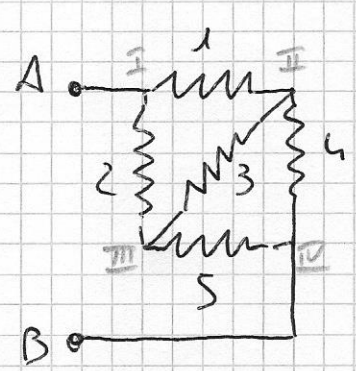
ATTENZIONE!

- Non tutti i circuiti, visti da due morsetti, possono essere ricondotti ad un unico bipolo utilizzando soltanto le formule della serie e del parallelo!

Ad esempio nel circuito a ponte, come sotto riportato:

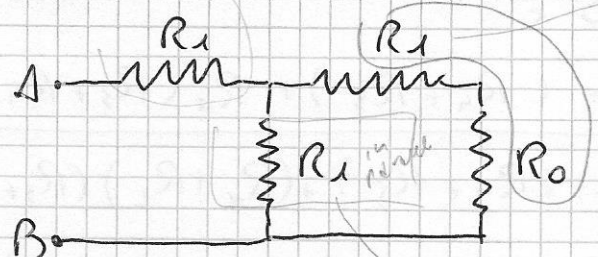



Tale circuito (detto di prova) ha caratteristiche che lo rendono molto utile nelle misure. Viene adottato come circuito per la misura del valore di componenti in generale e in particolare delle resistenze.
Il circuito può essere anche disegnato come sotto; si vede come non ci sia nessuna coppia di bipoli che possa ritenere o in serie o in parallelo.
Il procedimento di riduzione visto finora (serie e parallelo) non è applicabile.
In realtà, con una trasformazione che si chiama stella - triangolo o triangolo - stella che vedremo più avanti nella lezione, sarà possibile risolvere questo caso alla possibilità di identificare il valore della unica resistenza vista tra i morsetti A e B.




Nel multimetro virtuale la resistenza vista ai morsetti A e B è pari a 50 Ω con tutte resistenze da 50 Ω = Ponte in Equilibrio.
Tra II e I c'è lo stesso potenziale per simmetria ecc. per spiegazione intuitiva
L.G.S

Esercizi

1) 

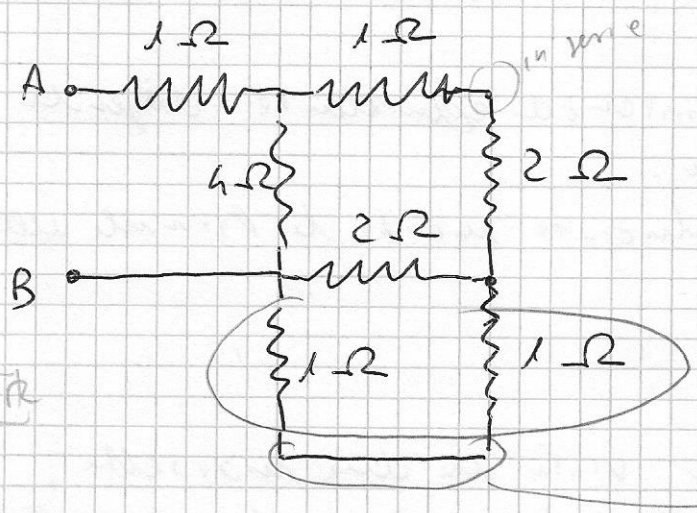

in serie

in parallelo

$R_{e_1} = R_1 + R_0$

$R_{e_2} = R_{e_1} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{e_1}} = \frac{(R_1 + R_0) R_1}{R_1 + R_1 + R_0}$

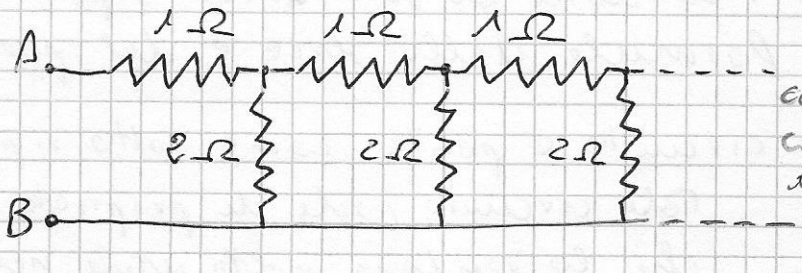
$R_{e_3} = R_1 + \frac{R_{e_2} \cdot R_1}{R_1 + R_{e_2}} = R_1 + \frac{\frac{(R_1 + R_0) R_1}{R_1 + R_1 + R_0} \cdot R_1}{R_1 + \frac{(R_1 + R_0) R_1}{R_1 + R_1 + R_0}}$

2) 


in serie

I° step: quelli sono in serie perché è un corto circuito

R=3R

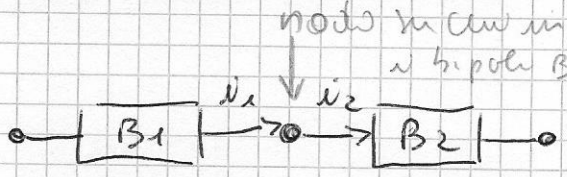
3) 


rete infinita

cascata infinita di elementi composti da una resistenza da 1 Ω e una da 2 Ω

[SOLUZIONI a Pag 32 del Testo]

# BIPOLI CONNESSI in SERIE




$i_1 = i_2$ convenzione scegliendo opportuni versi di riferimento

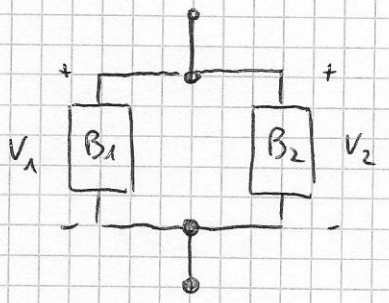
Due bipoli SONO CONNESSI IN SERIE se sono gli unici che incidono su uno stesso nodo

notazione: $B_1 - B_2$

La resistenza equivalente è la somma delle due resistenze

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

# BIPOLI CONNESSI in PARALLELO




$V_1 = V_2$ tensioni scegliendo opportuni versi di riferimento.

Due bipoli SONO CONNESSI IN PARALLELO se i loro terminali sono connessi alla stessa coppia di nodi

notazione: $B_1 // B_2$

La resistenza equivalente è data dal prodotto delle due resistenze diviso la somma

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

# LEZIONE 5 - I GENERATORI; CLASSIFICAZIONE DEI BIPOLI

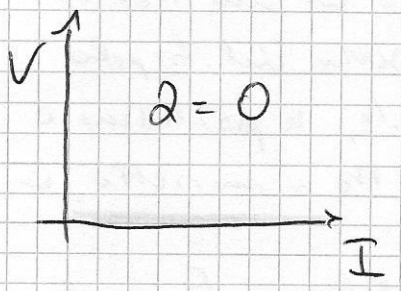
Prof L De Menna

46' 25"

In questa lezione vogliamo introdurre nuovi bipoli, dopo il bipolo resistore, il bipolo corto circuito e il bipolo circuito aperto.

Il bipolo corto circuito è un bipolo che consente il passaggio di una qualsiasi corrente senza presentare ai suoi morsetti nessuna d.d.p.

Il bipolo corto circuito è stato ottenuto nel piano V I rimanendo la caratteristica di un resistore




Traslando verso l'alto la caratteristica del bipolo corto circuito all'asse delle I, abbiamo una retta che rappresenta un possibile legame tra tensione (V) e corrente (I).



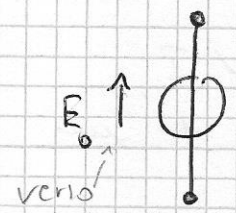

GENERATORE IDEALE DI TENSIONE: UN BIPOLO CHE FORNISCE LA STESSA TENSIONE INDIPENDENTEMENTE DALLA CORRENTE CHE LO ATTRAVERSA

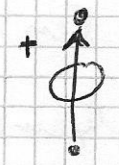
Il legame è che qualsiasi sia la corrente che attraversa il bipolo la tensione ai suoi morsetti è sempre costante ed è pari ad un determinato valore $E_0$

Se esiste un tale bipolo, esso fornisce la stessa tensione indipendentemente dalla corrente che lo attraversa.
L'aspetto della caratteristica non cambia facendo riferimento alla convenzione dell'utilizzatore o del generatore.
Nel cambiare la convenzione si inverte il segno di una delle due grandezze, corrente o tensione.

Supponiamo di aver fatto la convenzione del generatore sul bipolo in questione. Allora i punti della retta sono caratterizzati dalle possibili del prodotto V I.

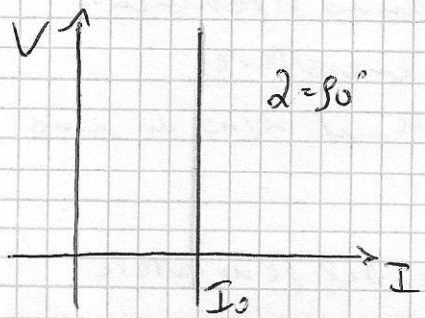
In questo caso, la potenza "erogata", a causa della convenzione del generatore, è positiva.
Questo non è un sistema passivo, il bipolo è attivo perché è in grado di erogare potenza
Potenza positiva vuol dire che le cariche positive si muovono nel verso che va dal morsetto a potenziale inferiore al morsetto a potenziale superiore, quindi contro la forza del campo.
Un tale bipolo deve mettere in gioco delle forze di natura diversa da quelle conservative e per questo motivo viene detto generatore.




Il simbolo del bipolo generatore è rappresentato con un cerchio con un trattino nella direzione del morsetto del bipolo.
Tale bipolo è reversibile, a portarmo a 0 la tensione $E_0$ che era ai morsetti, o un bipolo cortocircuito.
La tensione ai morsetti del bipolo generatore è $E_0$ nel senso che la d.d.p. tra il morsetto superiore e quello inferiore è pari a $E_0$.
Altra rappresentazione è 

Un tale generatore è detto generatore ideale di tensione (o di f.e.m.)

Definiamo ora il bipolo duale e cioè il bipolo generatore ideale di corrente partendo dal bipolo circuito aperto.
Quest'ultimo è stato ottenuto ruotando la caratteristica in senso antiorario fino ad annullare l'angolo $\alpha$ a 90°.




Il bipolo circuito aperto sopporta qualsiasi tensione senza consentire il passaggio di alcuna corrente.
La corrente è sempre nulla.

Traslando verso destra la caratteristica del bipolo circuito aperto otteniamo una nuova

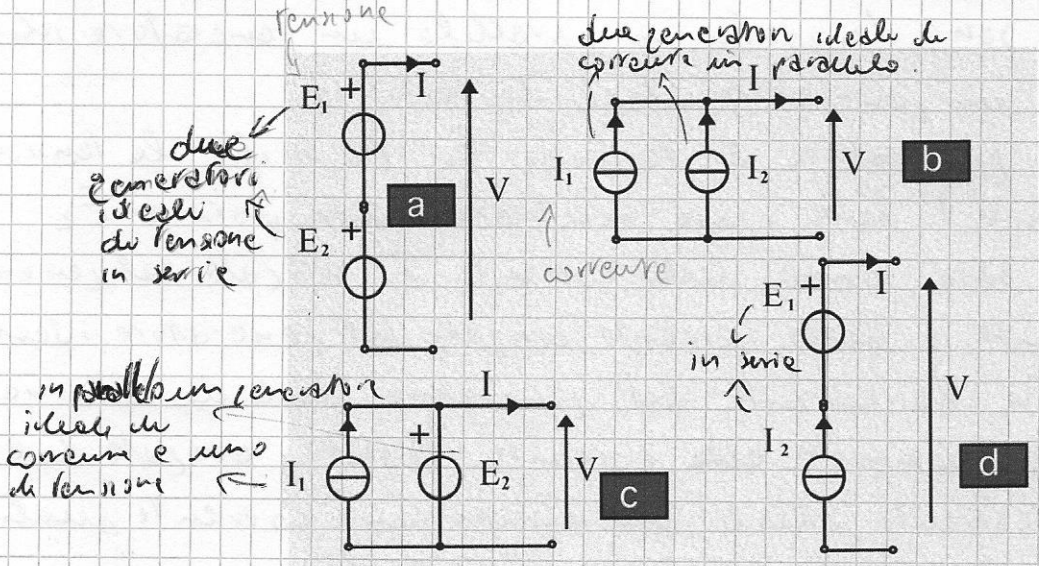
GENERATORE IDEALE DI CORRENTE: UN BIPOLO CHE FORNISCE SEMPRE LA STESSA CORRENTE INDIPENDENTEMENTE DALLA TENSIONE AI SUOI MORSETTI.

caratteristica. Un bipolo con tale caratteristica eroga sempre la stessa corrente $I_0$ indipendentemente dalla tensione ai suoi morsetti.
Parleremo dunque di generatore ideale di corrente.




Il simbolo per rappresentare il generatore di corrente è mostrato a lato
La freccia che attraversa il cerchietto che rappresenta il bipolo è ortogonale alla linea che congiunge gli morsetti e ricordiamo, se serve, che il bipolo generatore ideale di corrente è ricavato partendo dal bipolo circuito aperto.

Avendo introdotto due nuovi bipoli vediamo alcuni possibili collegamenti, anche con altri bipoli già visti.
Nel collegamento a sono disposti in serie, perché sono attraversati dalla stessa corrente due bipoli generatori ideali di tensione, $E_1$ e $E_2$.
Ai morsetti del bipolo equivalente avrò una tensione che è la somma di $E_1$ con $E_2$. Si ricorda che $E_1$ è la d.d.p. tra il morsetto superiore e quello inferiore del primo bipolo. $E_2$ è la d.d.p. tra il morsetto superiore e quello inferiore del secondo bipolo.




La d.d.p. fra il morsetto superiore e quello inferiore del bipolo complessivo sarà la somma $E_1 + E_2$.
La corrente è indeterminata: è possibile perché qualsiasi può essere la corrente nei due generatori ideali di tensione che sono in serie.
Quindi, disponendo in serie due generatori ideali di

tensione si ottiene un unico generatore ideale di tensione che ha una tensione pari alla somma, con i versi che abbiamo assunto, delle due tensioni dei generatori componenti ed in serie.

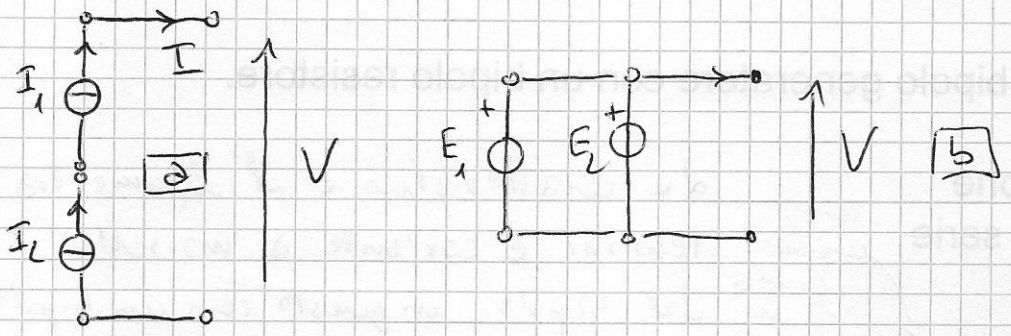
Nel caso **b** i due generatori ideali sono di corrente e sono in parallelo. Questo è il caso duale del caso b.
La tensione ai capi di un generatore ideale di corrente è indeterminata nel senso che può essere qualsiasi.
La corrente è, invece, fissata. I due generatori erogano una corrente $I_1$ e $I_2$ e poiché sono disposti in parallelo, ai morsetti complessivi, quelli dove è misurata la tensione V dove c'è il bipolo complessivo la corrente è la somma delle due correnti $I_1$ e $I_2$.
Il bipolo complessivo è caratterizzato dal fatto che la corrente che esso eroga è fissata ed è pari a $I_1 + I_2$, mentre la tensione è indeterminata ed è qualsiasi.
Quindi il bipolo equivalente di due bipoli generatori ideali di corrente è un generatore ideale di corrente.

Nel caso **c** sono disposti in parallelo un generatore ideale di corrente e un generatore ideale di tensione.
La presenza del generatore di tensione $E_2$ fa sì che la tensione ai morsetti (V) deve essere necessariamente pari a $E_2$.
La corrente I sarà somma della corrente $I_1$ erogata dal generatore ideale di corrente e della corrente erogata dal generatore ideale di tensione. Ma la corrente del generatore ideale di tensione è qualsiasi e, sommata alla corrente fissata, erogata dal generatore di corrente ideale dà ancora una corrente qualsiasi, di qualsiasi valore.
In conclusione il bipolo così costruito è un generatore ideale di tensione perché ai suoi morsetti la tensione è sempre la stessa e la corrente può essere qualsiasi.

Nel caso **d**, duale del precedente, abbiamo in serie un generatore ideale di tensione con un generatore ideale di corrente.

La corrente che eroga il bipolo complessivo è necessariamente pari a $I_2$ perché i due generatori sono in serie e quindi la corrente I deve essere uguale alla corrente del generatore ideale di corrente, quindi I è fissata.
La tensione ai suoi morsetti, indicata con V è la somma della tensione sul generatore ideale di tensione con quella del generatore ideale di corrente. Quest'ultima può essere qualsiasi e quindi la tensione ai morsetti del complesso del bipolo risultante è qualsiasi, mentre la corrente è fissata. Quindi il caso a corrisponde a un generatore ideale di corrente (corrente fissata, tensione qualsiasi).

Di seguito due collegamenti non leciti:




COLLEGAMENTI NON LECITI!

Nel collegamento a sono disposti in serie due generatori ideali di corrente. In questo c'è una contraddizione in quanto, essendo in serie i due generatori, devono essere attraversati dalla stessa corrente. Ma i due generatori ideali di corrente hanno ognuno una loro corrente propria da erogare, in particolare $I_1$ e $I_2$. Non è detto che $I_1$ e $I_2$ siano uguali.
La contraddizione non è risolvibile.
Evidentemente sono entrate in contrasto due idealità, quella del generatore ideale di corrente che necessariamente vuole imporre la sua corrente e quella del collegamento in serie che, per noi, significa che i due bipoli sono attraversati dalla stessa corrente.

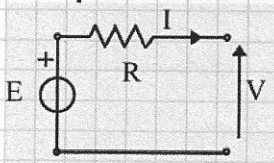
È evidente che non è possibile costringere a due generatori ideali di corrente, proprio per le loro idealità, ad erogare la stessa corrente

Il collegamento in serie di due generatori ideali di corrente non è possibile, non è ammissibile. Il fatto che non sia ammissibile significa che i bipoli ideali che abbiamo introdotto non sono adattabili a questa possibilità di collegamento. I generatori reali di cui questi bipoli ideali saranno la rappresentazione idealizzata, in realtà si comportano diversamente.

Nel caso dei generatori ideali di tensione collegati in parallelo abbiamo il discorso duale del precedente. Le due tensioni del generatore sono $E_1$ ed $E_2$, non sono fissate, non necessariamente sono uguali. Il collegamento in parallelo esigerebbe che i due bipoli siano sottoposti alla stessa tensione e queste due idealità entrano in contrasto e quindi il collegamento non è possibile.
Una batteria per automobile, specie nella fase iniziale, è abbastanza simile ad un generatore ideale di tensione. E' sconsigliabile mettere in parallelo due batterie e vedremo questo caso all'introduzione di un bipolo generatore reale.

Si può collegare un bipolo generatore con un bipolo resistore.

Generatore di tensione
e bipolo resistore in serie



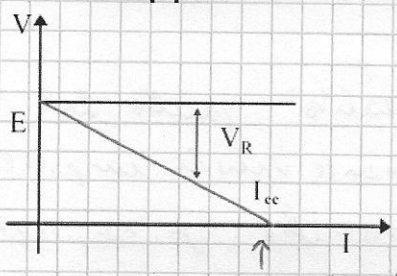

$V = E - RI;$

$E = V - V_R.$

La caratteristica è il legame tra tensione e corrente di morsetto del bipolo, in questo caso un bipolo equivalente della serie di un generatore di tensione e di un resistore

Vediamo quale sia la caratteristica che ne viene fuori.
La convenzione è quella del generatore, la corrente esce dal morsetto verso il quale si rivolge la freccia che rappresenta la tensione.

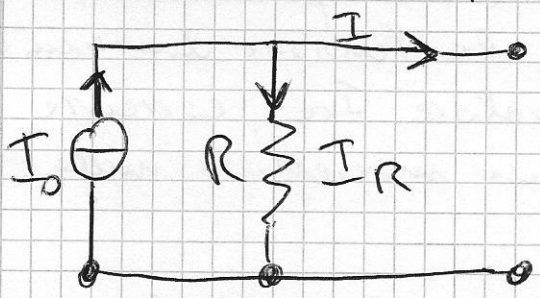
Nella rappresentazione del piano V I abbiamo




corrente di corto circuito, la tensione ai morsetti del bipolo è zero.

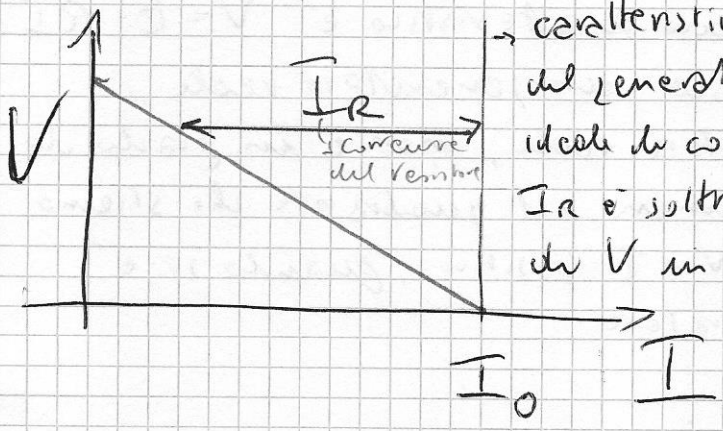
La d.d.p. fra i morsetti superiore del generatore e quello inferiore. La d.d.p. RI, caratteristica del resistore, è quella fra i due morsetti del resistore.

GENERATORE DI TENSIONE IDEALE E BIPOLO RESISTORE IN PARALLELO



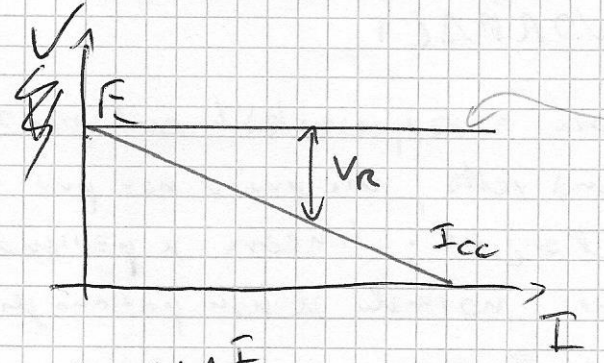

$$I = I_0 - I_R$$

$$I = I_0 - \frac{V}{R}$$

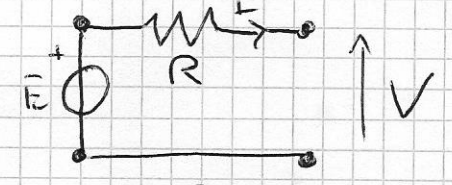



→ caratteristica del generatore ideale di corrente, di valore $I_0$.
$I_R$ è sottratta a $I_0$, $I_R$ aumenta all'aumentare di V in quanto è la corrente che circola nel resistore, ed è proporzionale alla tens. V
$I_R$ non va ai morsetti del bipolo equivalente.

Un generatore ideale di tensione può erogare una qualsiasi potenza.
La tensione è costante e la corrente può essere qualsiasi, con la corrente a ∞ la potenza erogata tende all'∞.

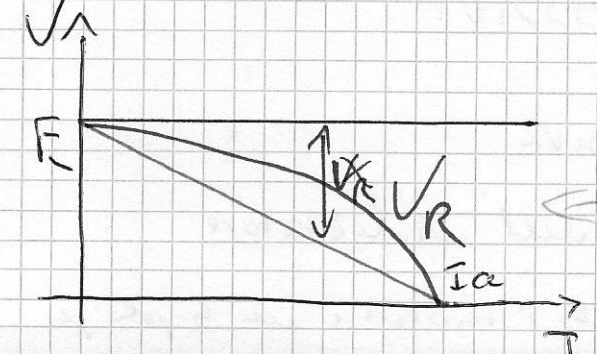



È evidente che nessun sistema fisico può erogare in grado di erogare una potenza infinita o, diciamo, grande quanto si vuole.




$$V = f_E - RI$$

Un generatore reale deve avere una caratteristica di tipo diverso, in cui la tensione ai suoi morsetti non è indipendente dalla corrente che eroga ma, mano che la corrente erogata dal generatore aumenta, la tensione ai morsetti deve diminuire in modo da assorbire la potenza fornita dal generatore.




L.S.7

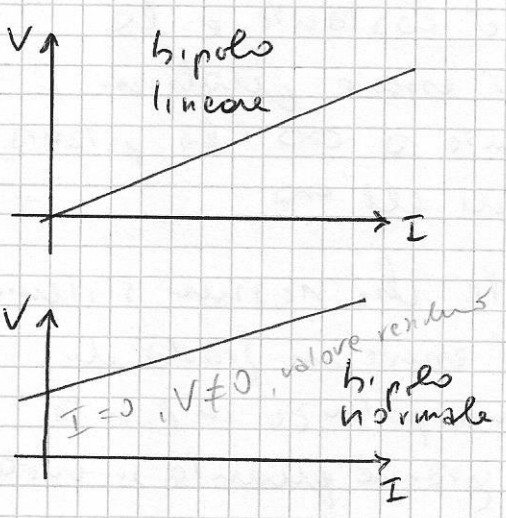
Il generatore reale non può erogare una potenza infinita. Man mano che la corrente aumenta, la tensione diminuisce e quando la corrente raggiunge il valore $I_{cc}$, corrente di corto circuito, la tensione ai suoi morsetti è nulla e quindi la sua potenza è nulla

Da questo punto di vista, il bipolo generatore reale con in serie un resistore, la cui caratteristica è $V = E - RI$, rappresenta in modo più realistico un generatore reale. Almeno perché, come il generatore reale, non è in grado di erogare una potenza infinita almeno nel quadrante che stiamo considerando, cioè per valori di V e I positivi, quando si è assunta la convenzione del generatore.

## CLASSIFICAZIONE DEI BIPOLI:

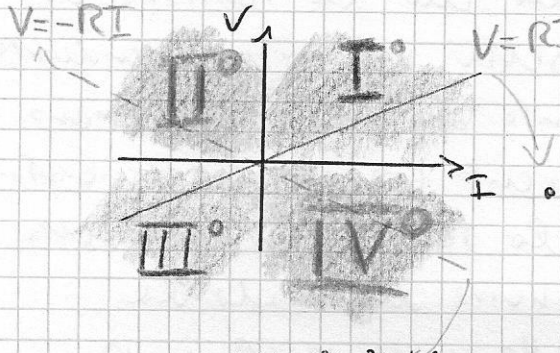
## BIPOLI LINEARI e BIPOLI NORMALI

non lineare




- Bipolo lineare = rappresentabile nel piano V I da una retta, che può o non può passare per l'origine: lineari se passano per l'origine, normali se non passano per l'origine

## BIPOLI ATTIVI e BIPOLI PASSIVI




- convenzione del generatore

bipolo passivo

- convenzione dell'utilizzatore

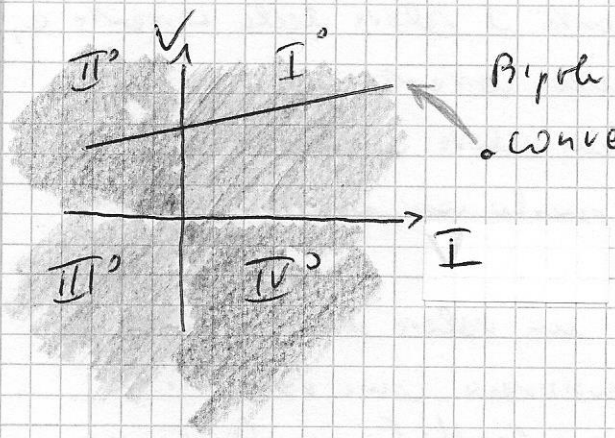
Abbiamo visto che il resistore è un bipolo per cui, se su di lo la convenzione dell'utilizzatore, la potenza assorbita è sempre positiva.

Questo corrisponde al fatto che la caratteristica $V = RI$ del bipolo resistore giace sempre nel I° e III° quadrante. Considerando la convenzione del generatore vale retta giace nel II° e IV° quadrante; la caratteristica del bipolo resistore è in questo caso $V = -RI$

Diremo che il bipolo, almeno a questo livello, del regime stazionario che stiamo considerando, è passivo se la sua caratteristica, avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore, giace tutta nel I° e III° quadrante.

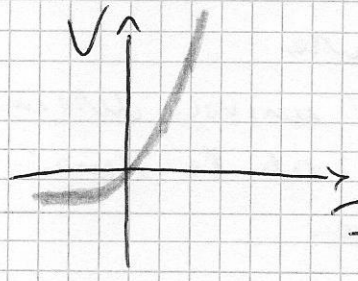
Oppure, avendo fatto la convenzione del generatore, la sua caratteristica giace tutta nel II° e IV° quadrante.

I bipoli che non godono di questa proprietà vengono detti non passivi o attivi

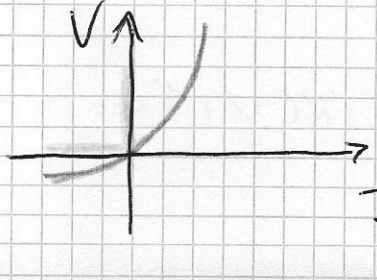



Bipolo attivo
convenzione del generatore

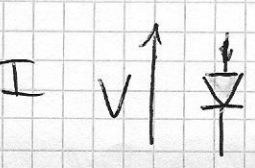
# BIPOLI LINEARI E NON LINEARI




Diodo reale



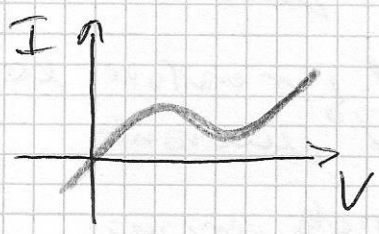

Diodo ideale




I diodi non lineari sono rappresentati da una curva nel piano V-I.
Il diodo reale ha tensione negative molto bassa per correnti negative.
Per correnti positive la tensione è positiva e può crescere e può

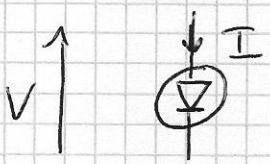
essere molto elevata.
Il diodo reale tende a far passare la corrente in un verso e invece tende a ostacolare il passaggio della corrente nell'altro verso.
Se vogliamo idealizzare questo comportamento potremmo pensare ad una caratteristica del tutto tende: corrente nulla per tensione negative e corrente qualsiasi per tensione positiva

Un altro bipolo non lineare,




## Il diodo Tunnel.

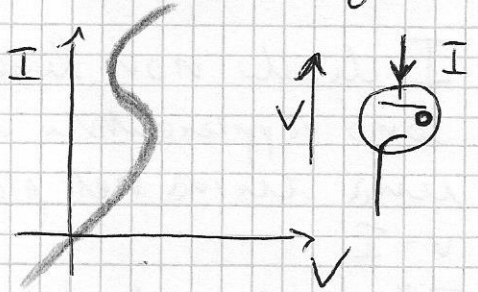
Il diodo Tunnel è un bipolo controllato in tensione (dando la tensione la corrente è univocamente determinata)




Si nota come, dato un valore della tensione determino facilmente il valore della corrente e, dato un valore della corrente ci sono in alcuni casi più di un valore di tensione

Per sapere quale sia il valore esatto in questo caso, occorre avere ulteriori informazioni.
I bipoli che hanno la caratteristica a un valore se si considera la tensione mentre è a più valori se si considera come variabile la corrente prendono il nome di bipoli controllati in tensione

Il caso duale a questo è il diodo a gas, che è un diodo controllato in corrente

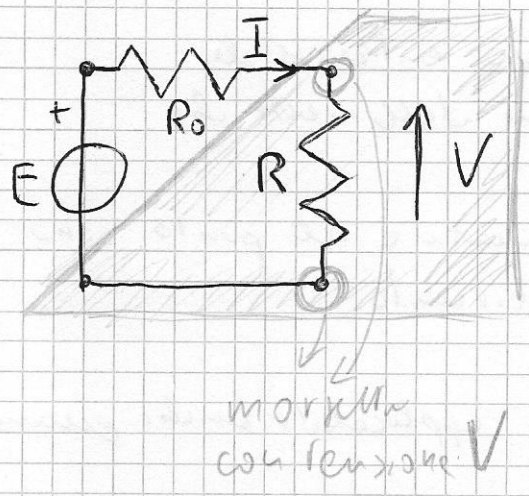



Data la corrente è univoco determinare la tensione. Non vale la stessa cosa data la tensione.

# SOLUZIONE GRAFICA DI UN CIRCUITO ELEMENTARE

Vediamo come determinare il valore della corrente in un circuito

elementare come in figura semplicemente dal punto di vista grafico.




Abbiamo in parallelo un generatore reale idealizzato e cioè il generatore di tensione con insieme la resistenza, con un altro resistore R.

Volendo risolvere analiticamente il problema e calcolare il valore della corrente I che circola in questa serie di più bipoli, dobbiamo considerare la caratteristica del generatore reale idealizzato:

$$V = E - R_0 I$$

La caratteristica del bipolo resistore R, collegato in parallelo al generatore reale idealizzato:

$$V = R I$$

e, a questo punto risolvere in funzione di I.

$$I = E \cdot \frac{1}{R + R_0}$$ -> $R_0$ e $R_0$ in serie, non è

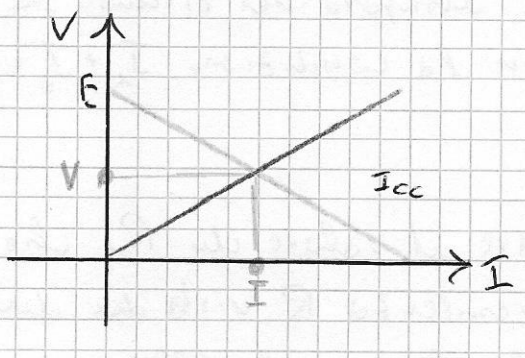
$V = E - R_0 I$
$\parallel$
$RI$

$RI = E - R_0 I$

$RI + R_0 I = E$

$I = E \cdot \frac{1}{R_0 + R}$

Si può risolvere graficamente tracciando la curva nel diagramma delle tensioni V - I:




$$V = E - R_0 I$$

$$V = RI$$

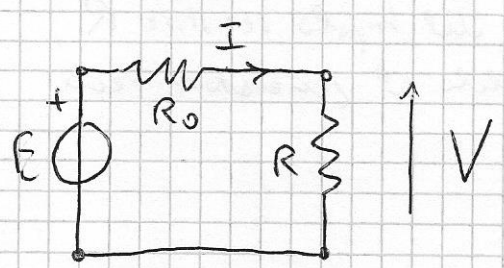
La tensione V è la stessa ai morsetti del generatore idealizzato e del resistore R e la corrente I è la stessa nei due bipoli.

Ai due morsetti ai quali c'è la tensione V devono essere soddisfatte

le due leggi caratteristiche $V = E - R_0 I$ e $V = RI$, quella del generatore reale ideale e quella del resistore di valore $R$.
Graficamente, l'unico punto che soddisfa entrambe le caratteristiche è il punto di intersezione delle rette che rappresentano le caratteristiche.
I particolari valori di $V$ e $I$ corrispondenti a tale punto sono i valori di tensione e corrente nel circuito.

Questo metodo di soluzione grafica è applicabile anche quando uno dei due bipoli è non lineare.

## ESERCIZI

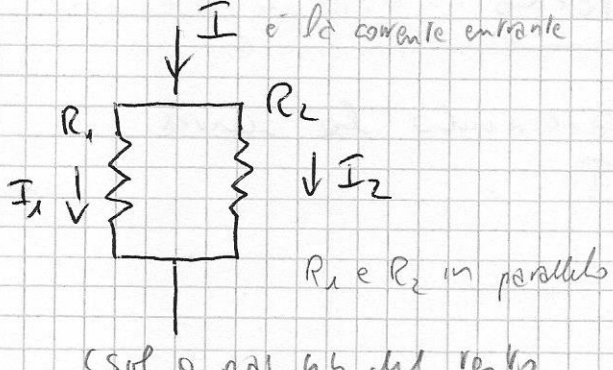



(Proposto a pag. 31-35 del pdf del testo)

(Sol. a pag. 43 del testo)

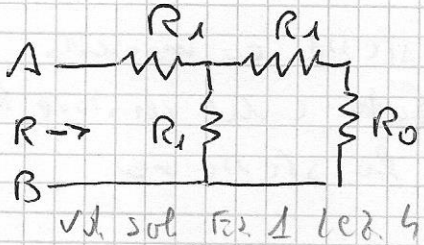
Trovare il valore di $R$ che rende massima la potenza dissipata nella stessa resistenza $R$

CAL VARIARE DI R LA POTENZA DISSIPATA DELLA RESISTENZA CAMBIA.
PER R=0 la POTENZA DISSIPATA È NULLA PERCHÉ È NULLA LA TENSIONE SULLA RESISTENZA ED È NULLA LA POTENZA DISSIPATA QUANDO LA RESISTENZA VA ALL'INFINITO, PERCHÉ LA CORRENTE È NULLA, QUINDI CI DEVE' UN MASSIMO)




(Sol. a pag. 44 del testo)

Determinare la ripartizione delle correnti nei due rami imponendo che la potenza dissipata nel circuito sia minima con la condizione $I_1 + I_2 = I$




vd. sol Es. 1 Lez. 4 che ho fatto

Determinare il valore di $R_1$ che rende la resistenza $R$ vista dai due morsetti A e B uguale alla resistenza $R_0$ di carico.
[fatto, vd. Es. 1 Lez 4]

L. 5. 12

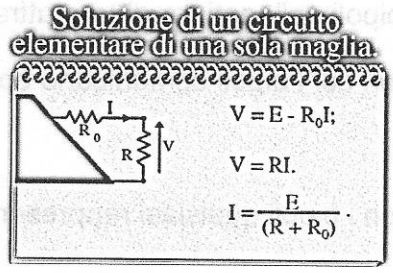
Prossima Lez è Capitolo II del Testo.

LEZIONE 6

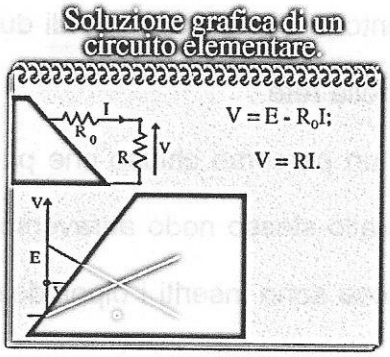
# Le leggi di Kirchhoff: il grafo della rete

Prof. Luciano De Menna
45'31 "

Circuito di una maglia
Circuiti a più maglie
Leggi di Kirchhoff
Grafo albero e coalbero di una rete
Equazioni indipendenti ai nodi ed alle maglie
Equazioni nelle incognite tensioni e correnti di lato
Esercizi



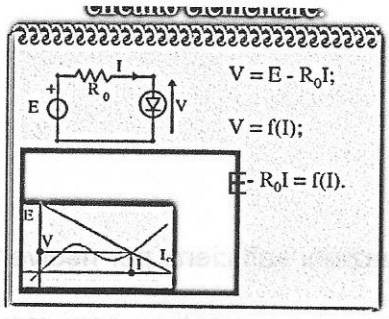

Nella scorsa lezione abbiamo visto come risolvere un circuito elementare composto da due bipoli disposti in serie . Il primo bipolo era un generatore reale idealizzato, cioè un generatore ideale di tensione con in serie un resistore e l'altro bipolo un resistore.




Dalle due caratteristiche, uguagliando le due tensioni si ricava immediatamente la corrente.

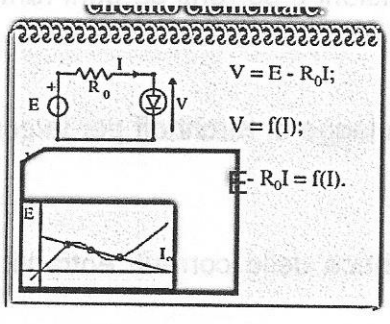
Abbiamo visto la soluzione grafica di questo in cui la soluzione è il punto di incontro di due rette.

Questa soluzione grafica è applicabile anche nel caso in cui il bipolo è un bipolo non lineare la cui rappresentazione grafica (la caratteristica) non è una retta ma una curva.




In figura il bipolo non lineare diodo tunnel la cui caratteristica è V = f(I).

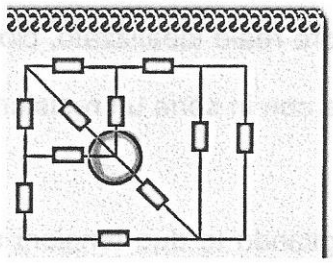
L'uguaglianza delle due tensioni porta al punto di funzionamento per i valori di V e I.




Nell'ultima figura a fondo pagina una situazione che si può verificare appunto con i bipoli non lineari. La caratteristica del bipolo generatore reale idealizzato interseca la caratteristica del diodo tunnel in tre punti. Il punto di funziona-

mento non si può dire. In questo modello manca qualcosa per dire il punto di effettivo funzionamento. Sono le condizioni da cui parte il circuito che determinano quale dei punti sarà quello effettivo di funzionamento.

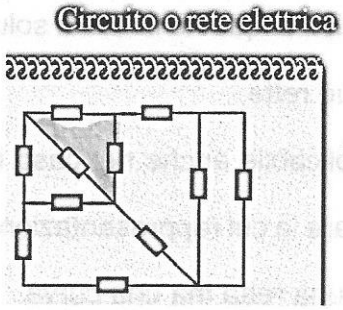
Vogliamo ora generalizzare il discorso della soluzione di un circuito in generale facendo vedere che ci sono leggi del tutto generali che consentono di descrivere un numero di equazioni sufficienti per determinare i valori delle tensioni e delle correnti su ogni bipolo presente nel circuito (o rete elettrica), cioè un insieme di bipoli collegati tra di loro attraverso gli unici due punti con cui i bipoli comunicano con l'esterno ovvero i morsetti.




Nodi

A lato una generica rete con i bipoli qualsiasi rappresentati da rettangolini.

Il nodo della rete è un punto in cui arrivano più di due morsetti di bipoli presenti nella rete.

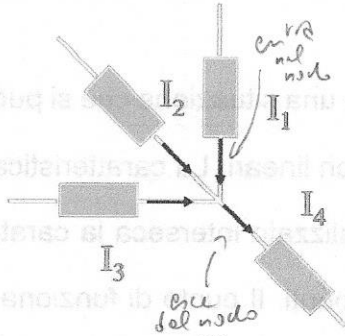



Maglie

La maglia di una rete è un percorso chiuso che partendo da un nodo arriva allo stesso nodo attraverso i rami, cioè gli elementi dove sono inseriti i bipoli della rete stessa.

LEGGI DI KIRCHHOFF

Sono due leggi che consentono di scrivere il numero di equazioni sufficienti per risolvere la rete cioè per determinare tensioni e correnti su ogni ramo della rete.




La prima legge di Kirchhoff è la legge di Kirchhoff per le correnti (L. K. C.) ed enuncia che:

• In ogni nodo la somma algebrica delle correnti entranti o

$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$

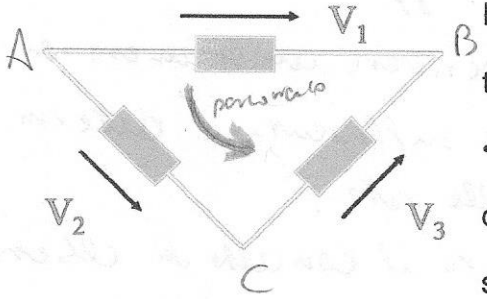
uscenti da un nodo è identicamente nulla.

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

Questa legge rappresenta in realtà l'equilibrio delle cariche. Si ricorda che l'intensità della corrente elettrica è la quantità di carica che nell'unità di tempo viene portata attraverso una superficie che taglia il conduttore in questione.

Dire che la somma algebrica di queste correnti è nulla sta ad indicare che nel nodo in questione non c'è un accumulo nè una depauperazione di cariche.

La prima legge di Kirchhoff è evidente ed è esattamente verificata quando il circuito funziona in regime continuo stazionario ed è soltanto approssimativamente soddisfatta quando il circuito funziona in regime dinamico, cioè quando le grandezze variano nel tempo. Accenneremo che questa approssimazione è buona tanto da poterla usare anche nel caso di rete in evoluzione dinamica.




La seconda legge di Kirchoff o legge di Kirchhoff per le tensioni (L. K. T.) enuncia che:

• In ogni maglia la somma delle tensioni di lato prese con il proprio segno oppure con il segno opposto, a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza prescelto è identicamente nulla.

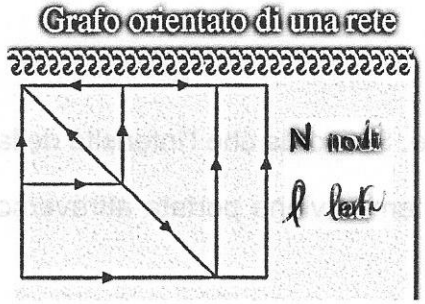
$-V_1 + V_2 + V_3 = 0$

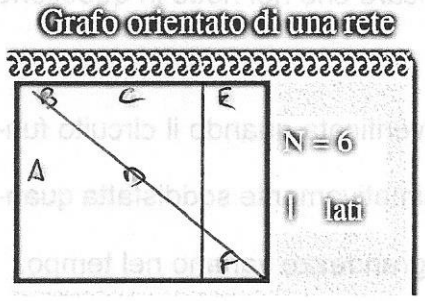
Questa seconda legge di Kirchoff in realtà è spiegabile considerando che le tensioni $V_1$, $V_2$ e $V_3$ come spesso sottolineato sono delle differenze di potenziale. Con il verso prescelto la $V_1$ è il potenziale in B meno il potenziale in A. Sostituendo a $V_1$, $V_2$, $V_3$ le loro espressioni in termini di potenziali dei nodi A, B e C ci troveremo di fronte a una espressione del tipo:

$$-(V_B - V_A) + (V_C - V_A) + (V_B - V_C) = 0$$

($V_1$, $V_2$, $V_3$)

In una rete vengono formati due elementi distinti: uno è il modo in cui i lati sono collegati e l'altro è la caratteristica, la natura dei lati presenti nella rete.
Le leggi di Kirchhoff si riferiscono a come i lati sono collegati alla rete. E quindi si applicano a qualsiasi rete che è indipendente dalla natura dei lati presenti nella rete. La rappresentazione con N nodi e l lati è detto grafo di una rete.
Se nel grafo è stato un verso esso sarà detto grafo orientato di una rete.

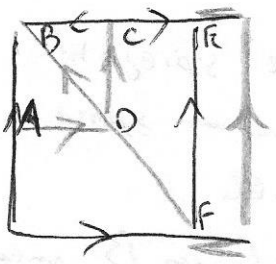






Con le leggi di Kirchhoff è possibile scrivere un numero di equazioni sufficiente a determinare correnti e tensioni in ogni lato della rete.
Per poterlo fare occorre avere chiaro il concetto di albero di una rete.

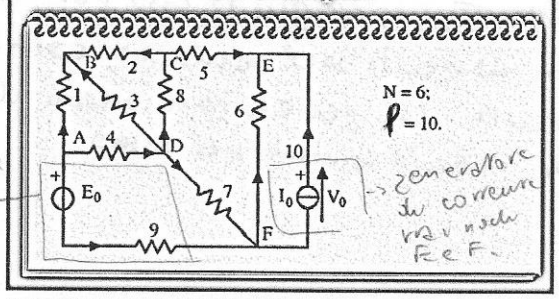



L'albero di una rete è un insieme di rami che unisce tra loro tutti i nodi della rete senza formare maglie chiuse.
Un grafo è anche un insieme di n-1 lati che collega tutti i nodi della rete perché è evidente che se n è il numero dei nodi e l'insieme di n-1 lati di collega tutti i nodi della rete non può formare maglie chiuse. Le due definizioni sono equivalenti. L'albero di una rete non è unico.

Il coalbero di una rete è il complemento del prescelto albero della rete. Se l'albero è composto da $n-1$ lati il coalbero sarà composto da $l-(n-1)$ lati.

[continua a L.6.9]

**Un esempio!** [28'14"]




generatore di tensione con in serie un resistore

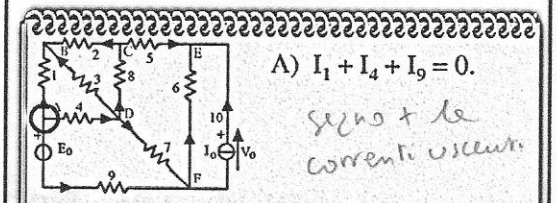
Abbiamo dei resistori,
un generatore di tensione con in serie un resistore,
un generatore di corrente tra i nodi E e F.

$N = 6$ nodi
$l = 10$ lati

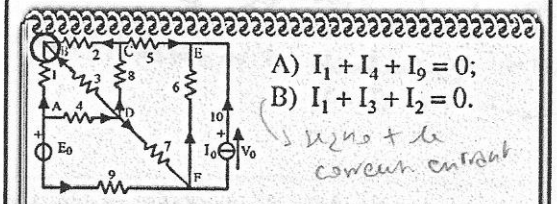
Proviamo dunque a scrivere le equazioni che esprimono la validità della legge di Kirchhoff ai nodi e alle maglie della nostra rete.

Il segno della corrente è arbitrario in ogni equazione, dal momento che si uguaglia a zero.
L'importante è che, avendo scelto + per le correnti entranti, allora quelle uscenti hanno segno − (nell'ambito della stessa equazione), e viceversa.

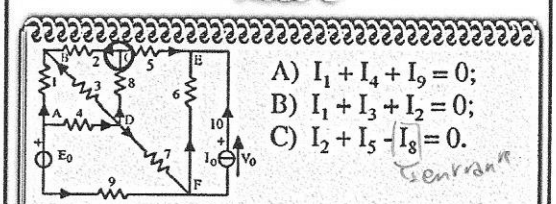
**Nodo A**



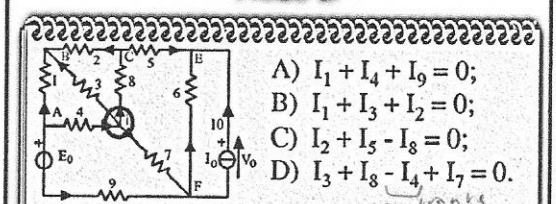

**Nodo B**



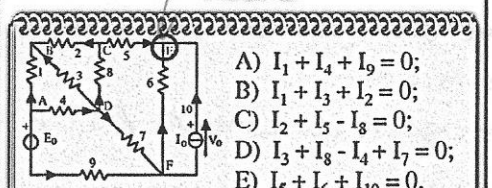

**Nodo C**




**Nodo D**



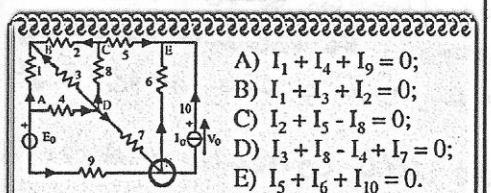
**Nodo E**



A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0$;
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0$;
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0$;
D) $I_3 + I_8 - I_4 + I_7 = 0$;
E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0$.

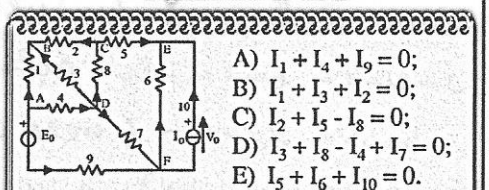
Al nodo E è da notare che la corrente $I_{10}$, in questo caso particolare, cioè la corrente nel ramo 10, coincide con la corrente del generatore ideale di corrente inserito appunto nel ramo.

**Nodo F**



A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0$;
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0$;
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0$;
D) $I_3 + I_8 - I_4 + I_7 = 0$;
E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0$.
F) $I_9 + I_7 - I_6 - I_{10} = 0$. uscenti da F

**Equazioni ai nodi**

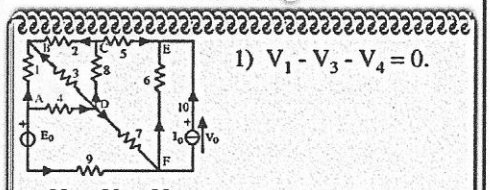


A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0$;
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0$;
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0$;
D) $I_3 + I_8 - I_4 + I_7 = 0$;
E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0$.

È stata tolta una equazione perché contiene informazioni ridondanti. È stato scelto di togliere la E (una qualunque) Le quattro equazioni rimanenti sono indipendenti tra loro.

La convenzione scelta è quella dell'utilizzatore.

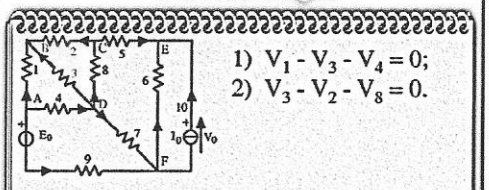
**Prima maglia**



1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$.

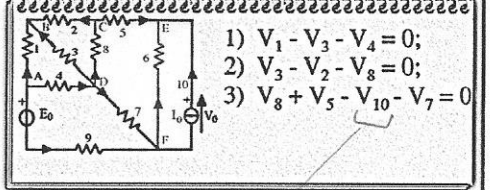
$V_1 = V_A - V_B$

**Seconda maglia**



1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$;
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0$.

**Terza maglia**



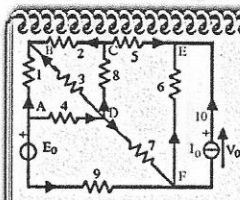
1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$;
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0$;
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0$

Tensione sul ramo 10, che è la tensione sul generatore ideale di corrente.

$V_7$ = d.d.p. tra D e F.

L. 6.6

## Quarta maglia

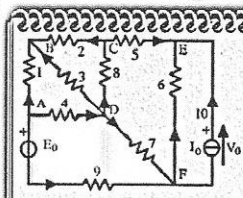


1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$;
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0$;
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0$
4) $V_6 - V_{10} = 0$.

4) $V_6 + V_0 = 0$.

Per la maglia in figura l'equazione è $V_6 - V_{10} = 0$, ovvero l'uguaglianza delle tensioni $V_6$ e $V_{10}$ per la verso scelto. Da notare che la tensione $V_{10}$ è in realtà pari a $-V_0$, per la verso data alla tensione del generatore ideale di corrente e quindi invece di $V_6 - V_{10} = 0$ avremmo potuto scrivere $V_6 + V_0 = 0$ [34']

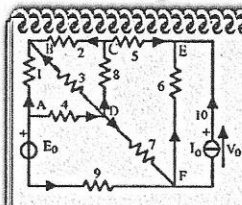
## Quinta maglia



1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$;
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0$;
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0$
4) $V_6 - V_{10} = 0$;
5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0$.

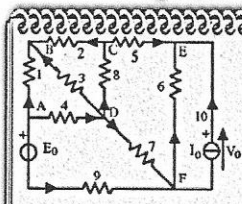
La tensione $V_9$ nella quinta maglia è la tensione sul ramo 9 che non coincide con la caduta sulla resistenza $R_9$ per la presenza del generatore di tensione $E_0$ nel ramo stesso. Vedremo come esprimere le tensioni sui rami in funzione dei bipoli presenti nei rami stessi.

## Equazioni alle maglie



1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$;
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0$;
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0$
4) $V_6 - V_{10} = 0$;
5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0$.

## Equazioni alle maglie e ai nodi



1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$;
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0$;
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0$;
4) $V_6 - V_{10} = 0$;
5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0$.
A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0$;
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0$;
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0$;
D) $I_3 + I_8 - I_4 + I_7 = 0$;
E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0$.

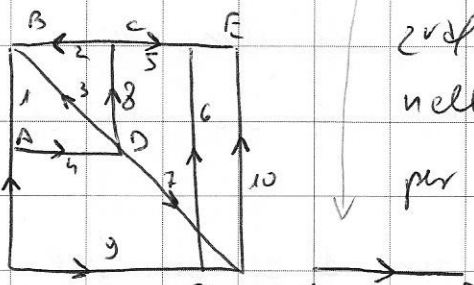
Nel caso in cui tutti i bipoli siano lineari (una sola tensione per una sola corrente) questo sistema di equazioni potrebbe fornirci la soluzione, cioè tensioni e correnti nella rete, se sono note le caratteristiche dei bipoli.

Con queste definizioni vediamo in modo semplice come le leggi di Kirchhoff ci consentono di scrivere un numero di equazioni sufficienti a risolvere la rete. [18'48"]

Cominciamo dalle equazioni ai nodi, cioè la prima legge di Kirchhoff.

Per n nodi possiamo scrivere n equazioni che esprimono la validità della legge di Kirchhoff

Di queste n equazioni certamente una è linearmente dipendente dalle altre, cioè una equazione ha un contenuto di informazioni già contenute nelle n-1 precedenti equazioni. Quindi essa è non necessaria.




n-1 equazioni indipendenti ai nodi

Avendo scelto una orientazione nel ramo del corpo, la corrente del ramo entrerà due volte nelle equazioni ai nodi: una volta nella equazione per il nodo A, con la corrente uscente dal nodo A, quindi con segno negativo; entrante nel nodo D e quindi positiva.




verso prescelto per la corrente in questo ramo

Dunque la corrente $I_4$ del ramo 4, sarà una volta con segno positivo e una volta con segno negativo. Avremo dunque una situazione così:

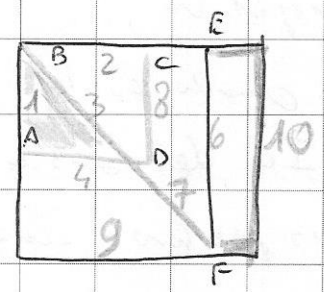
nodo A) $I_1 + I_4 + I_8 = 0$

nodo D) $I_3 - I_4 + I_8 + I_7 = 0$ e in queste due equazioni scompare $I_4$.

Se si sommano le n equazioni che si possono scrivere ai nodi di una rete usando la prima legge di Kirchhoff si ottiene una identità $0 = 0$.

Questo è un modo che una equazione è linearmente dipendente dalle altre. Cioè una equazione ha un

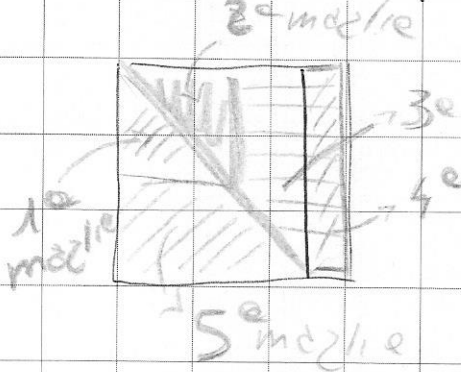
contenuto di informazione inutile perché già contenuto nelle precedenti n-1 equazioni.
Quindi abbiamo dimostrato che le leggi di Kirchhoff ci consentono di scrivere n-1 equazioni ai nodi indipendenti fra di loro.
Quindi almeno n-1 equazioni delle n che posso scrivere ai nodi, sono indipendenti fra di loro.
Dalle equazioni ai nodi passiamo alle equazioni alle maglie.
Per la verifica di quante di esse sono indipendenti, è utile fare riferimento al concetto di albero visto prima.
Infatti, delle tante maglie che posso considerare in una rete ce ne è un sistema che posso costruire procedendo gradualmente aggiungendo di volta in volta all'albero uno dei rami del coalbero e uno solo.



Equazioni indipendenti alle maglie

Aggiungendo il ramo 1 ai rami del coalbero, ad es., siccome il coalbero per definizione non forma maglie chiuse ma raccorda tutti i nodi e siccome il ramo 1 deve essere fra due nodi del grafo, si avrà allora si formerà una maglia chiusa, come disegnato in figura.
Ognuna delle equazioni così ottenute sono indipendenti fra di loro perché ognuna contiene un ramo del grafo che non fa parte del coalbero, cioè il complemento all'albero prescelto.
L'albero è di n-1 lati, il coalbero sarà di l-(n-1) lati. L'operazione può dunque essere fatta l-(n-1) volte

Nel nostro caso abbiamo 6 nodi, quindi $n-1=5$; 10 rami, $l-5=5$ e quindi posso fare 5 volte questa operazione e ottenere, nel caso dell'albero prescelto la maglia vista prima, più una seconda maglia, una terza una quarta e una quinta maglia.




Quindi $l-(n-1)$ maglie chiuse e quindi $l-(n-1)$ equazioni alle maglie prodotte dalla seconda legge di Kirchhoff.

Queste equazioni alle maglie sono indipendenti. Questo risulta evidente dal modo in cui sono state costruite: in ogni maglia è presente un ramo del collasso che non è presente nelle altre maglie, quindi nella equazione corrispondente alla seconda legge di Kirchhoff compare una incognita, la tensione di cui ramo del collasso atto a formare la maglia che non compare alle altre equazioni alle maglie e questo semplice che le $l-(n-1)$ equazioni costruite sono indipendenti.

Dunque abbiamo
$n-1$ equazioni indipendenti ai nodi e
$l-(n-1)$ equazioni indipendenti alle maglie e
$l$ caratteristiche dei bipoli e quindi in totale abbiamo
$2l$ equazioni, per $2l$ incognite, cioè la corrente e la tensione di ogni lato.

Abbiamo dunque dimostrato che le due leggi di Kirchhoff ci consentono di scrivere un numero di equazioni pari, in una volta, al numero delle incognite.

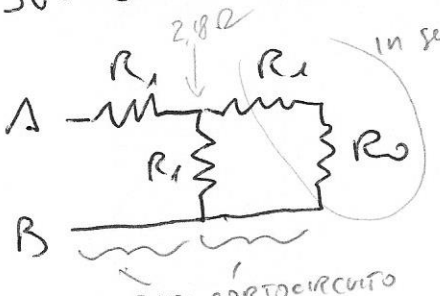
Queste equazioni possono o non possono avere una unica soluzione, questo dipende dalle caratteristiche dei singoli bipoli presenti nella rete.

Se essi sono lineari la soluzione è unica e possiamo correnti e tensioni per ogni ramo della rete.

Un esempio vd. pag L.G.5.

Soluzioni di esercizi

1)



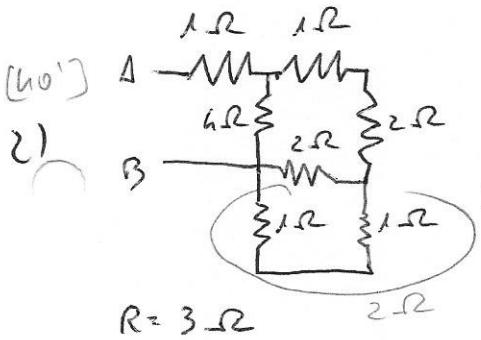

$R = ((R_1 + R_0) // R_1) + R_1$

(→ Resistenza che misura A e B

$$R = R_1 + \frac{(R_1 + R_0) R_1}{R_1 + R_0 + R_1}$$

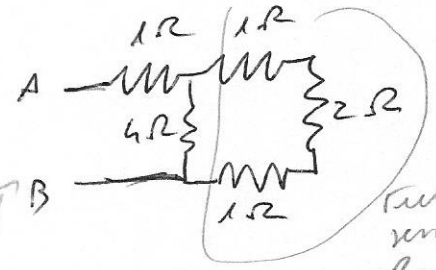
Se $R_0 = 5\,\Omega$ e $R_1 = 3\,\Omega$ ⇒ $R = \frac{24}{11} = 5{,}18\,\Omega$

2)



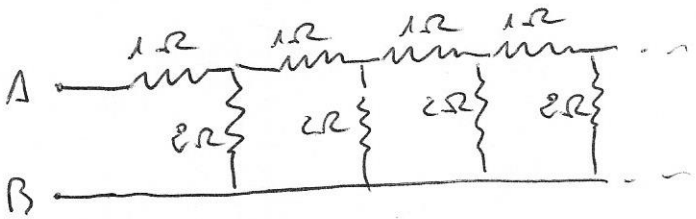

$R = 3\,\Omega$

Sono in serie! Sono attraversate dalla stessa corrente ⇒ $R_{eq} = 2\,\Omega$, che è in // con $2\,\Omega$ e dà una $R_{eq}$ di $1\,\Omega$ ($\frac{2 \cdot 2}{2+2} = 1$), da cui

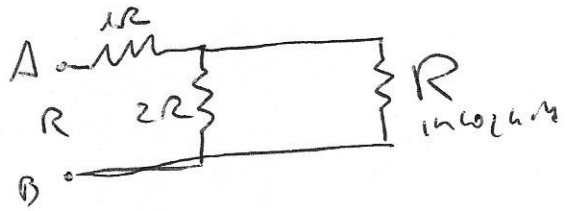



Resistenze in serie ⇒ $R_{eq} = 4\,\Omega$, in // con $4\,\Omega$ ⇒ $R_{eq} = 2\,\Omega$, in serie con $1\,\Omega$ ⇒ $R_{eq\,finale} = 3\,\Omega$

3) La corrente si divide: in ogni sezione della colonna la resistenza è sempre la stessa




Data R la resistenza incognita in ogni sezione, essa deve essere la stessa resistenza misurata tra A e B




$$R = \frac{2R}{2+R} + 1$$

, che, risolta in funzione di R, dà come risultati:

$R = 2$

$R = -1$ da scartare perché nel modello non accettiamo resistenze negative

L. 6.14

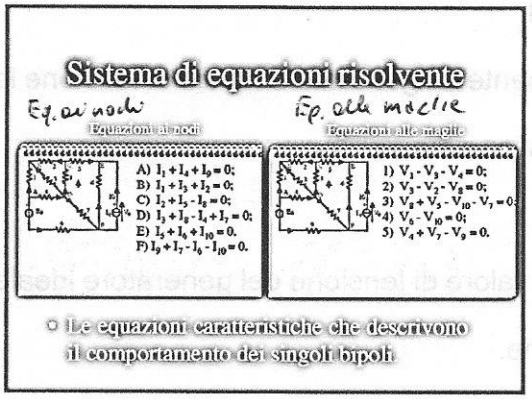
LEZIONE 7

# Equazioni delle incognite tensioni e correnti

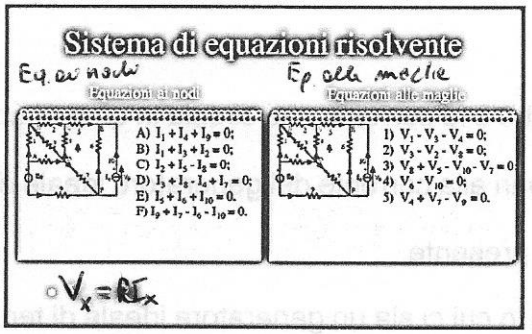
Prof. Luciano De Menna

42'21"

Ancora sulle equazioni nelle tensioni e correnti di lato
Equazioni nelle incognite correnti
Esempio
Esercizi



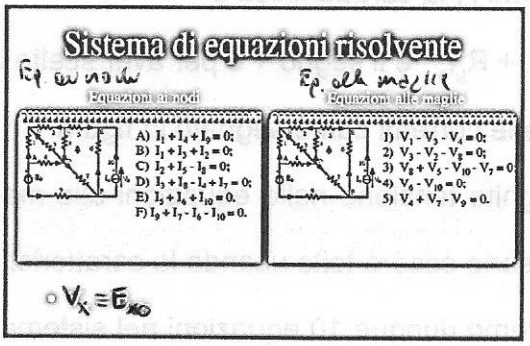

Nella scorsa lezione avevamo scritto le equazioni che esprimono la validità delle leggi di Kirchhoff ai noi ed alle maglie per un circuito rappresentato in figura e dove sono rappresentate anche le 6 equazioni ai nodi, di cui una essendo ridondante è stata eliminata ed è stata eliminata la 6ª, e le 5 equazioni alle maglie, maglie che sono state scritte usando un determinato albero della




rete e usando il metodo dell'albero e del coalbero, le maglie indipendenti. Per le maglie abbiamo dunque equazioni indipendenti.

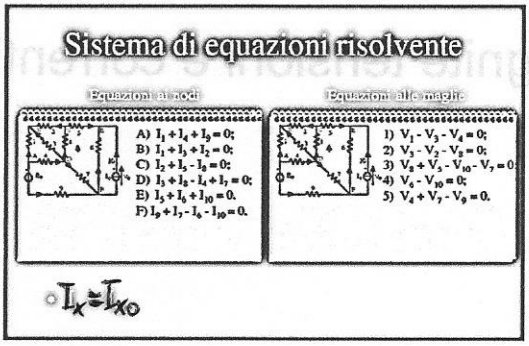
Dobbiamo ora scrivere le equazioni caratteristiche che descrivono il comportamento dei singoli bipoli.

Come già osservato abbiamo N - 1 equazioni ai nodi, l -N -1 equazioni alle maglie ed l caratteristiche ci forniscono 2l equazioni quante sono le incognite del problema. Con degli




artifici abbastanza elementari è possibile ridurre il numero di equazioni.

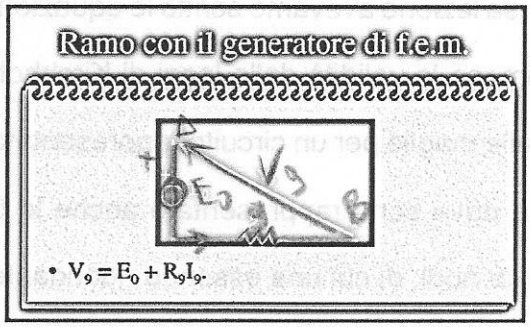
Le caratteristiche dipendono dai bipoli che sono presenti nella rete. In questa ci sono quelli introdotti finora: resistori, generatori ideali di tensio-




ne, generatori ideali di corrente, volendo anche i generatori reali idealizzati (cioè un generatore ideale di tensione con una resistenza in serie), e poi bipolo corto circuito e bipoli circuito a vuoto.

Una delle tipologie di equazioni saranno dunque quelle dei resistori, del tipo

- $V_x = R\ I_x$



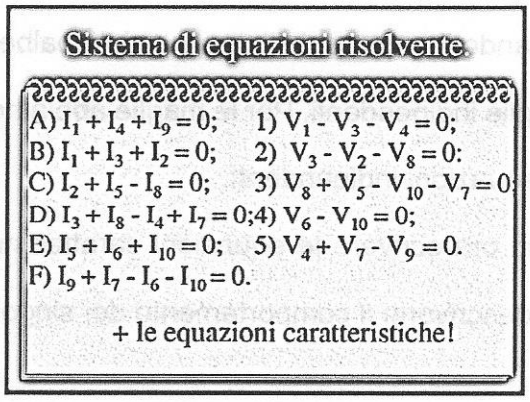

Se è presente un generatore ideale di tensione la caratteristica sarà del tipo

- $V_x = E_{x0}$

con $E_{x0}$ il valore di tensione del generatore ideale di tensione.

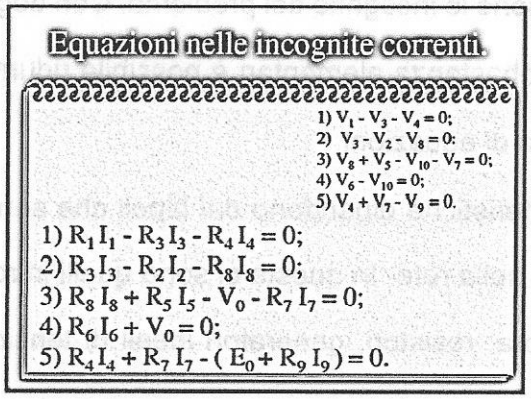
Infine, altra possibilità, se nella rete c'è un generatore ideale di corrente, la caratteristica sarà del tipo

- $I_x = I_{x0}$ che è la corrente che circola in quel ramo e che è pari alla corrente del generatore ideale di corrente presente.




Nel caso in cui ci sia un generatore ideale di tensione con in serie un resistore, come nel ramo 9 dell'esempio, in cui la tensione va dal morsetto A al morsetto F, la caratteristica è

- $V_9 = E_0 + R_9 I_9$ e il segno + e per aver scelto il verso delle correnti come segnato in figura.




Le incognite tensione nelle equazioni alle maglie possono essere tolte usando le caratteristiche. Avremo dunque 10 equazioni nel sistema,

L.7.2

**Sistema completo**

A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0$;
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0$;
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0$;
D) $I_3 + I_8 - I_4 + I_7 = 0$;
E) $I_5 + I_6 + I_0 = 0$;
1) $R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0$;
2) $R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 = 0$;
3) $R_8 I_8 + R_5 I_5 - V_0 - R_7 I_7 = 0$;
4) $R_6 I_6 + V_0 = 0$;
5) $R_4 I_4 + R_7 I_7 - (E_0 + R_9 I_9) = 0$.

5 delle quali derivano dalle equazioni ai nodi e 5 dalle equazioni alle maglie però espresse in termini di correnti attraverso le caratteristiche.

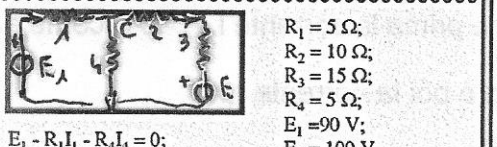
Le 10 incognite sono le correnti nei lati della rete.

Nella equazione 3 è presente la tensione $V_{10}$ che è la tensione sul ramo in cui giaceva soltanto un generatore ideale di corrente, la cui caratteristica ci dà la corrente che circola nel ramo, la $I_0$, ma non ci fornisce la tensione ai morsetti, quindi mentre la corrente non è incognita, lo è la tensione sul generatore. $I_{10}$ è sostituita da $I_0$.

Il sistema deve essere risolto con i metodi noti.

Con pochi maglie e pochi noti il metodo in uso sarà quello per sostituzione.

**Un esempio**

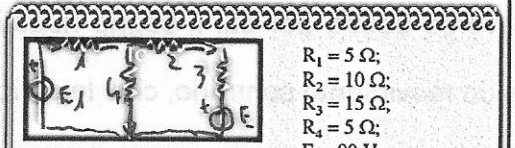


$R_1 = 5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 5\ \Omega$;
$E_1 = 90$ V;
$E_2 = 100$ V.

$E_1 - R_1 I_1 - R_4 I_4 = 0$;
$E_2 + R_3 I_2 + R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0$;
$I_1 - I_2 - I_4 = 0$.

Un esempio con 3 nodi e 2 maglie indipendenti, individuati da "2 buchi della rete", cosa possibili nel caso di circuiti piani, che possono essere descritti planarmente.

**Un esempio**



$R_1 = 5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 5\ \Omega$;
$E_1 = 90$ V;
$E_2 = 100$ V.

$E_1 - R_1 I_1 - R_4 I_4 = 0$;
$E_2 + R_3 I_2 + R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0$;
$I_1 - I_2 - I_4 = 0$.

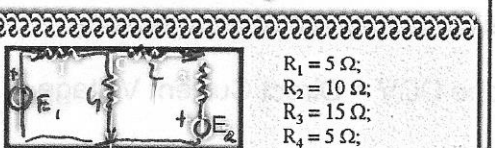
$I_4 = I_1 - I_2$ ;

$E_1 - R_1 I_1 - R_4 I_1 + R_4 I_2 = 0$;
$E_2 + R_3 I_2 + R_2 I_2 - E_1 + R_1 I_1 = 0$;

Le maglie indipendenti possono essere determinate anche con altri metodi oltre a quello dell'albero e del coalbero, il numero di maglie indipendenti determinabili in generale è maggiore di quello determinabile con il solo metodo dell'albero e del coalbero.

La rete in esempio è fatta di 3 nodi, 5 rami. Le resistenze e le tensioni dei generatori di

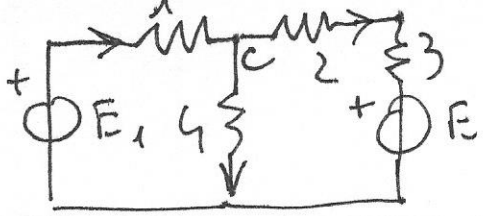
**Un esempio**



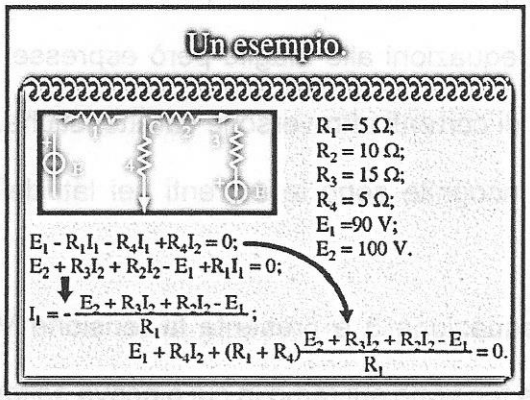
$R_1 = 5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 5\ \Omega$;
$E_1 = 90$ V;
$E_2 = 100$ V.

$E_1 - R_1 I_1 - R_4 I_1 + R_4 I_2 = 0$;
$E_2 + R_3 I_2 + R_2 I_2 - E_1 + R_1 I_1 = 0$;

$$I_1 = -\frac{E_2 + R_3 I_2 + R_2 I_2 - E_1}{R_1}$$ ;




tensione sono riportati.

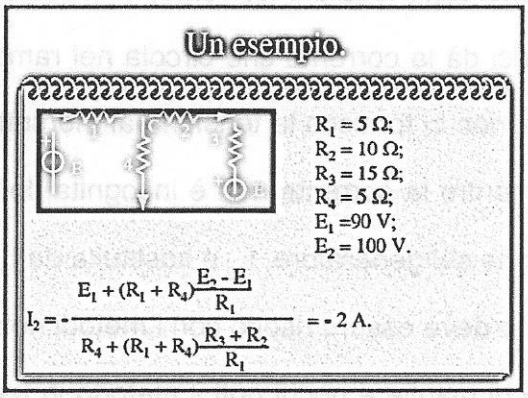



Le equazioni sono 2 alle maglie ed una sola ai nodi. I nodi sono 2: il nodo C e quello sotto.

N.B.: $R_2I_2$ è la caduta di tensione.

Poiché non è diversamente indicato, la convenzione scelta è quella dell'utilizzatore.

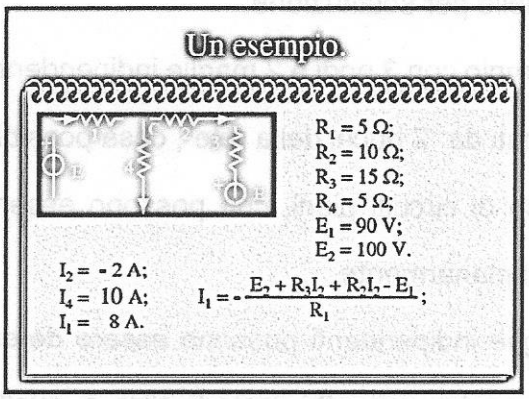
Le incognite sono $I_1$ e $I_2$.




Usando il metodo per sostituzione arriviamo ad una soluzione.

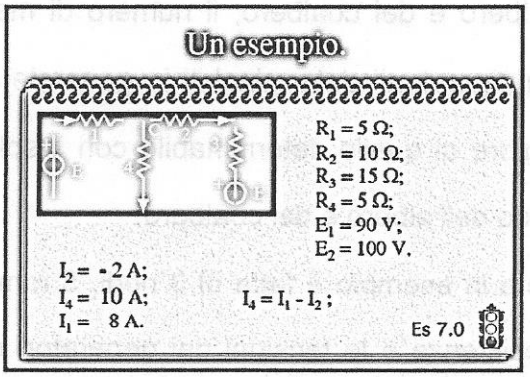
Si ottiene prima la corrente $I_2 = -2A$, come a lato riportato e poi la corrente $I_1$.

$I_2$ ha segno negativo in quanto abbiamo scelto di chiamare $I_2$ la corrente che dal ramo 2 va dal nodo C verso destra, quindi la corrente $I_2$ è positiva quando le cariche positive si muovono dal nodo C verso destra per cui il segno negativo significa un movimento contrario, cioè le cariche positive si muovono da destra verso sinistra.




$I_1$ = 8A ecc.

Il risultato può essere verificato in laboratorio, con il multimetro [al minuto 19' circa].



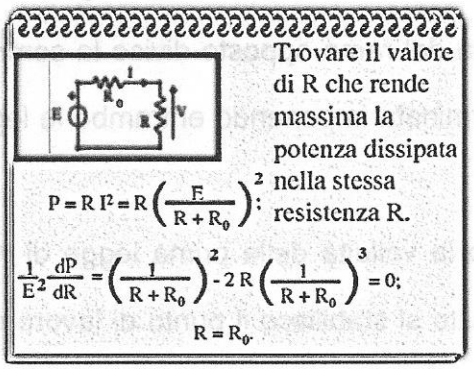

I dati forniti dal multimetro sono coincidenti con quelli calcolati risolvendo le equazioni.

Si noti che DCV = Direct Current Voltage, tensione della corrente continua.

Segue discussione esercizi.

L.7.5

## Esercizi




Trovare il valore di R che rende massima la potenza dissipata nella stessa resistenza R.

$$P = R I^2 = R \left(\frac{E}{R + R_0}\right)^2;$$

$$\frac{1}{E^2}\frac{dP}{dR} = \left(\frac{1}{R + R_0}\right)^2 - 2R\left(\frac{1}{R + R_0}\right)^3 = 0;$$

$$R = R_0.$$

Il massimo è la derivata della Potenza rispetto a R e posta a zero.

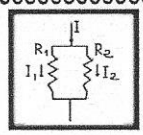
Il risultato è $R = R_0$

Nel circuito c'è un generatore reale idealizzato (un generatore ideale di tensione con in serie una resistenza) che è chiuso su un carico di valore R

La potenza fornita al carico R è massima quando il valore della resistenza di carico R è proprio uguale al valore di $R_0$ che possiamo considerare pari alla resistenza interna del generatore. In pratica è la resistenza vista ai capi del generatore dai suoi morsetti considerandolo come un generatore reale.

Si parla in questo caso di *adattamento in potenza*.

Il circuito sta funzionando in una condizione di adattamento in potenza in quanto effettivamente è in grado di trasferire al carico la maggior potenza possibile. Il massimo trasferimento di potenza si ha a scapito del fatto che il rendimento (potenza trasferita al carico rispetto a quella fornita) è di 1/2 perchè il generatore ideale deve fornire il doppio della potenza perchè l'altra parte, un metà uguale, viene dissipata nella sua resistenza interna.




Determinare la ripartizione delle correnti nei due rami imponendo che la potenza dissipata nel circuito sia minima con la condizione $I_1 + I_2 = I$.

$$P = R_1 I_1^2 + R_1 I_2^2 =$$
$$= R_1 I_1^2 + R_2 (I - I_1)^2.$$

$$\frac{dP}{dI_1} = 2R_1 I_1 - 2R_2 (I - I_1) = 0.$$

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Un altro eserzio.

Si deve ignorare la legge di Kirchhoff alle tensioni e tenere valida la prima legge di Kirchhoff.

La seconda legge di K. è sostituita dalla condizione della potenza dissipata.

P è la potenza dissipata che è data dalla somma di quella dissipata nel ramo 1 con quella dissipata nel ramo 2. Si fa scomparire $I_2$ per sostituzione e si ha solo

$I_1$.

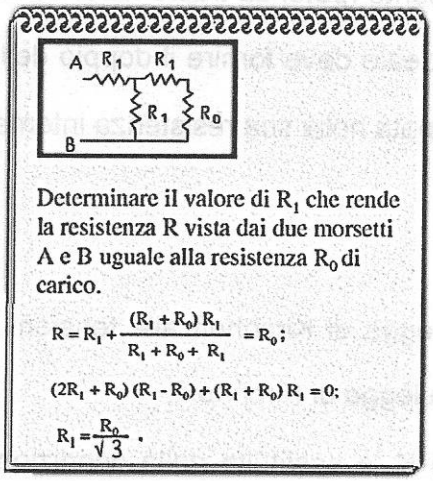
Il risultato ottenuto è quello di un ripartitore di corrente: la corrente in un ramo è uguale alla corente totale entrante moltiplicata per la resistenza del ramo opposto diviso la somma delle resistenze. E questa relazione era stata determinata imponendo entrambe le leggi di Kirchhoff.

Questo problema rende evidente che ammettendo la validità della prima legge di Kirchhoff, la seconda non fa altro che dirci che il circuito si stabilisce il punto di lavoro del circuito, cioè le correnti e le tensioni sui vari rami sono tali da rendere minima la la potenza dissipata nel circuito.

Il problema duale è quello di imporre la seconda legge di K., l'equilibrio delle tensioni, e derivare l'equilibrio delle correnti minimizzando le potenze.

Le leggi di K. possono essere viste anche come condizione di minima potenza dissipata nel circuito, con un vincolo esopresso da una delle due leggi.

Altro esercizio con una stella di resistori. Lo svolgimento è stato già fatto.




Determinare il valore di $R_1$ che rende la resistenza R vista dai due morsetti A e B uguale alla resistenza $R_0$ di carico.

$$R = R_1 + \frac{(R_1 + R_0) R_1}{R_1 + R_0 + R_1} = R_0;$$

$$(2R_1 + R_0)(R_1 - R_0) + (R_1 + R_0) R_1 = 0;$$

$$R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}}.$$

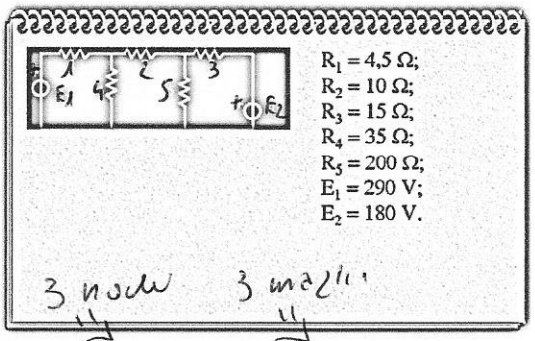
In $R_1$ vale la corrente, si dissipa una certa potenza
Se al $R_1$ era dimensionato un qualsiasi valore e, immaginando di aver collegato ad A e B un generatore con la sua resistenza interna avremmo potuto realizzare quello che prima avevamo definito un adattamento di potenza, cioè fare in modo che il carico presenta una resistenza di carico uguale alla resistenza interna del generatore e mettere nelle condizioni di massimo trasferimento di potenza, al carico complessivo ai morsetti A e B, il che

L.T.6

Vuol dire che in $R_0$ ci sarà soltanto una parte di quella massima resistenza e di un'altra parte viene dispersa nello stesso di valore $R_1$.

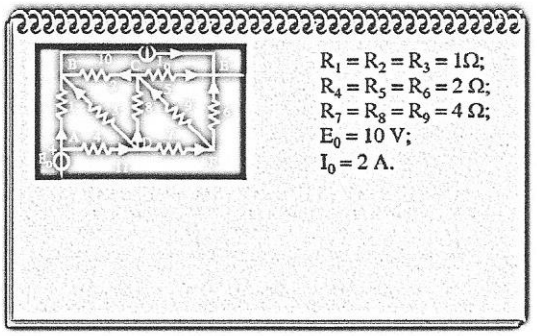
Esercizi proposti:

**Esercizi**

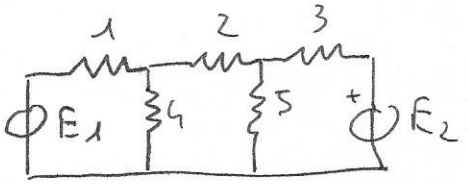


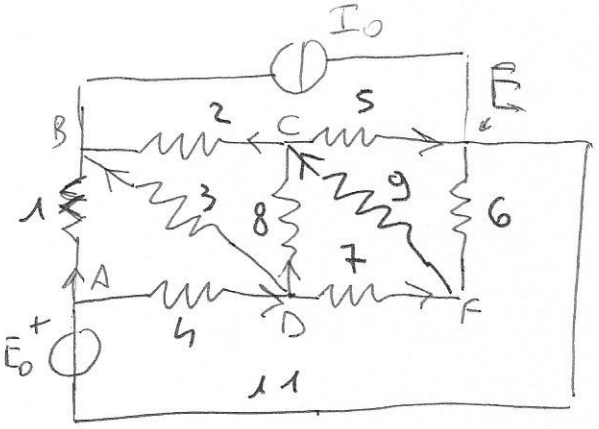

$R_1 = 4{,}5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 35\ \Omega$;
$R_5 = 200\ \Omega$;
$E_1 = 290$ V;
$E_2 = 180$ V.

3 nodi → 2 eq.
3 maglie → 3 eq.



$R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$;
$R_4 = R_5 = R_6 = 2\ \Omega$;
$R_7 = R_8 = R_9 = 4\ \Omega$;
$E_0 = 10$ V;
$I_0 = 2$ A.




L.7.7









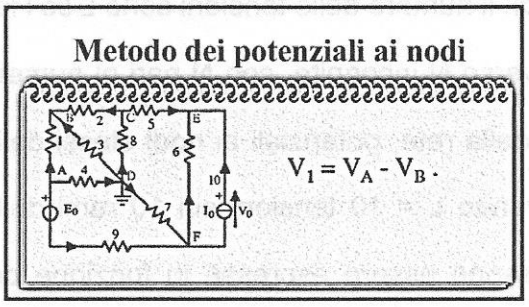
L.7.8

LEZIONE 8

# Metodi dei potenziali ai nodi e delle correnti alle maglie

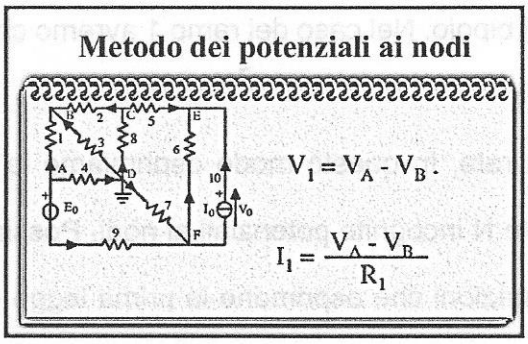
Prof. Luciano De Menna
43'32"

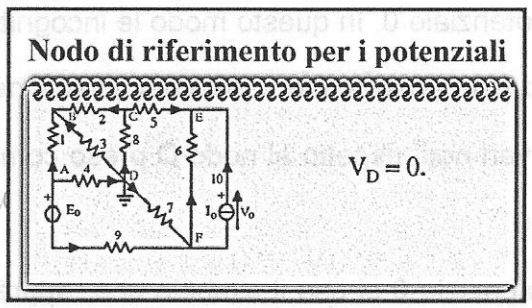
Metodo dei potenziali ai nodi
Metodo delle correnti di maglia
Esercizi




Nella scorsa lezione abbiamo visto come scrivere le equazioni risolventi di una rete nelle sole incognite correnti facendo scomparire le tensioni dalle equazioni alle maglie utilizzando le caratteristiche dei bipoli presenti nella rete.

E' possibile un approccio di tipo duale, facendo scomparire le correnti nelle equazioni ai nodi utilizzando le caratteristiche dei bipoli. Si ottiene un sistema di equazioni nelle sole incognite tensioni sui rami. Possiamo in realtà fare di più e fare meglio riducendo le equazioni che bisogna risolvere scegliendo un opportuno insieme di incognite rispetto alle quali risolvere il problema. Questo tipo di approccio dà luogo ai due metodi duali (duali perchè in un caso abbiamo la tensione, cioè la d.d.p. e nell'altro la corrente), che sono detti metodi dei potenziali ai nodi o delle correnti di maglia, anche dette correnti di Maxwell.



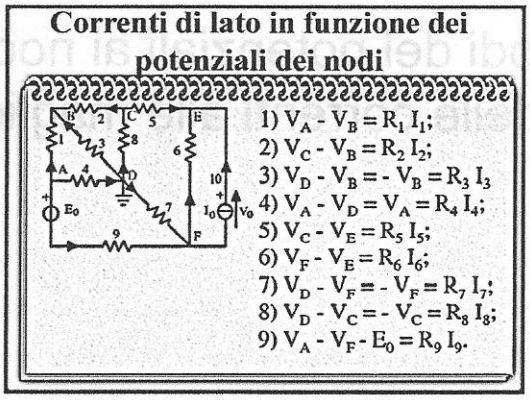




E' possibile esprimere le tensioni sui rami di una rete attraverso le differenze di potenziali nei nodi a cui questi rami fanno riferimento.

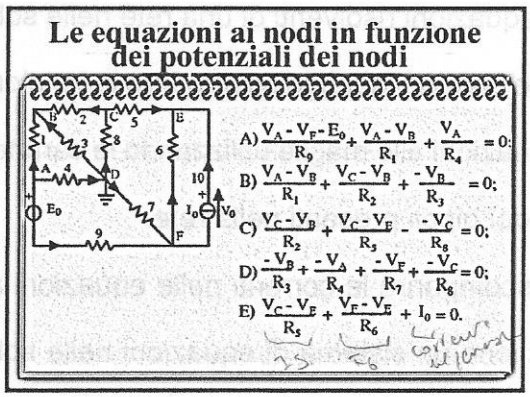
In prima figura la tensione $V_1$, con convenzione dell'utilizzatore è la d.d.p. tra il nodo A e il

Ramo 1: la tensione sul ramo 1, $V_1$ è espressa come d.d.p nei nodi a cui il ramo 1 fa riferimento, cioè $V_A$ e $V_B$, quindi, visto il verso, $V_1 = V_A - V_B$; L.8.1 poiché $V_1 = R_1 \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1}$

Nel metodo dei potenziali nodali le incognite sono i potenziali nodali e le LKT sono automaticamente soddisfatte




nodo B. Quindi possiamo scrivere $V_1 = V_A - V_B$ ed è da notare che mentre $V_1$ è una tensione, $V_A$ e $V_B$ sono potenziali nei nodi A e B. Questo è possibile farlo per tutti i lati della rete e quindi si esprimono in questa maniera le tensioni sui singoli rami della rete come differenze di potenziali tra i nodi. Il numero delle tensioni sono L se i lati sono L e le L incognite vengono espresse attraverso N incognite, con N pari al numero




di nodi della rete, potenziali ai nodi stessi della rete. Avendo L = 10 tensioni sui 10 rami della rete possono essere espresse in funzione dei 6 potenziali dei nodi della rete. E' poi possibile esprimere la corrente nel ramo in funzione della d.d.p che insiste su quel ramo e della caratteristica del bipolo. Nel caso del ramo 1 avremo che $I_1 = (V_A - V_B) / R_1$.

Questo metodo è applicabile a tutti i rami della rete. In questo modo esprimiamo le L correnti nei singoli rami della rete in funzione delle N incognite potenziali ai nodi. Possiamo a questo punto immaginare di scrivere le equazioni che esprimono la prima legge di Kirchhoff negli N nodi in termini dei potenziali ai nodi. Sappiamo che le N equazioni non sono linearmente indipendenti. Una delle equazioni è linearmente dipendente dalle altre. D'altra parte, delle N incognite potenziali nei nodi, ne possiamo sempre fissare una ad un potenziale di riferimento che scegliamo essere potenziale 0. In questo modo le incognite nel sistema di equazioni che scriviamo non sono più pari al numero dei nodi, cioè 6 nel nostro caso, ma 5 perché sono i potenziali dei vari nodi rispetto al nodo D preso come riferimento e quindi assunto a potenziale 0, $V_D = 0$.

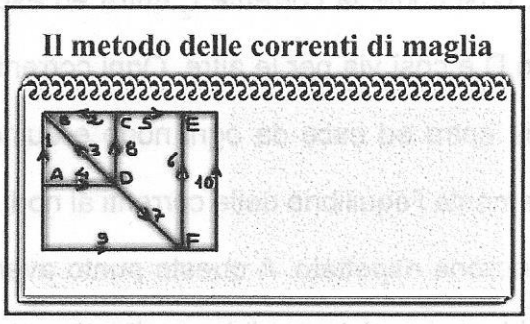
Usualmente per indicare la scelta del nodo a potenziale 0 si usa il simbolo che rappre-

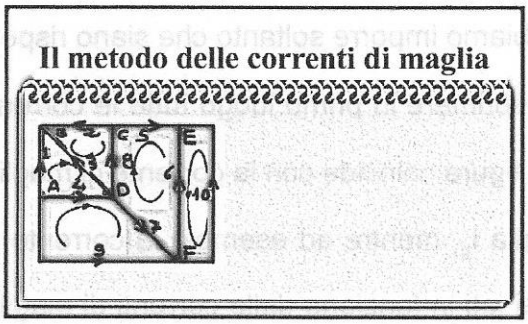
senta una presa di terra (o a massa). Questa è una esigenza che sarà spiegata più avanti. Avendo quindi avendo eliminato uno dei potenziali perché per esso è stato assunto 0 il sistema di equazioni che esprimono le leggi di Kirchhoff ai nodi espresse in termini dei potenziali nei nodi utilizzando le caratteristiche dei rami, ci consente di determinare i 5 valori dei potenziali dei nodi rispetto al nodo D preso come riferimento.

Questo consente di risolvere il nostro problema perché dalla conoscenza dei potenziali nei nodi è possibile calcolare le differenze di potenziale e quindi le tensioni sui rami e dalle caratteristiche è possibile ricavare le correnti. Da notare che dove c'è $V_D$, esso è 0. Da vedere come è esplicitata la caduta di tensione sul ramo 9. La corrente del ramo 10 è intesa assegnata (e non incognita ) in quanto è la tensione del generatore di corrente ideale.

Abbiamo poi scritto le equazioni ai nodi, escluso quella del nodo F in quanto sappiamo che le N equazioni ai nodi sono linearmente dipendenti. Quindi una delle equazioni ai nodi deve essere eliminata perchè porterebbe nel sistema delle informazioni già contenute nelle altre equazioni. La scelta del nodo di cui eliminare l'equazione è indipendente dalla scelta del nodo da porre a potenziale 0. Notare che nella equazione del ramo E c'è $I_0$, come termine noto, come nella prima equazione del nodo A c'è $E_0$, tensione del generatore.

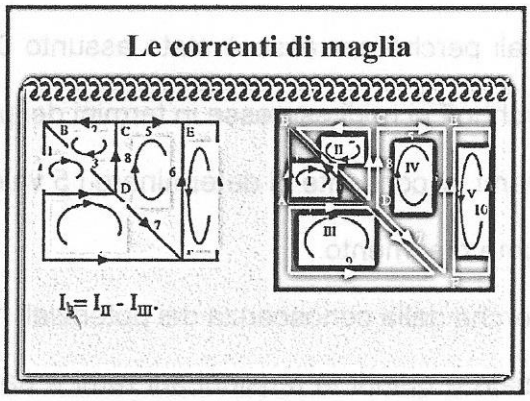
---



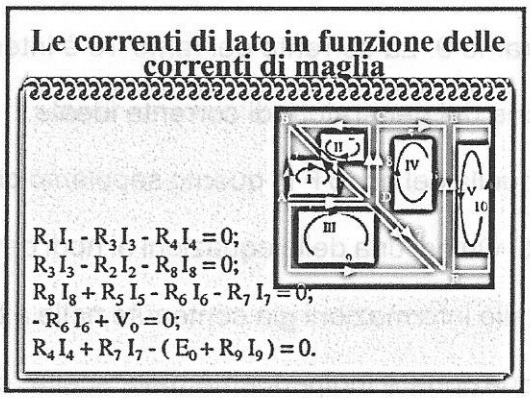

Il metodo delle correnti di maglia è un metodo analogo, con l'idea di ridurre il numero di equazioni scegliendo un opportuno numero di incognite diverso dai potenziali ai nodi. Si noti che ogni equazione alle maglie usando come incognita i potenziali ai nodi si riduce ad una identità 0 = 0.

In altre parole il sistema di incognite potenziali ai nodi soddisfa per definizione le equazioni alle maglie per cui è necessario per esse imporre soltanto che siano verificate le condizioni imposte dalle equazioni ai nodi.

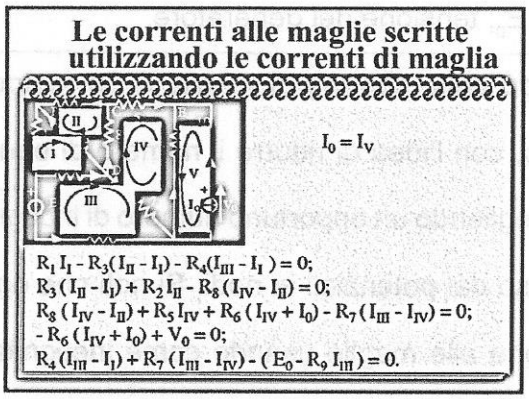



Il metodo delle correnti di maglia è quella di imporre soltanto la validità delle equazioni alle maglie, la validità della seconda legge di Kirchhoff applicata ad un insieme di maglie indipendenti (perchè lo sono le equazioni).

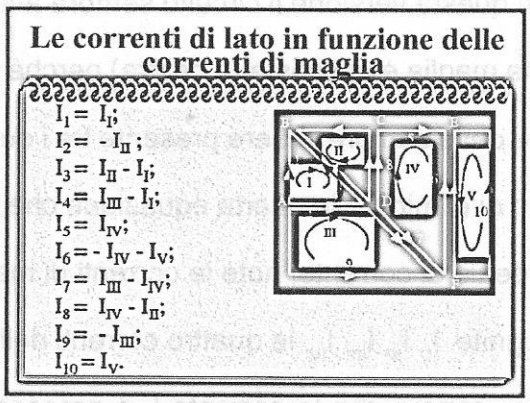
Le nuove incognite sono dunque le correnti di maglia ed è meno intuitivo supporle: si usano le immagini.




Immaginiamo di assegnare ad ogni maglia una corrente di maglia con i versi scelti per le correnti nelle singole maglie. I rami comuni a più maglie sono stati divisi in due parti, per semplificazione. Le correnti di maglia soddisfano immediatamente le equazioni ai nodi: al nodo D abbiamo che l'equilibrio al nodo D andrebbe espresso dicendo che la corrente di maglia $I_1$ entra ed esce dal nodo D; così come la corrente $I_2$ entra ed esce dal nodo D e così via per le altre. Ogni corrente di maglia entra ed esce da ogni nodo e quindi evidentemente l'equilibrio delle correnti ai nodi è per definizione rispettato. A questo punto avendo individuato un sistema di incognite che sod-

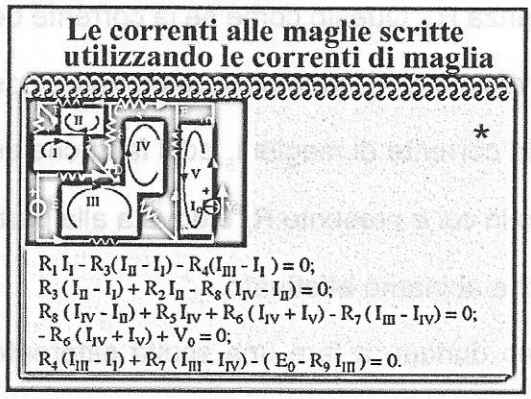



disfa automaticamente alle equazioni ai nodi dobbiamo imporre soltanto che siano rispettate le equazioni alle maglie. Si tratta quindi di esprimere in primo luogo tutte le correnti dei lati in funzione delle correnti di maglia. La $I_1$ in figura coincide con la corrente di maglia $I_I$, la $I_2$ è uguale ed opposta alla corrente di maglia $I_{II}$, mentre ad esempio la corrente $I_6$ è pari a $-I_{IV} - I_V$. Una volta espresse le correnti dei lati in funzione delle correnti di maglia

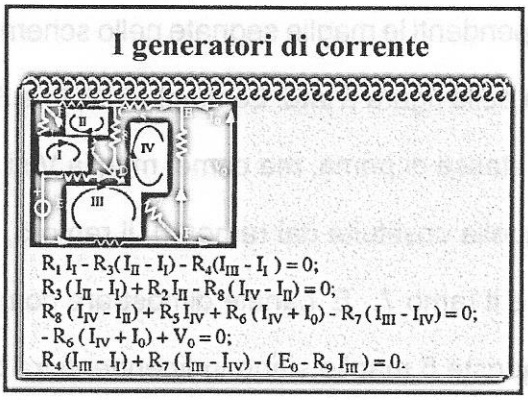



possiamo utilizzare le caratteristiche per inserire nelle equazioni che esprimono l'equilibrio delle tensioni l'espressione delle correnti di maglia. Cioè al posto delle varie correnti di lato $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$ sostituiamo la combinazione delle correnti di maglia che le rappresenta.

Facendo questa sostituzione abbiamo un sistema in cui compaiono solo le correnti di maglia. Abbiamo tante equazioni quante sono le maglie indipendenti; nel nostro caso 5.

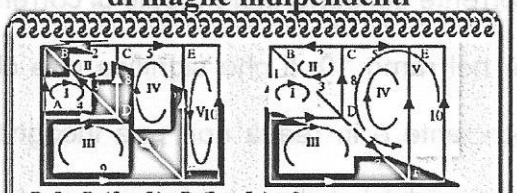



Il numero di incognite è pari al numero di maglia. Da osservare la particolarità del generatore di corrente perché la corrente di maglia $I_V$ coincide con la corrente del generatore ideale di corrente presente nel ramo 10. Il che significa dire che questa corrente è in realtà non una incognita, ma è nota perchè $I_0$ è da considerarsi assegnata. Per il generatore ideale di corrente deve considerarsi incognita, non assegnata, la tensione ai suoi morsetti che dipende dal resto del circuito, dal modo in cui il generatore è collegato al resto del circuito. Nel sistema, al posto della corrente $I_V$ possiamo mettere la corrente $I_0$ perché coincidono e quindi le incognite corrente di maglia sono in realtà 4. Ma le equazioni sono 5 perché la quinta incognita è $V_0$, la tensione ai morsetti del generatore ideale di tensione. In effetti quando è presente un generatore di corrente tra i nodi, è di uso non segnare la maglia corrispondente al generatore idelae di corrente così come è disegnato in questa versione del circuito. Sono indicate solo il nodo di ingresso e il nodo di uscita



della corrente del generatore ideale di corrente. In questa versione il circuito sembra avere 4 maglie soltanto indipendenti; in realtà la quinta maglia è nascosta (a destra) perché è quella chiusa dal generatore ideale di corrente che deve sempre essere presente tra i due nodi (Vd. Figura *). Questo fa si che immaginando di eliminare la quarta equazione che è quella che ci fornisce la tensione sul generatore ideale di corrente, note le correnti di maglia, le altre quattro equazioni appaiono nelle incognite $I_I$, $I_{II}$, $I_{III}$, $I_{IV}$, le quattro correnti delle maglie visibili, e, apparentemente in modo strano, appare che la corrente $I_0$ è presente soltanto a fornire una caduta ulteriore sulla resistenza $R_6$. Questo come se la corrente del generatore ideale di corrente circolasse solo nel resistore $R_6$. In effetti questo non è così ed è dovuto al fatto che la corrente $I_0$ è in realtà la corrente di maglia $I_5$ ed il fatto che sia presente soltanto nella equazione relativa al ramo in cui è presente $R_6$ è dovuta alla particolare scelta del sistema di maglie indipendenti che abbiamo effettuato.

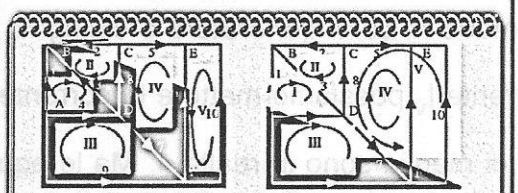
**Una diversa scelta del sistema di maglie indipendenti**



$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$
$R_3(I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8(I_{IV} - I_{II}) = 0;$
$R_8(I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6(I_{IV} + I_0) - R_7(I_{III} - I_{IV}) = 0;$
$- R_6(I_{IV} + I_0) + V_0 = 0;$
$R_4(I_{III} - I_I) + R_7(I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$

Proviamo dunque a fare una scelta differente. Proviamo a scegliere come equazioni come maglie indipendenti le maglie segnate nello schema a destra della figura a lato. Le maglie I, II, III e IV sono le stesse di prima, ma come maglia V si è scelta quella costituita dal ramo 10, il ramo 5, il ramo 8 e il ramo 7. E' banale dimostrare come anche queste 5 maglie siano indipendenti fra di loro. allora le equazioni scritte non sono più valide: la maglia di corrente $I_V$ circola nei rami 5, 8 e 7 mentre prima non ne avevamo tenuto conto. Evidentemente queste equazioni vanno modificate. Nel ramo 7 la corrente è la somma, con gli opportuni segni, di ben 3 correnti di maglia,

**I termini da modificare**

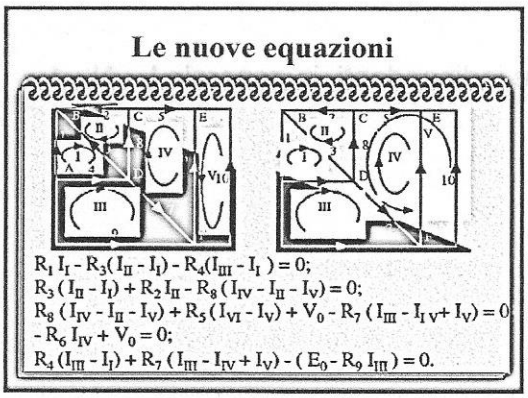


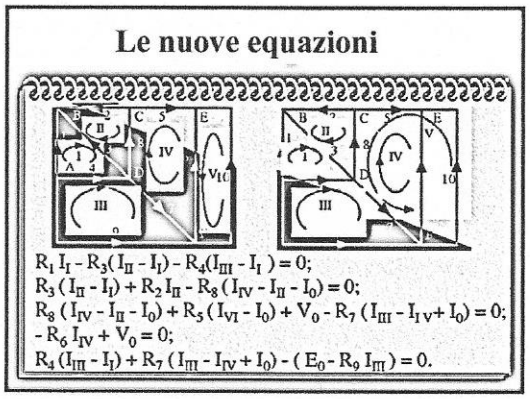
$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$
$R_3(I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8(I_{IV} - I_{II}) = 0;$
$R_8(I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6(I_{IV} + I_0) - R_7(I_{III} - I_{IV}) = 0;$
$- R_6(I_{IV} + I_0) + V_0 = 0;$
$R_4(I_{III} - I_I) + R_7(I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$

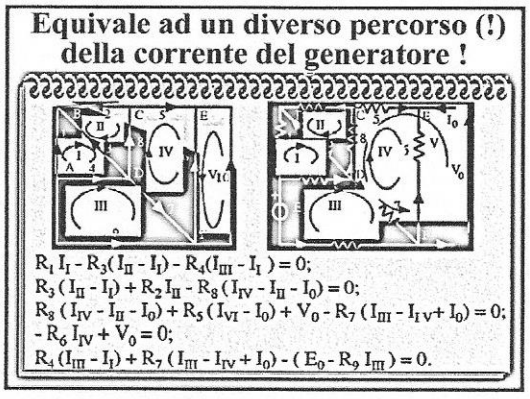
$I_{III} + I_V - I_{VI}$ perché il ramo 7 è in comune a 3 maglie indipendenti della scelta effettuata.

Dalla figura si evidenzia la modifica alle equazioni. La corrente $I_0$ circola in più rami mentre invece prima sembrava circolare solo nel ramo 6.

Dall'esempio si capisce la non è che la corrente del generatore ideale di corrente scelga un percorso particolare tra il nodo di ingresso ed il nodo di uscita ma le equazioni appaiono in questa maniera in dipendenza della scelta dell'insieme delle maglie indipendenti e questo ha un grado di arbitrarietà. Cioè possiamo scegliere sistemi diversi di maglie che danno luogo a equazioni indipendenti. A seconda della scelta, nelle equazioni, la corrente del generatore ideale di corrente comparirà in alcune equazioni e non in altre dando l'impressione che la corrente del generatore ideale di corrente abbia scelto un percorso particolare ed in questo caso un percorso che va al ramo 5, al ramo 8 ed al ramo 7. In realtà questa è la spezzta 5, 8, 7 con cui noi abbiamo chiuso la maglia che contiene il generatore ideale di corrente che in figura non è segnato esplicitamente. Questa arbitrarietà è soltanto nella scelta dell'insieme delle maglie indipendenti.




Volendo dunque applicare il metodo delle correnti di maglia, in presenza di rami con generatori di corrente, basta scegliere ad arbitrio un percorso per la corrente del generatore di corrente. In realtà si sceglie ad arbitrio l'ultima maglia da aggiungere alle restanti per formare il sistema di maglie indipendenti.

L.8.7

## I GENERATORI DI CORRENTE ED IL METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA!

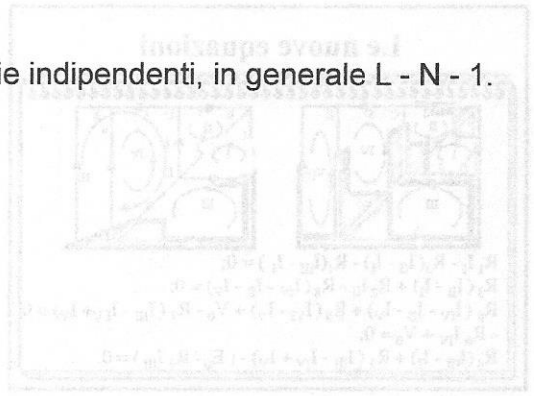
• In presenza di rami con un generatore di corrente, volendo utilizzare il metodo delle correnti di maglia, basta scegliere ad arbitrio (!) un percorso per la corrente del generatore di corrente.

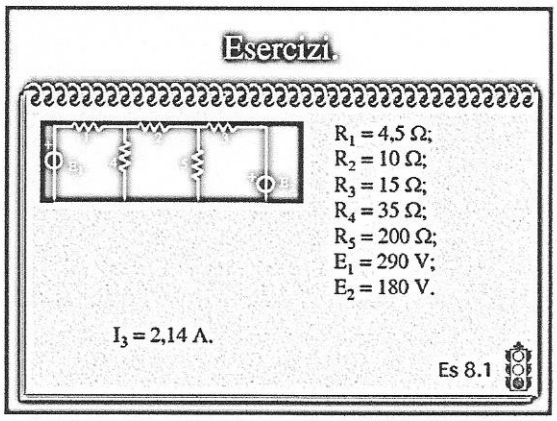
• Tale scelta equivale ad una particolare scelta dell'insieme di maglie indipendenti.

La scelta arbitraria è quello delle maglie indipendenti per cui scrivere le equazioni (e questo è lecito).

Le equazione saranno un numero pari alle maglie indipendenti, in generale L - N - 1.

Così come le incognite.



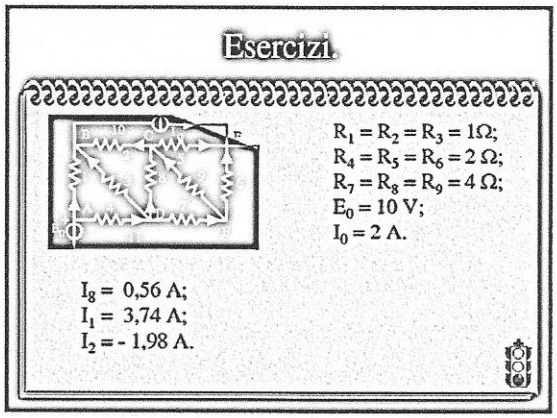



A lato le soluzioni di esercizi dati.

Era richiesta la scrittura delle equazioni che esprimono le leggi di Kirchhoff con 3 maglie e 3 nodi e quindi due equazioni ai nodi.

La soluzione, per la corrente nel ramo 3, è:

$I_3 = 2{,}14$ A

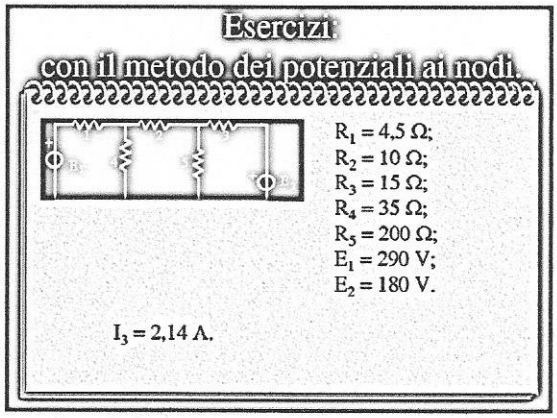



Anche in questo esercizio dovevano essere scritte le leggi di Kirchhoff e risolvere il sistema.

La risposta per la corrente $I_8 = 0{,}56$A.

La risposta per la corrente $I_1 = 3{,}74$A.

La risposta per la corrente $I_2 = -1{,}98$A.




Come esercizio da svolgere, risolvere l'esercizio iniziale con il metodo dei potenziali ai nodi (il risultato, ovviamente, deve essere lo stesso).

L. 8. 9

LEZIONE 9

# Teorema di Tellegen ed altri teoremi

Prof. Luciano De Menna
44'05"

Teorema di Tellegen
Teorema di non amplificazione
Sovrapposizione degli effetti
Esempio
Esercizi

In questa lezione parleremo delle proprietà delle reti elettriche. Abbiamo visto nelle precedenti lezioni che una rete elettrica è un insieme di bipoli collegati tra di loro attraverso i loro morsetti. Abbiamo visto che le tensioni e le correnti in tali reti devono soddisfare le due leggi di Kirchhoff per cui la somma algebrica delle correnti in ogni nodo sia uguale a zero (prima) e la somma delle tensioni sui lati lungo una maglia chiusa sia zero (seconda). Queste due leggi consentono di scrivere un numero di equazioni sufficienti a risolvere il problema, cioè a determinare tensioni e correnti in ogni ramo della rete. Inoltre abbiamo visto che non è necessario risolvere l'intero sistema di 2L equazioni in 2L incognite ma che è possibile con artifici abbastanza semplici ridurre ad un numero minore le equazioni del sistema.

## PROPRIETÀ DELLE RETI

Ora vogliamo porci il problema da un altro punto di vista, non la soluzione della rete, ma ci chiediamo di quali proprietà devono godere le reti elettriche per il fatto stesso che esse soddisfano le leggi di Kirchhoff.

La prima proprietà che analizzeremo è legata al fatto che la rete soddisfa le leggi di Kirchhoff. Cioè è indipendente dai bipoli particolari che sono connessi nella rete stessa. Potremmo dire che si tratta della proprietà del grafo della rete e questa proprietà va sotto il nome di teorema di Tellegen.

## TEOREMA DI TELLEGEN

Sarà enunciato nella sua forma più generale possibile che sarà più utile da utilizzare.

Consideriamo due reti con lo stesso grafo, ma nel grafo con bipoli diversi collegati tra di loro.

Prima rete: $V_K I_K$

Seconda rete: $V^*_K I^*_K$

Indicheremo tensioni e correnti nei singoli rami della prima rete $V_K I_K$ per k che va da 1 a L. Analogamente per la seconda rete con $V^*_K I^*_K$ le tensioni e le correnti. Le due reti hanno lo stesso grafo ma non necessariamente gli stessi bipoli in ogni singolo ramo.

Il teorema di Tellegen, in base alla ipotesi che le due reti soddisfano le leggi di Kirchhoff ai nodi e alle maglie ed alla ipotesi che si assuma la stessa convenzione, dell'utilizzatore o del generatore, per ogni ramo delle due reti, enuncia che

$\sum_k V_K I^*_K = 0$

Vale anche $\sum_k V^*_K I_K = 0$

Tale teorema è detto anche delle potenze virtuali.

La dimostrazione del teorema ci fa entrare ancora meglio nel significato che le reti soddisfano le leggi di Kirchhoff.

Abbiamo il ramo k-esimo con la tensione tra r ed s.

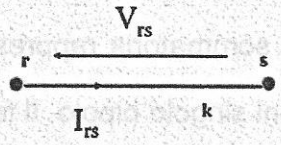
Ci chiediamo se è possibile descrivere la sommatoria che dobbiamo dimostrare essere identicamente nulla con due pedici che individuano i due nodi r ed s generici tra i quali è inserito il lato generico k?

Per passare ad una sommatoria estesa ai pedici r s invece che al pedice k, ci sono due problemi: scrivendo la sommatoria su due pedici è evidente che se r ed s variano tra 1 ed N nodi le coppie r s sono qualsiasi, cioè in questa sommatoria sono comprese tutte le coppie di nodi del grafo in considerazione. In realtà nella rete che stiamo analizzando, alcune

## Dimostrazione

$$\sum_k V_k I_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^*$$

lati nodi




$$\sum_k V_k I_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^* = \frac{1}{2} \sum_t \sum_s V_{rs} I_{rs}^* =$$

$$\sum_k V_k I_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^* = \frac{1}{2} \sum_t \sum_s V_{rs} I_{rs}^* =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s (V_r - V_s) I_{rs}^*$$

$$\sum_k V_k I_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^* = \frac{1}{2} \sum_t \sum_s V_{rs} I_{rs}^* =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s (V_r - V_s) I_{rs}^* = \frac{1}{2} \sum_r V_r \sum_s I_{rs}^* +$$

$$- \frac{1}{2} \sum_s V_s \sum_r I_{rs}^*$$

$$\sum_k V_k I_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^* = \frac{1}{2} \sum_t \sum_s V_{rs} I_{rs}^* =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s (V_r - V_s) I_{rs}^* = \frac{1}{2} \sum_r V_r \sum_s I_{rs}^* +$$

$$- \frac{1}{2} \sum_s V_s \sum_r I_{rs}^* = 0.$$

coppie di nodi potrebbero essere non collegati, mentre nella sommatoria sarebbero presi in considerazione. Questo fatto non è di disturbo perché se i due nodi non sono collegati allora la corrente che circola tra i due nodi è uguale a zero e quindi il termine nella sommatoria a due indici è zero. Quindi la sommatoria può essere fatta per i nodi e per i lati, rispettivamente a due ed un indice.

Il fattore 1/2 è necessario per ovviare al fatto di prendere lo stesso lato due volte.

A questo punto possiamo dividere in due sommatorie una ad indice r ed una ad indice s. Utilizziamo il fatto che le tensioni devono soddisfare la seconda legge di Kirchhoff e quindi è possibile metterle sotto forma di differenza di potenziale ed al posto di $V_{rs}$ posso scrivere $V_r - V_s$.

Si arriva ad avere una differenza di due sommatorie, entrambe nulle perché ci sono sommatorie di correnti che vanno dal noto r fisso al generico nodo s collegato con il nodo r. E' cioè la somma delle correnti uscenti dal nodo r. Questa sommatoria, per la prima legge di Kirchhoff e per le ipotesi, è nulla, quindi lo è tutto il primo termine. Analogamente nel secondo termine compaiono le sommatorie estese ad r delle correnti I* con pedice rs il che significa

che varia r mentre è fissato s e si tratta di tutte le correnti entranti nel nodo s a partire dal generico nodo r. Anche questa sommatoria è zero. E questo dimostra il teorema.

COROLLARIO

Se ci limitiamo ad un unico circuito, per cui $\sum_k V_K I_K = 0$, la sommatoria rappresenta le potenze assorbite (per la convenzione dell'utilizzatore) da ogni singolo bipolo. Il fatto che la somma delle potenze assorbite sia uguale a zero significa che la somma delle potenze erogate è uguale alla somma delle potenze assorbite. Se nella rete esistono tensioni e correnti vuol dire che qualcuno dei bipoli è attivo e non passivo, cioè c'è almeno un generatore. In tal caso in quel ramo di indice k la potenza risulterà negativa. Si tratta di un principio di conservazione delle potenze, che ci aspettavamo altrimenti sarebbe stato disatteso il principio di conservazione dell'energia che invece deve essere comunque soddisfatto. La conservazione delle potenze è un corollario del teorema di Tellegen.

Corollario: "In una rete la potenza fornita dai generatori presenti è pari alla potenza assorbita dai bipolo passivi della rete stessa".

LE PROPRIETÀ DI NON AMPLIFICAZIONE

Una delle proprietà in regime continuo, quando le correnti e le tensioni non variano nel tempo è quella di non amplificazione.

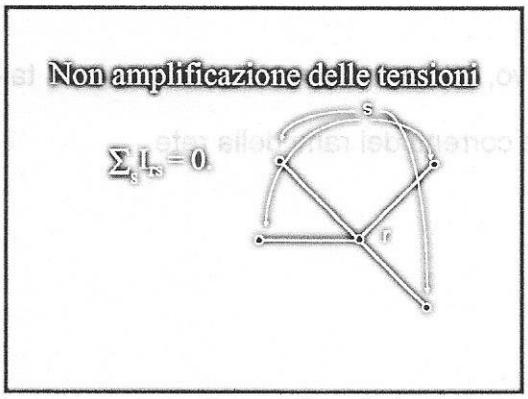
• Principio di non amplificazione delle tensioni:

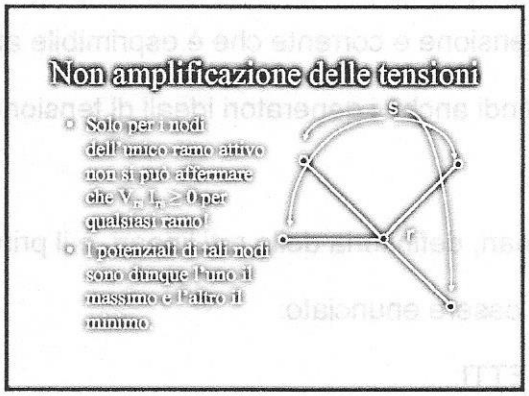
Se in una rete di bipoli esiste un solo ramo attivo, allora il potenziale dei due nodi a cui il lato attivo si appoggia sono l'uno il massimo e l'altro il minimo tra tutti i potenziali dei nodi della rete.

La dimostrazione è fatta tramite il teorema di Tellegen o meglio del suo seguente corollario di non amplificazione delle tensioni:

• Se per un nodo r tutti i prodotti $V_{rs} I_{rs}$ delle tensioni e delle correnti che convergono nel

nodo stesso - con le convenzioni implicite nell'ordine dei pedici - sono maggiori od eguali a zero, il potenziale di tale nodo non può essere né quello massimo né quello minimo tra i potenziali di tutti i nodi della rete.




Cioè, in pratica, se prendo un nodo della rete e faccio i prodotti $V_{rs}$ $I_{rs}$ per tutti i rami che confluiscono in quel nodo e trovo che tutti questi prodotti sono maggiori di zero allora posso affermare che il potenziale di quel nodo non può essere ne il minimo ne il massimo. Questo perchè in quel nodo la somma delle correnti confluenti in quel nodo deve essere per la prima legge di Kirchhoff uguale a zero. Questo implica che tutte le correnti non possono essere positive. Alcune saranno positive ed altre saranno negative. La sommatoria su s implica correnti uscenti. quelle negative saranno quelle entranti. Anche per le $V_{rs}$ relative ad un nodo r potremmo affermare che non sono tutte positive o negative, alcune sono positive ed altre sono negative. Questo, parlando della d.d.p.fra nodo r e nodo s, equivale a dire che il nodo r non può essere ne il minimo ne il massimo perché la differenza di potenziale tra questo nodo ed altri nodi della rete sono alcune positive ed altre negative, quindi $V_r$ non è ne il massimo ne il minimo. E questo dimostra la proprietà prima enunciata.

• Solo per i nodi dell'unico ramo attivo non si può affermare che $V_{rs}$ $I_{rs} \geq 0$ per qualsiasi ramo! (ramo attivo => c'è un generatore).

• I potenziali di tali nodi sono dunque l'uno il massimo e l'altro il minimo.

Questa proprietà è, come detto, valida in regime continuo, quando tensioni e correnti non variano nel tempo. Questo perchè vedremo che in tensioni e correnti che variano nel tem-

po è possibile ottenere delle amplificazioni, di tensione o di corrente e capiremo dove è il punto in cui la dimostrazione fatta ora cade.

Non amplificazioni delle correnti:

• Se in una rete di bipoli esiste un solo ramo attivo, allora la corrente che circola in tale ramo è la più grande in valore assoluto tra tutte le correnti dei rami della rete.

LE RETI LINEARI

Dalle reti in generale passiamo alle reti lineari. In queste reti i bipoli sono lineari, o normali, cioè caratterizzati da una legge caratteristica tra tensione e corrente che è esprimibile attraverso una relazione lineare. Comprendiamo quindi anche i generatori ideali di tensione e corrente.

La proprietà più importante delle reti elettriche lineari, definitoria delle reti lineari, è il principio di sovrapposizione degli effetti che può così essere enunciato:

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

• In una rete in cui agiscano più generatori (*cause*), le correnti nei singoli rami (*effetti*) possono essere ottenute sommando algebricamente le correnti che si avrebbero nei rami corrispondenti qualora ogni generatore agisse da solo.

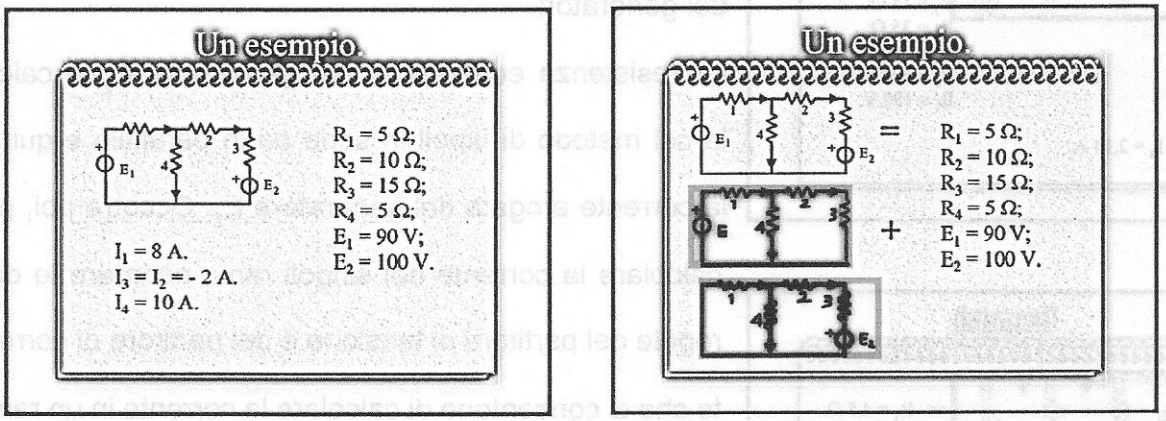
Per applicare la sovrapposizione dobbiamo far funzionare un generatore uno per volta. Questo significa dover eliminare gli altri generatori. Questo si fa sostituendoli con dei bipoli cortocircuito, cioè i generatori di f.e.m. vanno sostituiti con dei bipoli cortocircuito. Ricordiamo che i generatori di f.e.m. sono stati introdotti traslando la caratteristica di un bipolo corto circuito verso l'alto. Questo significa che un generatore ideale di tensione, di f.e.m. che eroghi una tensione zero è equivalente ad un bipolo cortocircuito.

In maniera del tutto analoga il generatore ideale di corrente si elimina sostituendolo con

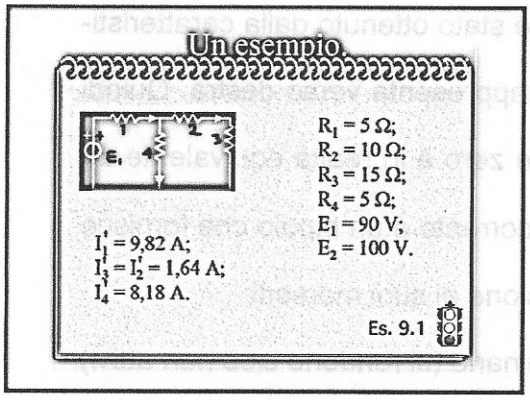
un circuito aperto. Infatti il generatore ideale di corrente è stato ottenuto dalla caratteristica di un bipolo circuito aperto traslando la retta che lo rappresenta verso destra. Quindi un generatore ideale di corrente che eroga una corrente zero è in realtà equivalente ad un circuito aperto. Si ricorda che il generatore ideale di corrente è un bipolo che fornisce sempre la stessa corrente indipendentemente dalla tensione ai suoi morsetti.

Quindi i generatori ideali di tensione e di corrente si eliminano (si rendono cioè non attivi) semplicemente con un corto circuito per il generatore di tensione e con circuito aperto per il generatore di corrente. Nel linguaggio corrente si usa dire cortocircuitando i generatori di tensione e aprendo il generatore di corrente, frase che non è corretta perché un generatore di tensione non può essere cortocircuitato in quanto entrano in contraddizione due idealità: il corto circuito vuole ai suoi morsetti una tensione zero mentre un generatore ideale di tensione vuole ai suoi morsetti la sua tensione quindi non è possibile concepire di cortocircuitare un generatore ideale di tensione. Discorso analogo per il generatore ideale di corrente. La frase usata è molto comune e va dunque interpretata come una sostituzione di un bipolo cortocircuito del generatore ideale di tensione.

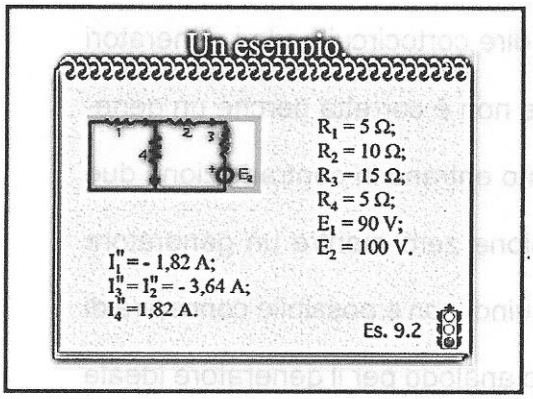
Vediamo un esempio di come si applica la sovrapposizione degli effetti.




A sinistra il circuito dato e a destra quelli ottenuti per sostituzione dei due generatori.

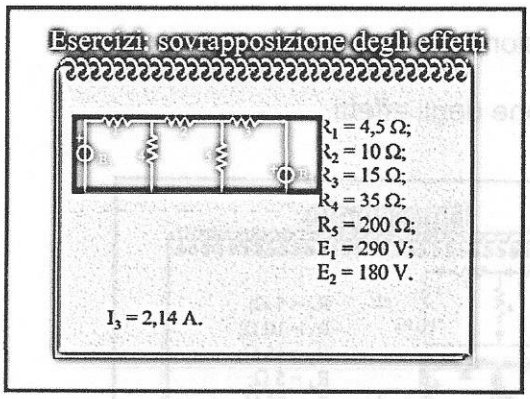



E' facile calcolare la corrente $I'_1$ nel ramo 1 in quanto è evidente che il generatore $E_1$ vede la serie di 2 e 3 con in parallelo 4 ed il tutto in serie ad 1.



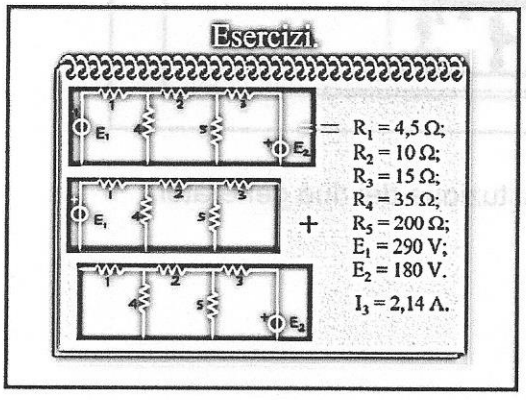

Nella seconda rete (seconda immagine) è presente solo il generatore $E_2$. La corrente in 2 e 3, a parte il verso, è uguale alla tensione $E_2$ diviso la resistenza equivalente che il generatore vede che è il parallelo di 1 e 4 con in serie 2 e 3.

A questo punto è evidente che le correnti nei singoli rami nel circuito originario sono pari alla somma dei valori indicati con un apice e con due apici.




Per ultimo (ultime due immagini) un esercizio su una rete, già risolto in altri metodi, con il metodo delle correnti di maglia, da risolvere con la sovrapposizione degli effetti, avendo (vd. sotto) due circuiti per sostituzione dei generatori.

Le resistenza equivalente dal generatore $E_2$ si calcola col metodo di bipoli in serie ed in parallelo e quindi la corrente erogata dal generatore $E_2$. Occorre poi, per calcolare la corrente nei singoli rami, ricordare le due regole del partitore di tensione e del partitore di corrente che ci consentono di calcolare la corrente in un ramo sapendo la corrente totale e le resistenze dei due rami e, nel partitore di tensione, la tensione su uno dei due resistori in serie conoscendo la tensione alla serie delle due resistenze e i valori delle due resistenze dei due resistori.



LEZIONE 10

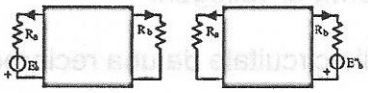
# Caratterizzazione esterna delle reti

Prof. Luciano De Menna
43'58"

Teorema di reciprocità
Caratterizzazione esterna delle reti attive
Teorema del generatore equivalente di f.e.m.
Teorema del generatore equivalente di corrente
Esempio
Esercizi

In questa lezione continueremo lo studio delle reti lineari, come fatto nella lezione precedente in cui abbiamo enunciato il principio della sostituzione di cui abbiamo visto come può servire per risolvere una rete elettrica riducendola a più reti in ognuna delle quali agisce soltanto un generatore alla volta. Quindi ognuna di queste reti può essere risolta applicando le regole della serie e del parallelo.

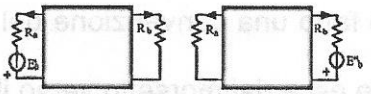
Enunciato del teorema di reciprocità



$$\frac{E'_a}{I'_b} = \frac{E''_b}{I''_a}$$

Una nuova proprietà che prenderemo in esame prende il nome di TEOREMA DI RECIPROCITÀ, che sarà enunciato e poi dimostrato usando il teorema di Tellegen che è uno strumento molto forte per l'analisi delle reti in generale in quanto è valido con ipotesi molto poco restrittive, basta solo che le reti soddisfino le Leggi di Kirchhoff.

Dimostrazione del teorema di reciprocità



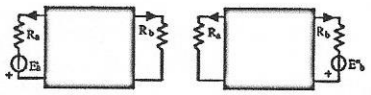
$$\sum_k V'_k I''_k = -E'_a I''_a + R_a I'_a I''_a + \sum_{k \neq a} R_k I'_k I''_k = 0$$

$$\sum_k V''_k I'_k = -E''_b I'_b + R_b I''_b I'_b + \sum_{k \neq b} R_k I''_k I'_k = 0$$

TEOREMA DI RECIPROCITÀ

Sono date due reti identiche con la differenza che nella prima il generatore è inserito nel ramo a mentre nella seconda è inserito nel ramo b. Le due reti sono passive tranne che per la presenza di un unico generatore che nella prima rete è nella ramo a e nella seconda rete è nel ramo b. I generatori hanno rispettivamente $E'_b$ e $E''_b$.

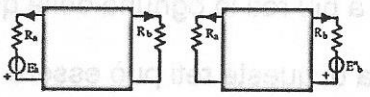
Dimostrazione del teorema di reciprocità



$$\sum_k V'_k I''_k = -E'_a I''_a + \sum_k R_k I'_k I''_k = 0$$

$$\sum_k V''_k I'_k = -E''_b I'_b + \sum_k R_k I''_k I'_k = 0$$

E quindi la tesi!



$$\frac{E'_a}{I'_b} = \frac{E''_b}{I''_a}$$

C.V.D.

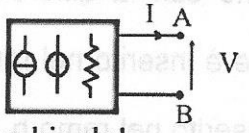
Il teorema di reciprocità enuncia che il il rapporto $E'_a / I'_b$ è uguale al rapporto $E''_b / I''_a$.

Si potrebbe dire che il rapporto tra causa ed effetto, volendo vedere come causa le tensioni ed effetto le correnti, allora il rapporto tra causa in a con effetto in b, se la rete è la stessa, è uguale al rapporto tra la causa in b e l'effetto in a. La dimostrazione fa uso del teorema di Tellegen. Esso si applica due volte, una volta prendendo come tensioni le tensioni della prima rete (singolo apice ') e come correnti le correnti della seconda rete (doppio apice '') ed una volta prendendo come tensioni le tensioni della seconda rete e le correnti della prima rete. Le due reti hanno lo stesso grafo, siamo nelle condizioni di validità del teorema di Tellegen.

La reciprocità è una proprietà che discende nel modello circuitale da una reciprocità che esiste nel modello del campo magnetico.

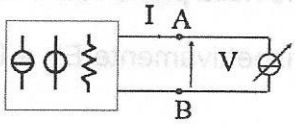
Dobbiamo stabilire che cosa succede se la rete, vista dai due morsetti A e B, non è più una rete passiva ma è una rete che contiene anche generatori.

Una qualsiasi rete vista da due suoi morsetti




È un bipolo!

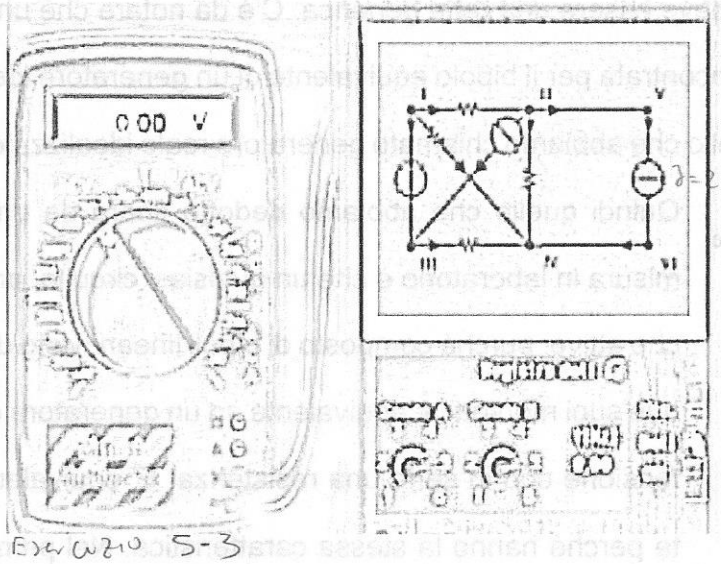
Alimentata da un generatore di corrente variabile




Dalla figura possiamo dire che sul bipolo equivalente tra i morsetti A e B abbiamo fatto una convenzione del generatore perché la corrente esce dal morsetto verso il quale si dirige la freccia del verso della tensione. Tale rete, vista dai morsetti A e B è un bipolo, per definizione. Questo perché comunica con l'esterno solo con i morsetti A e B. Rimane da determinare la caratteristica del bipolo equiva-

L. 10.2

lente alla rete vista da due suoi morsetti, quando la rete non è appunto passiva. Il modo di risoluzione più semplice del problema è quello di immaginare di alimentare la rete dai morsetti A e B con un generatore di corrente variabile. Esso è un generatore in cui, girando una certa manopola, eroga una corrente costante ma di valori diversi a seconda della posizione della manopola. Per ogni valore della corrente potremmo misurare la tensione tra i morsetti A e B e quindi dedurre la caratteristica del bipolo nel pino I V, riportando in questo piano, per ogni valore di I il corrispondente valore di V. Cosa che possiamo fare nel laboratorio virtuale, avendo a disposizione un multimetro.



Esercizio 5-3

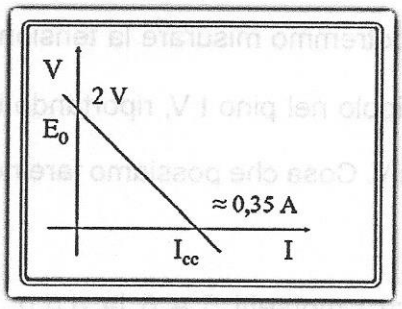
Tra i morsetti 5 e 6 la d.d.p. è 2.00V, per I = 0, per corrente nulla.

Con una corrente di 0.1A del generatore di corrente tra il nodo 5 e il nodo 6 abbiamo una tensione di 1.43V. Da 2.00V a vuoto, quando nei nodi 5 e 6 non circolava corrente, la tensione è diminuita. Quindi, nel piano, per x = 0.1, y = 1.43. Aumentando ancora la corrente del generatore di corrente tra 5 e 6 da 0.1 a 0.2 abbiamo una tensione di 0.86V. Quindi nel diagramma, per x = 0.20 abbiamo y = 0.86.

Notiamo che i risultati ottenuti sembrano appartenere ad una retta. Abbiamo poi: x = 0.3, y = 0.29 ed a questo punto ci chiediamo quale è la tensione quando la corrente è zero. Ponendo la tensione fra 5 e 6 a zero (V = 0.0V, mettendo un bipolo cortocircuito), otteniamo il valore di I = 0.35A per un valore V = 0.0V. Riportando il dato x = 0.35 e y = 0.00 vediamo sulla retta I tale punto e ci rendiamo conto che la caratteristica è una retta, è cioè lineare. Questo risultato sperimentale è ottenibile pensando anche che la rete in esame è una rete composta da bipoli tutti con caratteristica di tipo lineare. Quindi come possia-

mo immaginare che ai morsetti A e B il comportamento del bipolo equivalente sia di tipo non lineare? Evidentemente sarà di tipo lineare. Naturalmente non è detto che passi per l'origine: una dipendenza di tipo lineare qualsiasi con una retta inclinata con un certo coefficiente angolare.

**La caratteristica nel piano (I,V).**

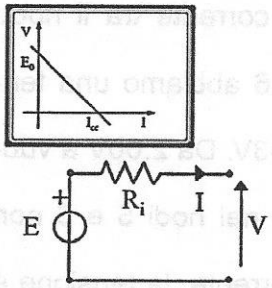



A lato l'immagine del caso in esame.

$I_{cc}$ è la cosiddetta corrente di cortocircuito.

Questo è un risultato "banale": la caratteristica del bipolo equivalente di una rete attiva vista da due morsetti deve essere una retta generica. C'è da notare che una caratteristica simile l'abbiamo già incontrata per il bipolo equivalente di un generatore ideale con una resistenza in serie, quello che abbiamo chiamato generatore reale idealizzato.

Il gen. ideale di f.e.m. con una resistenza in serie.



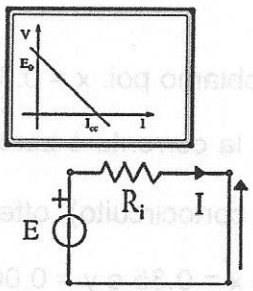

$E_0 = E.$

$V = E_0 - R_i I$

Quindi quello che abbiamo dedotto finora da una misura in laboratorio è che un qualsiasi circuito, anche attivo, purché composto di bipoli lineari, visto da due suoi morsetti, è equivalente ad un generatore di tensione con in serie una resistenza. E' equivalente perché hanno la stessa caratteristica. Nel primo caso la retta è individuata da $E_0$ e $I_{cc}$, da secondo da E e da $R_i$, cioè il valore della resistenza $R_i$. E la caratteristica del generatore idealizzato sappiamo essere

$$V = E_0 - R_i I$$

La corrente di corto circuito.



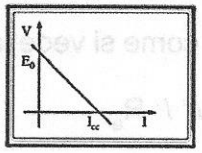

$I_{cc} = E_0 / R_i;$

$R_i = E_0 / I_{cc}.$

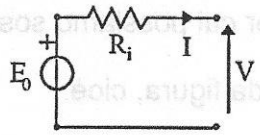
E' facile rendersi conto che mettendo in corto circuito i morsetti A e B la corrente che circola, cioè la corrente di cortocircuito, $I_{cc}$, è proprio pari a $E_0 / R_i$ perché a questo punto tra i morsetti A e B c'è una resistenza nulla, quindi posso dedurre $Ri = E_0 / I_{cc}$.

Quindi possiamo dire che la caratteristica di una qualsiasi rete vista da due suoi morsetti

Il gen. ideale di f.e.m. con una resistenza in serie. anche se attiva è del tipo descritto dalla figura a lato,

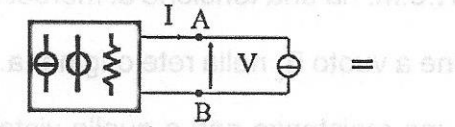


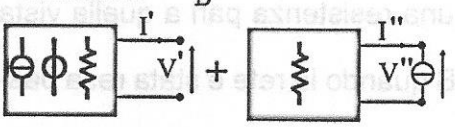

$$V = E_0 - I \frac{E_0}{I_{cc}}$$




Abbiamo che $E_0 / I_{cc}$ è la resistenza interna che deve essere messa in serie ad un generatore di tensione ideale di valore $E_0$ che è pari alla tensione a vuoto vista tra i morsetti A e B. Quindi l'equivalenza è del tutto dimostrata. Adesso il problema è che per calcolare la resistenza $R_i$ si deve calcolare la tensione a vuoto e la corrente di cortocircuito. In realtà posso farne a meno e posso dimostrare che la resistenza $R_i$ si calcola in modo molto semplice dall'esame della rete particolare e ciò si può ottenere applicando il teorema di sovrapposizione degli effetti alla rete in esame, che è una rete attiva, racchiusa dalla scatola, alimentata da un generatore di corrente tra i morsetti A e B.

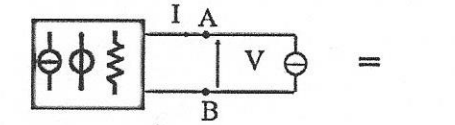
Applicando la sovrapposizione degli effetti

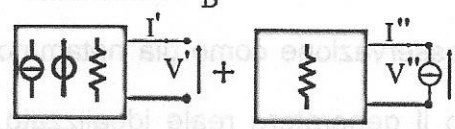



$$I = I' + I'' = I'' = -\frac{V''}{R_e}$$

$$V = V' + V'' = E_0 + V'' = E_0 - R_e I$$




Applicando la sovrapposizione degli effetti possiamo dire che le grandezze in essa sono ottenibili come somma delle grandezze tensioni e correnti nella rete in cui abbiamo eliminato il generatore di corrente esterna sostituendolo, come visto, con un circuito aperto, con un'altra rete in cui la rete interna, cioè la scatola, è stata resa passiva (compare solo il resistore) mentre è in funzione solo il generatore esterno di corrente. Le grandezze della prima rete saranno indicate con un singolo apice ('), quelle della seconda rete con un doppio apice ("). Se effettuiamo la somma, I' è nullo perché la rete è aperta e quindi I = I" che peraltro è pari a V" diviso la resistenza equivalente vista dai morsetti A e B. Ora posso parlare di resistenza equivalente perché la rete che stiamo trattando è una rete passiva, composta da soli resistori; per cui abbiamo tra i morsetti A e B una opportuna resistenza equivalente $R_e$. La relazione va

con il segno - perché per come abbiamo fatto le convenzioni sul bipolo equivalente alla scatola resa passiva abbiamo fatto la convenzione del generatore perché come si vede la tensione è in un verso e la tensione è uscente. Quindi la caratteristica è V" / $-R_e$.

Poi abbiamo che V' coincide con $E_0$ perché è la tensione a vuoto per cui possiamo sostituire i valori nella relazione V = V' + V" ed ottenere il risultato come da figura, cioè:

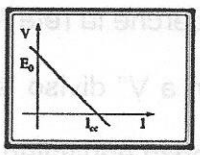
$$V = V' + V'' = E_0 + V'' = E0 - R_e I$$

Questa è la stessa relazione ottenuta prima, solo che sappiamo cosa è $R_i$: la resistenza $R_i$ che devo mettere in serie al generatore ideale di tensione è proprio la resistenza che si vede ai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva. Quindi possiamo concludere con il TEOREMA EQUIVALENTE DEL GENERATORE DI FORZA ELETTROMOTRICE:

**Teorema del generatore equivalente di f.e.m.**

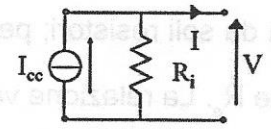
- Una rete attiva vista da due suoi morsetti A e B è equivalente ad una rete con un generatore ideale di f.e.m. con in serie un resistore.
- Il generatore di f.e.m. ha una tensione ai morsetti pari alla tensione a vuoto $E_0$ nella rete originaria.
- Il resistore ha una resistenza pari a quella vista dai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva, e cioè i generatori di f.e.m. sono stati sostituiti da corto circuiti e quelli di corrente da bipoli a vuoto.


- Una rete attiva vista da due suoi morsetti A e B è equivalente ad una rete con un generatore ideale di f.e.m. con in serie un resistore.
- Il generatore di f.e.m. ha una tensione ai morsetti pari alla tensione a vuoto $E_0$ nella rete originaria.
- Il resistore ha una resistenza pari a quella vista dai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva, e cioè i generatori di f.e.m. sono stati sostituiti da corto circuiti e quelli di corrente da bipoli a vuoto.


Il generatore ideale di corrente con una resistenza in parallelo.

$$I = I_{cc} - \frac{V}{R_i}.$$




E' banale una osservazione come già notammo quando introducemmo il generatore reale idealizzato, che la caratteristica della retta, come in figura, che interseca gli assi V ed I in $E_0$ e $I_{cc}$, può essere vista sia come la caratteristica di un generatore ideale di tensione ruotata in verso orario, verso il basso, sia come la ca-

ratteristica di un generatore ideale di corrente che passi in $I_{cc}$, quindi parallela all'asse V, ruotandola in senso antiorario verso sinistra. Cioè questa caratteristica è anche quella di un circuito così costruito: un generatore di corrente ideale che eroga la corrente $I_{cc}$ con in parallelo una resistenza $R_i$. Infatti la corrente che circola in $R_i$ è $V / R_i$, con V la corrente ai morsetti; quindi possiamo dedurre che la corrente I che eroga questo circuito nel suo complesso deve essere pari per l'equazione di equilibrio ai nodi nel nodo in alto, cioè $I = I_{cc} - V / R_i$.

Queste considerazioni ci portano a dedurre il teorema duale del precedente, il TEOREMA DEL GENERATORE EQUIVALENTE DI CORRENTE:

**Teorema del generatore equivalente di corrente.**

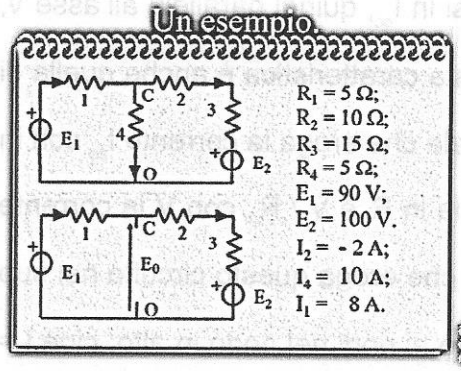
- Una rete attiva vista da due suoi morsetti A e B è equivalente ad una rete costituita da un generatore ideale di corrente con in parallelo un resistore.
- Il generatore di corrente eroga una corrente pari alla corrente di corto circuito $I_{cc}$ ai morsetti A e B nella rete originaria.
- Il resistore ha una resistenza pari a quella vista dai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva, e cioè i generatori di f.e.m. sono stati sostituiti da corto circuiti e quelli di corrente da bipoli a vuoto.


- Una rete attiva vista da due suoi morsetti A e B è equivalente ad una rete costituita da un generatore ideale di corrente con in parallelo un resistore.
- Il generatore di corrente eroga una corrente pari alla corrente di corto circuito $I_{cc}$ ai morsetti A e B nella rete originaria.
- Il resistore ha una resistenza pari a quella vista dai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva, e cioè i generatori di f.e.m. sono stati sostituiti da corto circuiti e quelli di corrente da bipoli a vuoto.


Il primo teorema visto è detto TEOREMA DI TEVENIN.

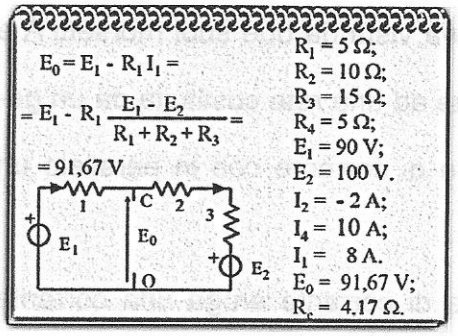
Il secondo teorema è detto TEOREMA DI NORTON.

[34'40"]

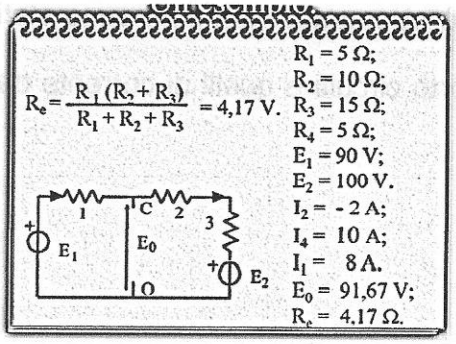



4-4

Come esempio calcoliamo la corrente nel ramo 4, che è 10A, utilizzando il teorema di f.e.m. (di Tevenin). I morsetti che scegliamo sono i morsetti C e O, i morsetti del ramo 4. In pratica eliminando la resistenza $R_4$ dobbiamo calcolare la tensione che si presenta a vuoto tra i morsetti C e O e, successivamente la resistenza che si vede tra gli stessi morsetti C e O quando la rete è stata resa passiva. Dopodiché potremo costruire il circuito equivalente e calcolare in un solo colpo la corrente nel ramo 4. Essa può anche essere misurata col multimetro virtuale, risultando 91.67V la tensione a vuoto tra i morsetti C e O, quindi la $E_0$ del generatore equivalente di f.e.m. è 91.67V. Tale risultato può essere ottenuto dal calcolo sull'osservazione diretta della rete, che appare come la serie di due generatori $E_1$ ed $E_2$, con in serie resistenze $R_1$, $R_2$, $R_3$.




$E_0$ è dato da $E_1$ (la tensione tra i morsetti del generatore a sinistra) meno la caduta sulla resistenza $R_1$, $R_1I_1$, con $I_1$ ottenuta come $E_1 - E_2$ diviso la somma delle resistenze. Tenendo conto dei valori, il risultato ottenuto è appunto 91.67V.




Dobbiamo calcolare la resistenza vista dai morsetti 2 e 4. Per farlo occorre rendere passiva la rete, cioè dobbiamo eliminare i generatori presenti.

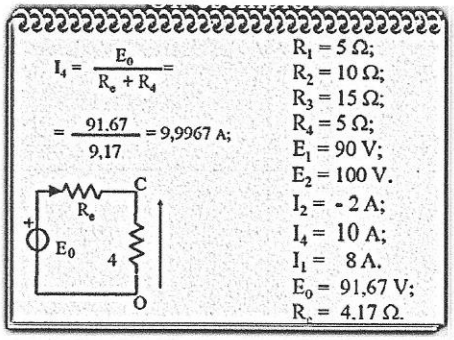
Tra il nodo 1 ed il nodo 3 c'è un generatore di tensione da sostituire con un cortocircuito.

Tra il nodo 6 ed il nodo 4 c'è un generatore di tensione da sostituire con un cortocircuito.

La resistenza tra i morsetti 2 e 4, con queste variazioni, misura 4.17Ω.

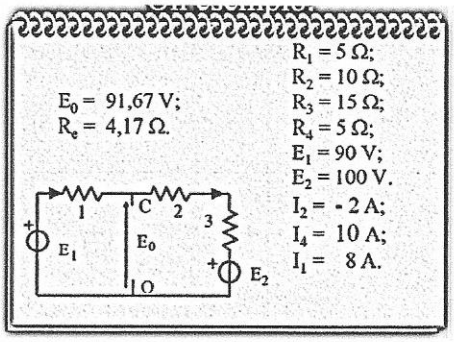
Il risultato è banale perché quando i generatori ideali di tensione sono stati cortocircuitati

L.10.8




evidentemente ciò che si vede tra i morsetti C e O è la serie di 2 e 3 con in parallelo 1.

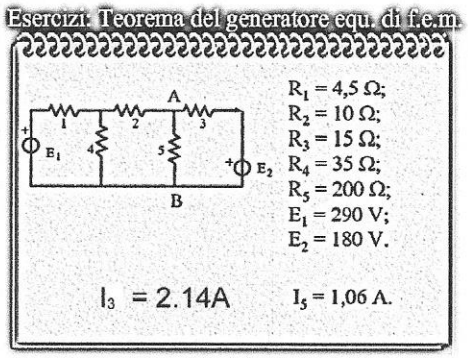
A questo punto possiamo calcolare la corrente nel ramo 4 facilmente perché il tutto è ora equivalente ad un generatore di tensione $E_0$ con una resistenza in serie $R_e$ che è pari a 4.17Ω più la resistenza $R_4$ di 5Ω. Quindi, in conclusione, troviamo $I_4$ = 9.9967V, come da figura, che, in approssimazione di due cifre è 10Ω, come abbiamo trovato in precedenza.




Esercizi da svolgere:

Teorema di Thevenin

Calcolare I3, I5 con il teorema del generatore di f.e.m. nel seguente circuito:




I° sottocircuito, è spento $E_2$

La Req vista da $E_1$ è

$(((3 // 5) + 2) // 4) + 1$

$\frac{(\frac{15}{8} + 2) \cdot 4}{\frac{15}{8} + 2 + 4} + 1 = \frac{\frac{31}{2}}{\frac{63}{8}} + 1 = \frac{31}{2} \cdot \frac{8}{63} + \frac{63}{63} = 2,96\ \Omega$

L.10.9

Esercizi da svolgere.

Calcolare I3, I5 con il teorema del generatore di f.e.m. nel seguente circuito:



L_10_10

LEZIONE 11

# Metodi sistematici per la risoluzione delle reti

Prof. Luciano De Menna
44'24"

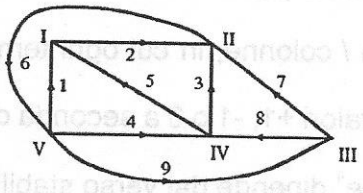
Metodi sistematici per la risoluzione delle reti
Matrice di incidenza
Forma matriciale delle equazioni di Kirchhoff
Teoremi di sostituzione

**Metodi sistematici per la risoluzione delle reti**

- Il grafo della rete;
- I bipoli nei rami della rete.

I METODI SISTEMATICI PER LA RISOLUZIONE DELLE RETI rappresentano i metodi che impostano il problema della risoluzione di una rete elettrica in materia tale che essa possa essere fornita ad un calcolatore per ottenere la risoluzione automatica appunto delle reti o del circuito. E' quindi necessario adattare il modo in cui queste informazioni vengono date. A tale scopo ci chiediamo quali sono le informazioni e che tipo sono le informazioni che sono contenute in uno schema circuitale.

**Il grafo orientato della rete**



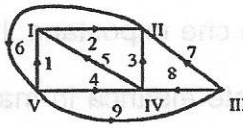

Nello schema circuitale possiamo distinguere due informazioni distinte: il grafo della rete (il modo in cui i vari nodi della rete sono collegati tra di loro attraverso lati che contengono dei bipoli) ed i bipoli nei rami della rete (conoscenza che avviene attraverso le caratteristiche dei bipoli). Queste due informazioni sono e si possono mantenere distinte e dalla prima informazione consentono di scrivere le leggi di Kirchhoff ai nodi ed alle maglie mentre le seconde informazioni sono necessarie per poter scrivere le leggi caratteristiche, cioè il legame tra tensione e corrente in ogni singolo ramo.

Cominciamo con il grafo *orientato* della rete.

Si dice orientato perché per ogni ramo è stato scelto il verso ad arbitrio di percorrenza del

**Il grafo orientato della rete e la matrice di incidenza $A_c$**

$$a_{ij} = \begin{cases} = +1 \text{ se il ramo j esce dal nodo i;} \\ = -1 \text{ se il ramo j entra nel nodo i;} \\ = 0 \text{ se il ramo j non interessa il nodo i.} \end{cases}$$




**La matrice di incidenza**

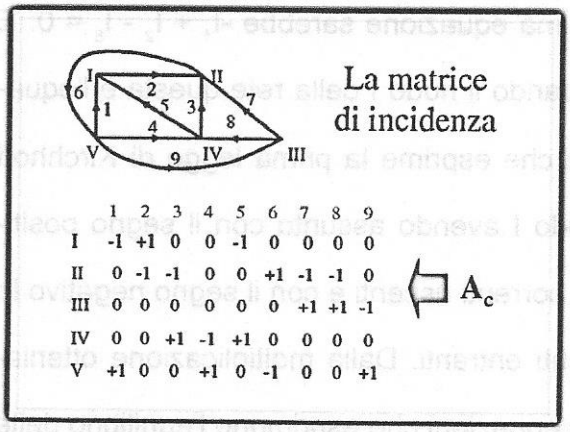
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | -1 | +1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| II | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | +1 | -1 | -1 | 0 |
| III | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | +1 | -1 |
| IV | 0 | 0 | +1 | -1 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V | +1 | 0 | 0 | +1 | 0 | -1 | 0 | 0 | +1 |

ramo il che equivale a dire che si è scelto il verso per le correnti positive per quel ramo. Normalmente useremo la convenzione dell'utilizzatore quindi aver scelto un ramo per la corrente significa automaticamente aver scelto anche il verso positivo per la tensione. In figura un grafo di uno schema circuitale con 5 nodi e 9 lati. Per ogni lato è stato scelto un verso, un riferimento e, per questa ragione, si parla di grafo orientato. Dal grafo si devono stabilire le informazioni da fornire ad un calcolatore. Queste informazioni possono essere fornite ad un calcolatore sotto forma numerica attraverso una matrice che prende il nome appunto di matrice di incidenza "completa" $A_c$ identificata dal pedice C che sta per completa. Questo per distinguerla da quella che sarà una matrice ridotta introdotta più avanti. La matrice di incidenza è fatta da n righe, pari la numero dei nodi e da *l* colonne, in cui ogni termine della matrice, che possiamo chiamare $A_{ij}$ per esempio, ha valori +1, -1 o 0 a seconda della proprietà del ramo (vd. figura). Il significato "entra" ed "esce" dipende dal verso stabilito.

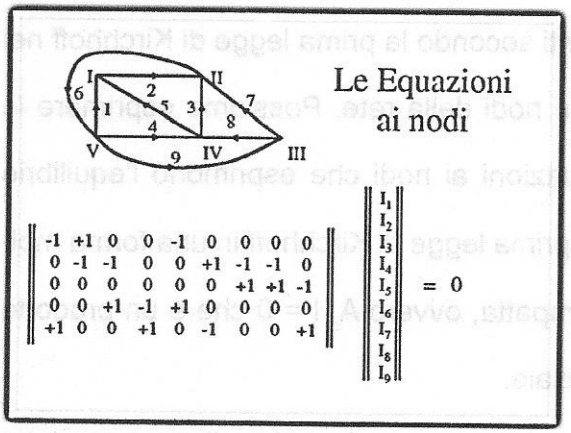
La costruzione di tale matrice rende evidente come le informazioni del grafo siano contenute nella matrice di incidenza. La colonna 1 rappresenta il lato 1 che è orientato andando dal nodo V al nodo I; il verso prescelto esce dal nodo V ed entra nel nodo I. Questo significa che nella prima colonna avremo il valore 1 al posto I, 1 e cioè lato 1, nodo I, perché la corrente entra nel nodo I . Poi, nella stessa colonna avremo 0 in corrispondenza del nodo II, III e IV mentre avremo +1 in corrispondenza del nodo V perché, per l'orientazione che abbiamo scelto, il verso sul lato 1 esce dal nodo V.

La costruzione della matrice di incidenza risulta facile in corrispondenza del grafo.

Per il lato 2, tra i nodi I e I, il verso che abbiamo scelto esce da I e quindi nella posizione I 2 ci deve essere +1, poi il nodo II è interessato dal ramo 2 in quanto il verso scelto sul lato 2 entra nel nodo II e quindi ci sarà un -1 in corrispondenza della posizione II 2; poi avremo (sempre per colonna) 0, 0, 0 in corrispondenza dei nodi III, IV e V perché i nodi III, IV e V non hanno niente a che fare con il lato 2. Per il terzo ramo (colonna 3) abbiamo che esso è inserito tra i nodi IV e II, quindi dobbiamo avere un +1 in corrispondenza del nodo IV ed un -1 in corrispondenza del nodo II. Per il lato 4 abbiamo un -1 al nodo IV ed un +1 al nodo V. Per il lato 5 che è tra i nodi IV e I abbiamo un +1 in corrispondenza del nodo IV ed un -1 in corrispondenza del nodo I e così via.

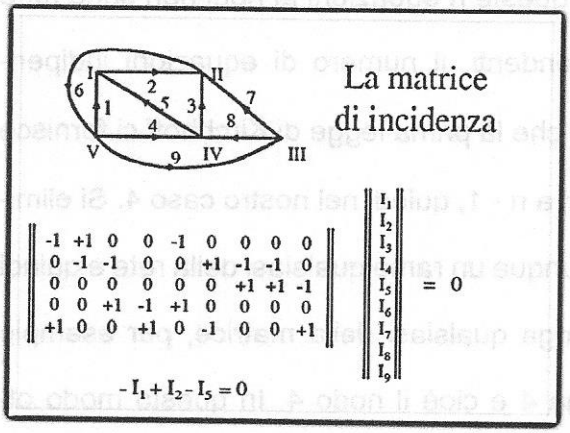



Quindi dal grafo di una rete è molto semplice ricavare la matrice di incidenza completa. D'altra parte, nota la matrice di incidenza completa è possibile costruire il grafo della rete.

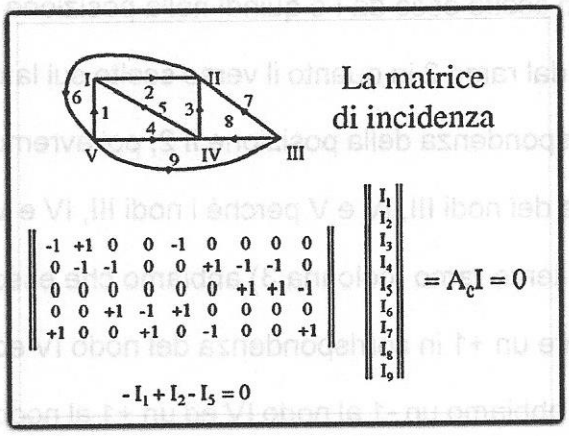


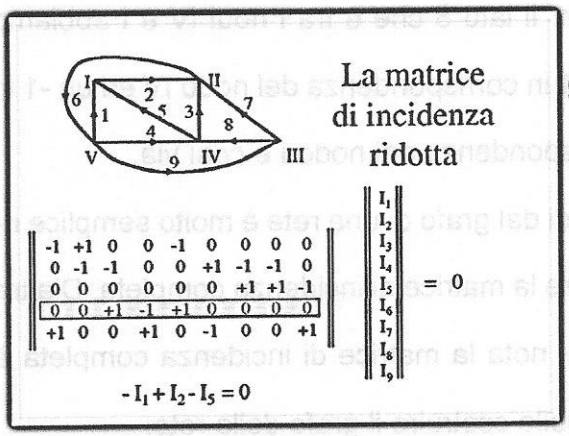

La matrice ha tante righe quanti sono i nodi e quindi il grafo della rete ha 5 punti da disegnare; poi, colonna per colonna, collego i punti dove c'è un -1 ed un +1, con verso dal + al -, cioè esce da + ed entra da -.

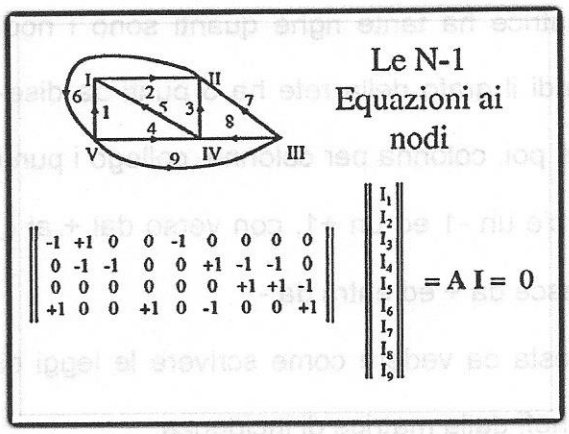
Ora resta da vedere come scrivere le leggi di Kirchhoff dalla matrice di incidenza.

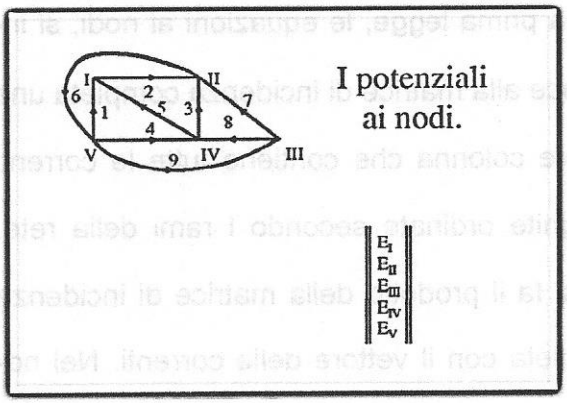



Per la prima legge, le equazioni ai nodi, si introduce alla matrice di incidenza completa una vettore colonna che contiene tutte le correnti incognite ordinate secondo i rami della rete. Poi si fa il prodotto della matrice di incidenza completa con il vettore delle correnti. Nel no-



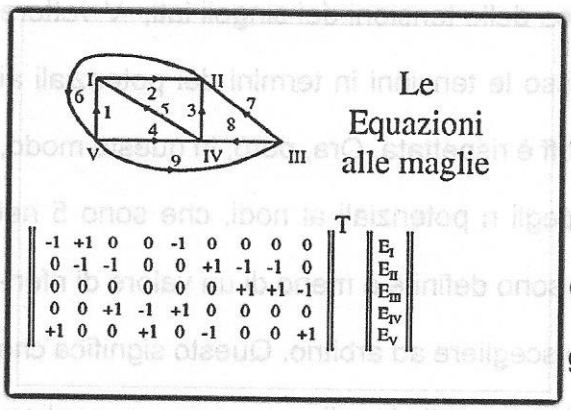




stro caso il prodotto darà un vettore colonna di 5 termini ognuno dei quali si ottiene moltiplicando rispettivamente i termini della prima riga della prima matrice per i termini della colonna del vettore colonna delle correnti. Se uguagliamo a zero il prodotto delle due matrici otteniamo in realtà 5 equazioni eguagliate a zero; la prima equazione sarebbe $-I_1 + I_2 - I_5 = 0$. E guardando il nodo I della rete questa è l'equazione che esprime la prima legge di Kirchhoff al nodo I avendo assunto con il segno positivo le correnti uscenti e con il segno negativo le correnti entranti. Dalla moltiplicazione otteniamo 5 equazioni che esprimono l'equilibrio delle correnti secondo la prima legge di Kirchhoff nei cinque nodi della rete. Possiamo esprimere le n equazioni ai nodi che esprimono l'equilibrio della prima legge di Kirchhoff in una forma molto compatta, ovvero $A_c\, I = 0$ che è un prodotto matriciale.

Però queste n equazioni ai nodi non sono tutte indipendenti, il numero di equazioni indipendenti che la prima legge di Kirchhoff ci fornisce è pari a n - 1, quindi nel nostro caso 4. Si elimina dunque un ramo qualsiasi della rete e quindi una riga qualsiasi della matrice, per esempio la riga 4 e cioè il nodo 4. In questo modo ot-




teniamo la cosiddetta matrice ridotta, che per convenzione è detta solo matrice di incidenza. Tale matrice è A e quindi il prodotto matriciale è rappresentabile come A I = 0.

Ora dobbiamo esprimere le equazioni alle maglie. Abbiamo già osservato l'uso delle tensioni sui singoli rami della rete.

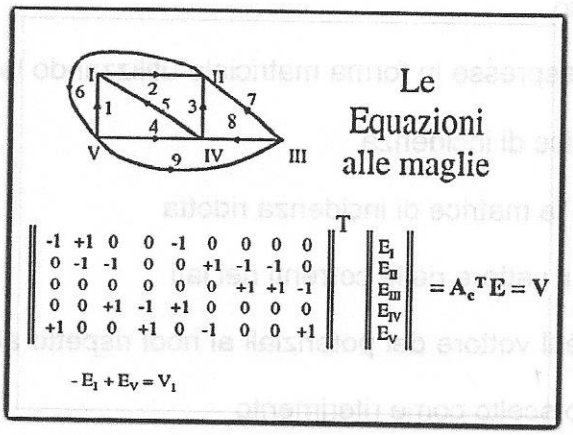
La tensione $V_1$ è la d.d.p. tra il nodo V e I. Se esprimiamo le tensioni ($E_x$) dei singoli lati attraverso i potenziali nei nodi in pratica implicitamente abbiamo imposto il verificarsi della seconda legge di Kirchhoff, cioè la legge alle maglie.

In altre parole scrivere le tensioni in termini di potenziale significa imporre la seconda legge di Kirchhoff.

Ci dobbiamo costruire un vettore colonna dei potenziali nei nodi, nel nostro caso 5, e fare il prodotto matriciale con la matrice trasposta di A completa (inversione delle righe con le colonne). In pratica alla fine è un prodotto colonne per colonne, a titolo semplificativo del fatto.

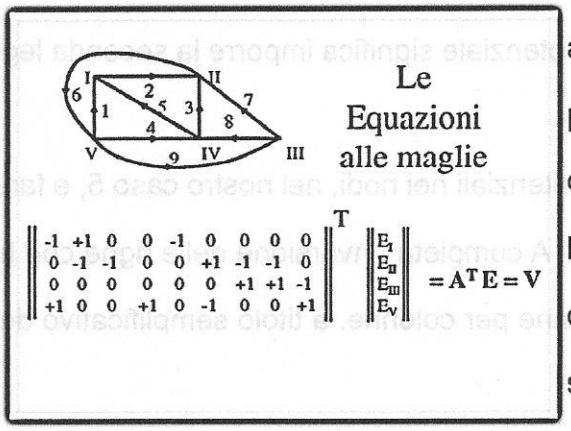
Avremo dunque un vettore di 9 righe perché sono 9 le colonne della matrice di incidenza e quindi sono 9 le righe della matrice trasposta.

Se proviamo a fare per la prima colonna il prodotto colonna della prima colonna matrice con i l vettore colonna dei potenziali ai nodi otteniamo $-E_I + E_V$ che è la tensione tra il nodo V ed il nodo I, quindi $-E_I + E_V = V_1$.




Quindi, in pratica, il prodotto della matrice di incidenza completa trasposta per il vettore colonna dei potenziali ai nodi ci fornisce un vettore colonna che rappresenta le tensioni sui singoli rami della rete. Simbolicamente abbiamo: $A^T_C E = V$.

Con $A^T_C$ matrice di incidenza completa, E matrice delle tensioni dei singoli lati, V vettore colonna delle tensioni di lato. E avendo espresso le tensioni in termini dei potenziali ai nodi ci assicura che la seconda legge di Kirchhoff è rispettata. Ora, però, in questo modo, le tensioni di lato sono espresse in funzione degli n potenziali ai nodi, che sono 5 nel nostro caso. Sappiamo che in realtà le tensioni sono definite a meno di un valore di riferimento, il potenziale di riferimento che possiamo scegliere ad arbitrio. Questo significa che in fondo non è necessario portarsi appresso i 5 potenziali ai nodi ma possiamo scegliere come potenziale di riferimento, cioè potenziale 0, quello di uno dei nodi, in modo tale che quel nodo scompare perché ha potenziale zero e quindi esprimere le tensioni di lato non più in funzione dei 5 potenziali ai nodi ma in funzione dei 4 potenziali ai nodi che non siano quello di riferimento. Se facciamo questo per lo stesso nodo che abbiamo scelto di non considerare nella matrice di incidenza ridotta, la riga quarta (corrispondente al nodo IV) di quella completa, allora questa stessa relazione si può scrivere come in figura a lato, diventando $A^T E = V$, la matrice che si usa è quella ridotta.




Il vettore colonna non presenta più il potenziale $E_{IV}$ del nodo IV perché quel potenziale è zero e non darebbe nessun risultato perché la riga risultante sarebbe l'identità 0 = 0.

In questo modo, le $\ell$ tensioni di lato sono espresse in funzione degli n - 1 potenziali degli altri nodi rispetto al nodo preso come riferimento.

In pratica le leggi di Kirchhoff possono essere espresse in forma matriciale utilizzando la matrice di incidenza.

**Le leggi di Kirchhoff in forma matriciale**

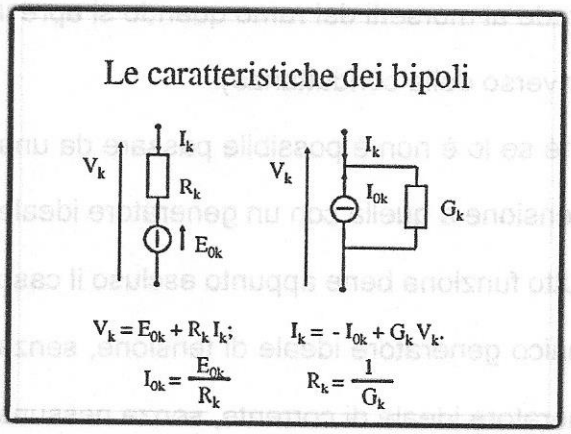
- $\mathbf{A\,I = 0;}$ (1ª - ai nodi)
- $\mathbf{A^T E = V.}$ (2ª - alle maglie)

- A è la matrice di incidenza ridotta
- I è il vettore delle correnti nei lati
- E è il vettore dei potenziali ai nodi rispetto al nodo scelto come riferimento

• V è il vettore colonna delle tensioni

Rimane da affrontare ora il problema delle caratteristiche dei bipoli come input ad un calcolatore.

Si tratta di dare la legge che lega per ogni ramo la tensione alla corrente. Siamo ancora in regime continuo, cioè bipoli che funzionano con correnti e tensioni costanti nel tempo e quindi utilizzeremo solo i bipoli che abbiamo introdotto finora per cui parleremo della relazione tra tensione e corrente sui singoli rami. Deve essere stabilita l'espressione della legge che lega tensione a corrente più generale possibile cioè nella quale siano compresi tutti i casi esaminati finora.



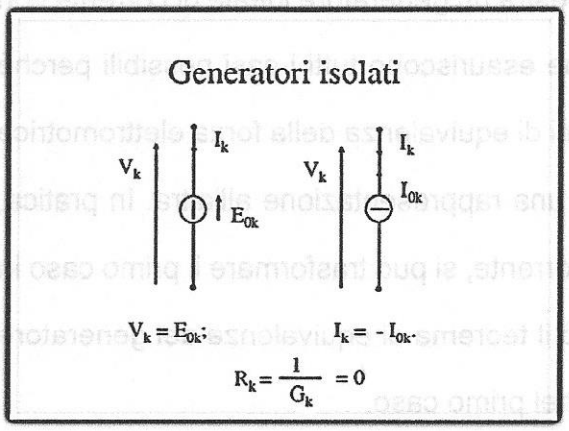

In figura abbiamo a sinistra un generatore ideale di tensione con in serie una resistenza ed a destra un generatore ideale di corrente con in parallelo una conduttanza. Queste due forme esauriscono tutti i casi possibili perché abbiamo introdotto in lezioni precedenti i teoremi di equivalenza della forza elettromotrice e di corrente che ci consentono di passare da una rappresentazione all'altra. In pratica, utilizzando il teorema del generatore ideale di corrente, si può trasformare il primo caso in figura nel secondo caso e viceversa applicando il teorema di equivalenza del generatore di tensione si può trasformare il secondo caso nel primo caso.

A sinistra nella figura delle caratteristiche dei bipoli, nella prima legge, $V_K$ è la tensione sul ramo k-esimo ed è uguale ad $E_{0K}$ più la caduta sulla resistenza $R_K I_K$ (segno + per il verso scelto della corrente).

A destra la corrente $I_K$ è uguale a $-E_{0K}$ (segno - per il verso scelto del generatore ideale di corrente) più $G_K V_K$ che è la corrente che circola dal morsetto superiore al morsetto inferiore nella conduttanza $G_K$, quindi uscente dal nodo che stiamo considerando.

In modo superficiale potremmo pensare di usare o l'una o l'altra rappresentazione racchiudendo tutti i casi possibili nell'ambito dei bipoli introdotti finora. In realtà questo non è vero perché per passare da una rappresentazione all'altra devo tenere conto di cosa è $I_{0K}$ nel primo caso (per applicazione del teorema del generatore equivalente di corrente al ramo quando si mette in corto circuito i morsetti del ramo la corrente che circola è data da $E_{0K} / R_K$ e quindi la corrente equivalente del generatore di corrente è pari a $E_{0K} / R_K$) e cosa è $R_K$ nel secondo (è la resistenza che si vede ai morsetti del ramo quando si apre il generatore di corrente $I_{0K}$ è pari a $1 / G_K$ cioè l'inverso della conduttanza).

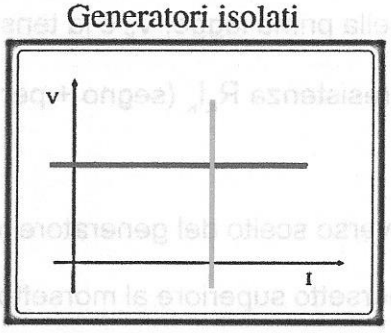
Tutto va bene quando $R_K$ è diverso da 0. Perché se lo è non è possibile passare da una rappresentazione con un generatore ideale di tensione a quella con un generatore ideale di corrente perché $1 / R_K$ perde di significato. Tutto funziona bene appunto escluso il caso in cui $R_K = 0$, quando il ramo si riduce ad un unico generatore ideale di tensione, senza nessun ramo in serie oppure, ad un unico generatore ideale di corrente, senza nessuna conduttanza in parallelo. In tale caso si tratta di generatori isolati. Questa situazione in cui non ci può essere equivalenza è chiara vedendo anche il grafico sul piano V I con la caratteristica nei due casi:




Linea rossa = generatore ideale di tensione.

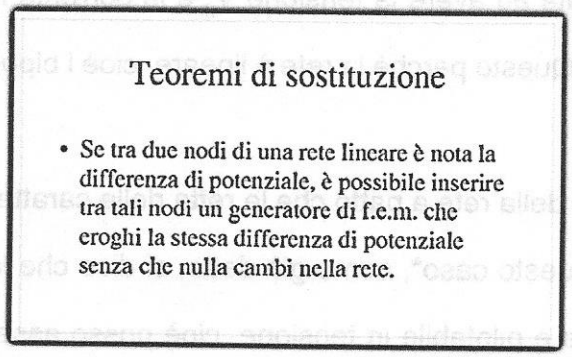
Linea verde = generatore ideale di corrente.

Non è possibile, introducendo una resistenza in serie al primo o in parallelo al secondo, trasformare la caratteristica dell'uno in quella dell'altro. Posso inclinare la retta che rappresenta il generatore ideale di tensione, così come quella che rappresenta il generatore ideale di corrente, ma non potrò mai ruotarla di 90°.




In realtà possiamo eliminare i casi limite usan-

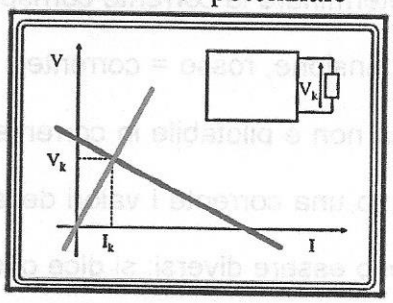
do quelli che sono detti i teoremi di sostituzione.




TEOREMI DI SOSTITUZIONE

• Se tra due nodi di una rete lineare è nota la differenza di potenziale, è possibile inserire tra tali nodi un generatore di f.e.m. che eroghi la stessa differenza di potenziale senza che nulla cambi nella rete.

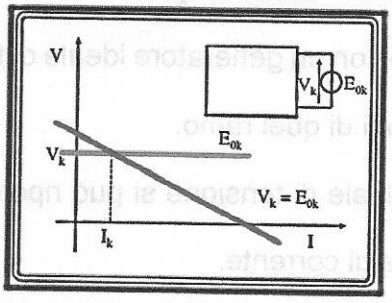
Differenza di potenziale




Si suppone di conoscere tensioni e correnti in una rete. Quindi si conosce la differenza di potenziale che c'è tra due nodi e quindi la tensione su un ramo. Si può sostituire il bipolo che è in quel ramo con un generatore ideale di tensione che eroga la stessa tensione che c'era in quel ramo in condizioni di funzionamento della rete. Nella figura "Differenza di potenziale" nella scatola c'è tutta la rete e e destra è stato isolato il ramo che stiamo considerando, su cui c'è la tensione $V_K$. La caratteristica del resto della rete è la linea rossa e la caratteristica del bipolo la cui tensione è $V_K$ è la linea verde. La corrente $I_K$ si ricava immediatamente dalla intersezione delle due caratteristiche. Quindi se assegno la $V_K$ è nota la $I_K$.

Allo stesso risultato ci arrivo se al posto del bipolo di tensione $V_K$ inserisco un bipolo generatore ideale la cui tensione è $E_{0K}$ sia uguale a $V_K$ che era la tensione che esisteva nella rete in quelle condizioni di funzionamento tra quei due nodi. Questo perché l'intersezione con la caratteristica della restante parte della rete è unica per cui il valore della corrente $I_K$ è assegnato. In pratica, mettendo un generatore ide-

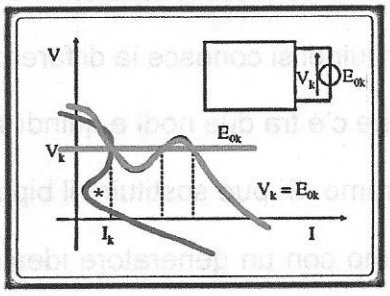
Generatore di f.e.m.



ale di tensione $E_{0K}$ tra i due morsetti la corrente che circola continua ad essere la stessa $I_K$ e quindi la restante parte della rete sollecitata ad avere la tensione $V_K$ e la corrente $I_K$ come prima non si accorge della sostituzione. Questo perché la rete è lineare, cioè i bipoli nella rete sono lineari (o normali).

Il discorso vale anche nel caso di non linearità della rete a patto che le retta delle caratteristiche si intersechino in un unico punto. In questo caso*, come già detto, si dice che la rete è pilotabile in tensione, cioè posso assegnare la tensione (verticalmente) ed univocamente determinare la corrente corrispondente (verde = tensione, rosso = corrente). Tale caratteristica non è pilotabile in corrente perché se assegno una corrente i valori della tensione possono essere diversi; si dice che questa rete, a quei morsetti, è pilotabile in tensione ma non è pilotabile in corrente. Quindi in realtà l'ipotesi che la rete sia lineare è troppo stringente perché anche se non lineare è possibile applicare il teorema di sostituzione senza difficoltà.

Anche non lineare




L'unica condizione che dobbiamo imporre per poter applicare la sostituzione con un generatore ideale di tensione è che la restante parte della rete a quei morsetti abbia una caratteristica magari non lineare, ma pilotabile in tensione.

Nella stessa figura vediamo un'altra caratteristica (arancio) in cui non sarebbe possibile, fissando la tensione $V_K$, determinare un solo valore della corrente $I_K$. Quindi non sarebbe possibile sostituire, in questo caso, il bipolo esistente con un generatore ideale di tensione con la stessa tensione che effettivamente c'era ai capi di quel ramo.

Quanto detto per la sostituzione di un generatore ideale di tensione si può ripetere integralmente per la sostituzione di un generatore ideale di corrente.

Quindi il TEOREMA DI SOSTITUZIONE, in questo caso si enuncia come segue:

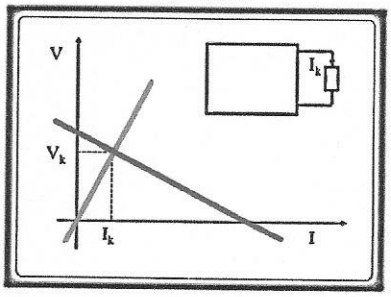
L.11.10

## Teoremi di sostituzione

- Se in un ramo di una rete lineare è nota la corrente che vi circola, è possibile sostituire tale ramo con un generatore di corrente che eroghi la stessa corrente senza che nulla cambi nella rete.

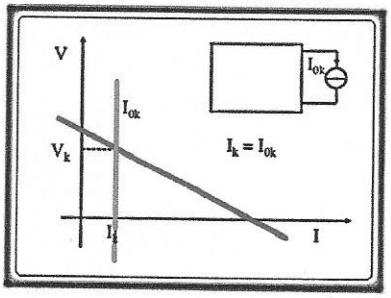
- Se in un ramo di una rete lineare è nota la corrente che vi circola, è possibile sostituire tale ramo con un generatore di corrente che eroghi la stessa corrente senza che nulla cambi nella rete.

Corrente



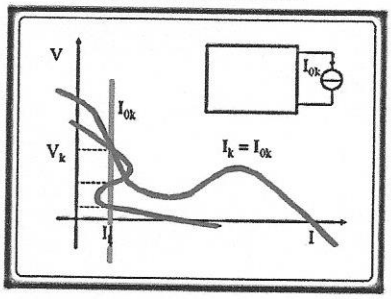

In figura "Corrente" vediamo che nel ramo della rete c'è la corrente $I_K$, si può sostituire il bipolo che c'è nel ramo k-esimo con un generatore di corrente che generi la stessa corrente che c'era nel ramo. $I_{0K} = I_K$.

Generatore di corrente




La tensione $V_K$ è univocamente determinata quindi il resto della rete non se ne accorge. La stessa cosa può accadere anche per una caratteristica non lineare, del tipo pilotabile in corrente (figura "Anche non lineare", caratteristica rossa) mentre non può essere applicato per una caratteristica del tipo pilotabile in tensione (caratteristica arancio) in quanto per un valore di corrente abbiamo più valori della tensione in intersezione.

Anche non lineare



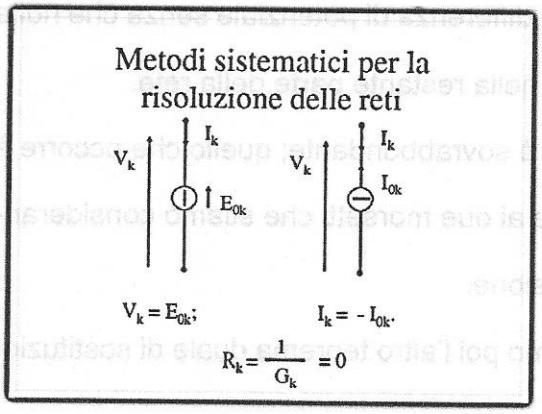

Vedremo, nella prossima lezione, la possibilità di eliminare generatori ideali di tensione e di corrente.

LEZIONE 12

# Equazioni risolventi in termini matriciali

Prof. Luciano De Menna
44'27"

Teoremi di sostituzione
Forma generale della caratteristica di un ramo
Matrice delle conduttanze di lato
Equazioni risolventi in termini matriciali
Matrice delle conduttanze ai nodi
Esercizi

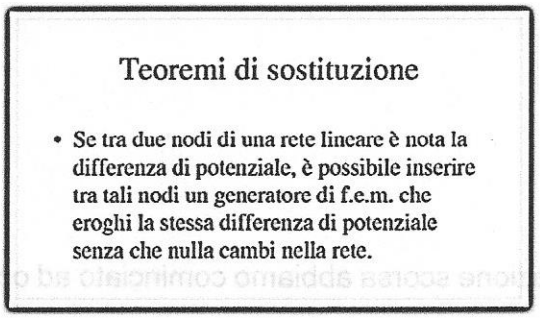



Nella lezione scorsa abbiamo cominciato ad occuparci dei metodi sistematici per la risoluzione delle reti. Cioè abbiamo affrontato il problema di come fornire ad un computer una serie di informazioni che lo mettano in grado di risolvere una rete elettrica. Siamo stati in grado di fornire il grafo della rete, tramite la matrice di incidenza, e scrivere attraverso la matrice di incidenza le equazioni ai nodi e le equazioni alle maglie. Poi c'è stato il problema di come trasferire le informazioni riguardanti le caratteristiche che sono inserite nei singoli rami della rete. Abbiamo incontrato la difficoltà di trasformare un generatore di tensione in un generatore di corrente per renderci indipendenti dal particolare bipolo inserito nella rete e per dare una forma generale alla legge caratteristica del bipolo avevamo la necessità di poter immaginare di trasformare rami con generatori di tensione ideali in rami con generatori di corrente ideali. Cosa che è sempre possibile se il generatore ideale di tensione ha una resistenza in serie o il generatore ideale di corrente ha una conduttanza in parallelo.

Non è possibile nell'unico caso in cui i rami si riducono ad un unico generatore di tensione o ad un unico generatore di corrente perché in tal caso il fatto che $R_k$ vada a 0 o $G_k$ vada all'infinito crea una difficoltà e non è possibile trasformare da una forma all'altra.

Ci siamo dunque posti il problema di eliminare questi casi anomali che "ci danno fastidio"

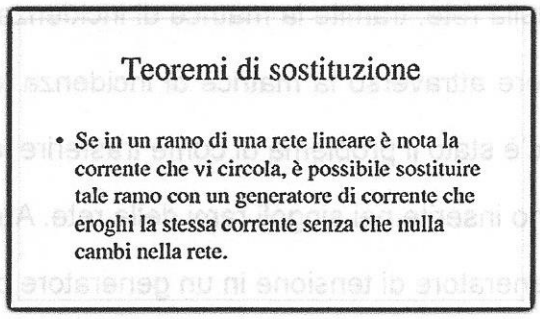
e per farlo abbiamo introdotto dei teoremi di sostituzione in modo tale che essi ci permettessero di raggiungere l'obiettivo cercato. Abbiamo un primo teorema, che potremo dire "TEOREMA DI SOSTITUZIONE DELLE TENSIONI" che enuncia:




• Se tra due nodi di una rete lineare è nota la differenza di potenziale, è possibile inserire tra tali nodi un generatore di f.e.m. che eroghi la stessa differenza di potenziale senza che nulla cambi nella restante parte della rete.

Abbiamo visto che l'ipotesi che la rete sia lineare è sovrabbondante; quello che occorre è che la caratteristica della restante parte della rete ai due morsetti che stiamo considerando sia in realtà una caratteristica pilotabile in tensione.

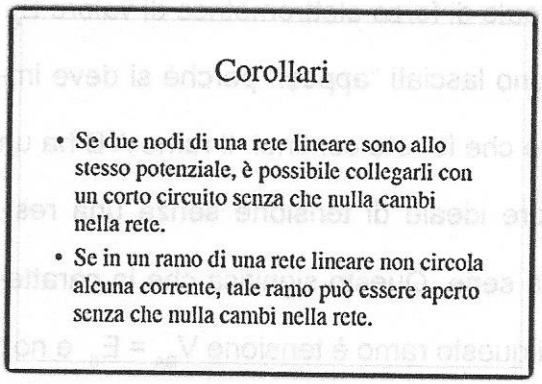
Abbiamo poi l'altro teorema duale di sostituzione che enuncia:




• Se in un ramo di una rete lineare è nota la corrente che vi circola, è possibile sostituire tale ramo con un generatore di corrente che eroghi la stessa corrente senza che nulla cambi nella rete.

Anche in questo caso, l'ipotesi che la rete sia lineare, è, volendo, troppo stringente, in quanto la rete è possibile che sia non lineare purché la caratteristica della rete ai morsetti che stiamo considerando sia di tipo tale da intersecare una retta verticale nel piano I V in un solo punto e cioè in prativa che la caratteristica della rete vista a quei due morsetti sia questa volta pilotabile in corrente. Nei due casi abbiamo effettivamente dimostrato che è possibile sostituire o un generatore di tensione o un generatore di corrente.

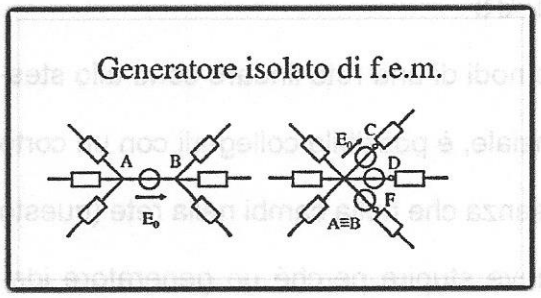
Vediamo come questi teoremi di sostituzione ci consentano di risolvere il problema per cui li avevamo introdotti. Dai teoremi è possibile derivare due corollari di grande interesse.




COROLLARI

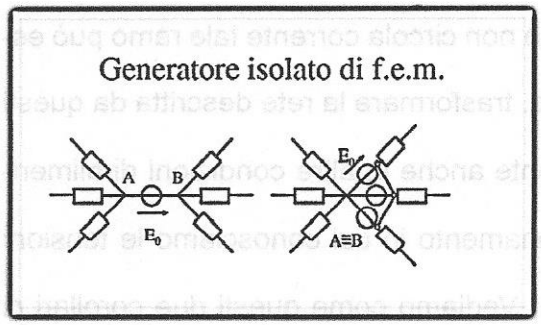
• Se due nodi di una rete lineare sono allo stesso potenziale, è possibile collegarli con un corto circuito senza che nulla cambi nella rete (questo non ci deve stupire perché un generatore ideale che ai suoi morsetti abbia una differenza di potenziale nulla equivale ad un corto circuito. Quindi nel caso in cui tra due punti, tra due nodi di una rete, vi sia una d.d.p. nulla, cioè i potenziali ai nodi sono identici, si può immaginare che tra quei due nodi ci sia inserito un generatore ideale di tensione nulla, ma un tale generatore ideale di tensione nulla è un corto circuito. Quindi se due nodi sono allo stesso potenziale si possono immaginare collegati con un cortocircuito senza che niente cambi nella rete. Questa è una diretta conseguenza del teorema di sostituzione dimostrato la volta scorsa). Per le correnti possiamo affermare quanto segue:

• Se in un ramo di una rete lineare non circola alcuna corrente, tale ramo può essere aperto senza che nulla cambi nella rete (i due nodi possono essere immaginati non collegati). Si ricorda che partiamo sempre dal presupposto che abbiamo una rete con determinati bipoli inseriti nella rete stessa, quindi con determinati generatori e la rete sta funzionando; si suppone di conoscere i valori delle tensioni e delle correnti in ogni ramo. E' in questa situazione che affermiamo che se fra due nodi non esiste una differenza di potenziale si possono immaginare cortocircuitati e se in un ramo non circola corrente tale ramo può essere immaginato aperto. Non si può, naturalmente, trasformare la rete descritta da questi due corollari e aspettarsi che funzioni identicamente anche in altre condizioni di alimentazione. Solo in quel particolare regime di funzionamento in cui conosciamo le tensioni o le correnti, è possibile fare questa sostituzione. Vediamo come questi due corollari ci risolvono il problema, partendo ad esempio dal caso del generatore isolato ideale di f.e.m. E' rappresentato schematicamente come in figura, in cui tra i nodi A e B è inserito un gene-




ratore ideale di forza elettromotrice di valore $E_0$. I rami sono lasciati "appesi" perché si deve immaginare che la rete continui. Il ramo A B ha un generatore ideale di tensione senza una resistenza in serie. Questo significa che la caratteristica di questo ramo è tensione $V_{BA} = E_0$ e non è possibile trasformare questa caratteristica in una caratteristica del tipo corrente e quindi non è possibile trasformare il generatore ideale di tensione in un generatore ideale di corrente e perciò la necessità di poter scrivere in forma generale la caratteristica del ramo e di eliminare queste situazioni. questa situazione è in effetti eliminabile se si immagina una situazione come a destra della figura iniziale.

Consideriamo il nodo B: in esso confluiscono tre rami e in ognuno dei tre rami è stato inserito un generatore ideale di tensione di valore $E_0$, stessa tensione del generatore ideale che precedentemente era inserito tra i nodi A e B. Nella rete modificata i nodi A e B sono scomparsi nel senso che hanno confluito in un unico nodo che è quello centrale. Questa rete appare diversa dalla rete precedente. Tutto il resto della rete è immaginato inalterato. In realtà la rete ottenuta è del tutto equivalente alla precedente. Questo è possibile verificarlo immediatamente con i teoremi visti prima. Si fa una sostituzione. Siccome i tre generatori di tensione sono uguali, hanno la stessa tensione per costruzione, allora i nodi C, D e F sono allo stesso potenziale $E_0$ quindi in pratica i punti C, D e F sono allo




stesso potenziale tra di loro in quanto fra essi ed il nodo AB esiste la stessa differenza di potenziale. Per il corollario precedente si possono collegare i punti C, D, F con dei cortocircuito e nulla cambia nella rete. A questo punto i tre generatori ideali di tensione inseriti nella rete nei tre rami che confluivano nella rete originaria nel punto B si trovano ad essere in parallelo,

che rappresenta un caso di incompatibilità. Ma i generatori hanno la stessa tensione e quindi a questo punto non c'è nessuna contraddizione nel metterli in parallelo in quanto i nodi estremi sono effettivamente allo stesso potenziale fra di loro. Quindi questi tre generatori che attualmente nella rete sono in parallelo dopo aver cortocircuitato i nodi C, D, F , è possibile trasformarli in un unico bipolo. Tre generatori identici in parallelo danno luogo ad un unico generatore che eroga la stessa tensione, la stessa differenza di potenziale tra i morsetti. Quindi in pratica questa rete è equivalente a quella di partenza, cosa che era intenzione dimostrare.

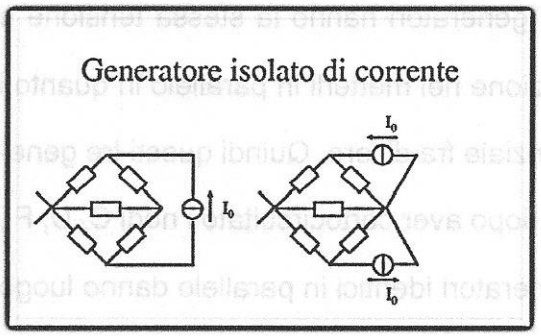
In pratica possiamo dire che se abbiamo una rete con un generatore ideale di tensione possiamo sostituire a questa rete un'altra rete in cui il generatore ideale isolato, senza la resistenza in serie, è scomparso perché al suo posto sono stati inseriti tre generatori che ora hanno delle resistenze in serie perché sono le resistenze che erano inserite nei tre rami che confluivano nel nodo B. Quindi abbiamo eliminato quella anomalia del generatore isolato, senza una resistenza in serie, e ci siamo ricondotti al caso che sappiamo trattare.

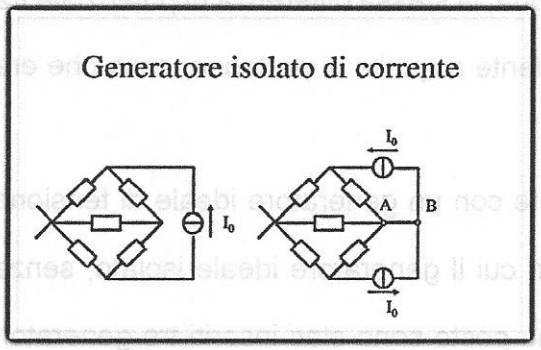
Un ramo può ora essere trasformato nella caratteristica di un generatore di corrente con conduttanza in parallelo perché la resistenza in serie, per ipotesi, non è più nulla.

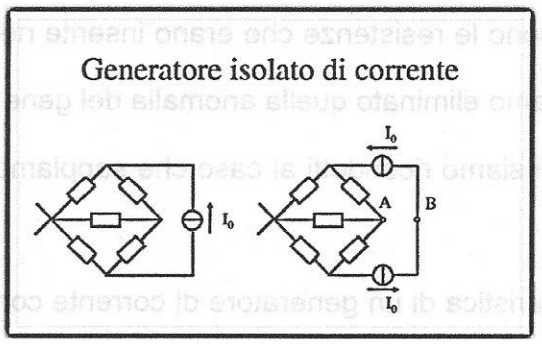
Applicando sistematicamente questa trasformazione, cioè eliminando tutti i generatori ideali di tensione isolati, cioè senza resistenza in serie, si possono eliminare tutti quei casi che davano fastidio nell'ottica di esprimere in forma del tutto generale (nell'ambito dei bipoli fin qui introdotti) la caratteristica di un ramo.

Si può naturalmente fare un discorso del tutto analogo nel caso del generatore isolato di corrente. Il generatore di corrente ha valore $I_0$ fra due nodi e non c'è nessun ramo in parallelo al generatore ideale di corrente. In figura è stata usata proprio la struttura a ponte per evidenziare la mancanza di rami in parallelo al generatore ideale di corrente. Quindi questo ramo non è trasformabile in un ramo con un generatore di tensione.

Una strada del tutto analoga a quella usata per il generatore di tensione ci consente di



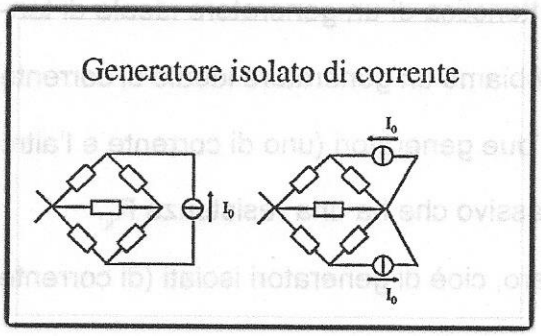




eliminare rami di questo tipo.

Si sostituisce al ramo col generatore ideale di corrente senza nessuna conduttanza in parallelo più rami che collegano i nodi a cui era inizialmente collegato il generatore di corrente, un nodo scelto a caso interno, in modo tale che i nuovi generatori di corrente che vengono inseriti in ogni ramo abbiamo comunque una conduttanza in parallelo. Questa trasformazione sembra aver modificato radicalmente la rete che non è più quella di prima, mentre è facile dimostrare che la rete è del tutto equivalente, cioè non è cambiato niente. Per fare ciò disegniamo il nodo centrale a destra come nella seconda figura, in cui abbiamo separato due parti di questo nodo, collegandole con un cortocircuito. Questo è possibile farlo perché quei punti erano allo stesso potenziale, addirittura facevano parte di un unico nodo. A questo punto è facile capire che la rete non è modificata in quanto nel ramo che è stato inserito tra A e B sappiamo che non può circolare corrente. Cioè nel cortocircuito A B non può circolare corrente. Questo perchè, immaginando per il nodo B di scrivere le equazioni che rappresentano l'equilibrio delle correnti in questo nodo, siccome c'è una corrente $I_0$ che entra nel nodo e una corrente $I_0$ che esce dal nodo, uguali, è chiaro che la corrente nel ramo A B non può che essere nulla altrimenti non sarebbe soddisfatta la prima legge di Kirchhoff nel nodo B.

Quindi nel ramo che collega i punti A e B non circola corrente. Allora possiamo applicare uno dei due corollari precedenti e questo ramo può essere sostituito con un circuito aperto (terza figura della pagina). A questo punto la rete ottenuta, equivalente alla precedente,

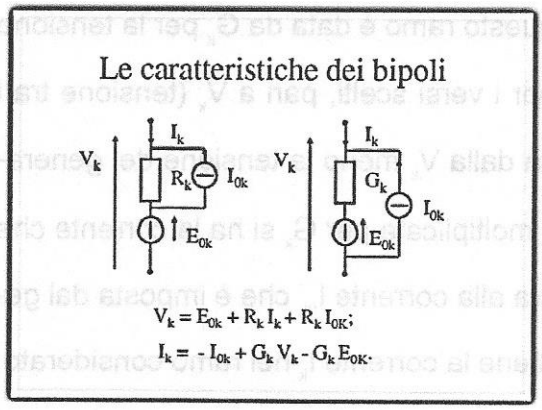
è anche del tutto equivalente a quella iniziale perché abbiamo due generatori di corrente in serie (in generale questo non sarebbe possibile salvo nel caso in cui essi eroghino la stessa corrente) e siccome erogano la stessa corrente sono equivalenti ad un solo generatore ideale di corrente che eroga la stessa corrente.




Abbiamo quindi dimostrato l'equivalenza delle due reti nella figura a lato.

Dove il generatore ideale di corrente isolato senza conduttanza in parallelo non è più presente perché è stato sostituito da tanti generatori ideali di corrente che ora hanno una conduttanza in parallelo. Questo sembra complicare le cose in quanto al posto di un generatore ne abbiamo di più.

Ma è questo lo scotto che dobbiamo pagare per avere una rete in cui non esistono generatori ideali, sia di tensione che di corrente, isolati.




Questo è molto importante perché consente di scrivere in forma generale la caratteristica di un ramo della rete. Addirittura ci consente di scrivere la legge caratteristica che lega tensione e corrente nella rete in una forma tanto generale da comprendere tutti i casi possibili e immaginabili.

Abbiamo in figura una generatore ideale di corrente in parallelo alla resistenza $R_k$ e poi un generatore ideale di tensione (a sinistra). Lo schema a sinistra è del tutto equivalente allo schema a destra, in cui il generatore di corrente è inserito in parallelo alla serie del generatore di corrente e la conduttanza $G_k$. I due schemi hanno la stessa legge caratteristica che è scritta espressa nelle due forme, pilotata in corrente (la prima perché fornisce $V_k$ una volta assegnata la $I_k$ con k il ramo generico in considerazione) e pilotata in tensione (la seconda perché fornisce $I_k$).

La prima relazione ci dice che $V_k$ è alla tensione $E_{0k}$ del generatore, col segno + per il verso arbitrario scelto, più la caduta che c'è sulla resistenza $R_k$; nella resistenza $R_k$ circola la corrente $I_k$ più la corrente $I_{0k}$ e quindi la caduta sulla resistenza $R_k$ è $R_kI_k + R_k+I_{0k}$.

Questa è la legge che descrive la caratteristica di un ramo che può essere ricondotto a tutti i casi possibili. Se $I_{0k}$ è nulla abbiamo la caratteristica di un generatore ideale di tensione con in serie una resistenza. Se è nulla $E_{0k}$ abbiamo un generatore ideale di corrente con una conduttanza pari a $1/R_k$ in parallelo. Se i due generatori (uno di corrente e l'altro di tensione) sono nulli abbiamo un unico bipolo passivo che ha una resistenza $R_k$.

Sono eliminati tutti i casi in cui in pratica la $R_k$ è zero, cioè di generatori isolati (di corrente o di tensione).

Analogamente la caratteristica può essere scritta nella forma pilotata in tensione, cioè assegnata la tensione si dà la corrente.

Nel secondo schema abbiamo che la corrente $I_k = - I_{0k} + G_kV_k - G_k E_{0K}$; La corrente $I_{0k}$ è stata scelta entrante, più la corrente che circola nel ramo che vede in serie $G_k$ con il generatore di tensione $E_{0k}$. La corrente che circola in questo ramo è data da $G_k$ per la tensione che insite su questo ramo. Questa tensione è, per i versi scelti, pari a $V_k$ (tensione tra i nodi) - $E_{0k}$. La tensione che insiste sulla $G_k$ è data dalla $V_k$ meno la tensione del generatore $E_{0k}$. Quindi se questa tensione $V_k - E_{0k}$ viene moltiplicata per $G_k$ si ha la corrente che circola nella conduttanza $G_k$. E quindi sommandola alla corrente $I_{0k}$ che è imposta dal generatore ideale di corrente che è in parallelo si ottiene la corrente $I_k$ nel ramo considerato.

Questa legge caratteristica descrive qualsiasi bipolo di quelli introdotti finora avendo supposto di aver eliminato i generatori ideali.

Vediamo come questo lavoro ci permetta di impostare il problema sotto forma matriciale: dobbiamo costruire una nuova matrice, detta matrice delle conduttanze di lato. Essa è una matrice diagonale. Nel primo termine è inserito il valore della conduttanza del bipolo che è presente nel ramo in questione. Questa conduttanza deve essere presente perché abbiamo eliminato i generatori ideali.

Le caratteristiche dei bipoli

$$G = \begin{Vmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & G_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & G_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}; \quad E_0 = \begin{Vmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ E_{03} \\ \dots \end{Vmatrix}; \quad I_0 = \begin{Vmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \dots \end{Vmatrix}.$$

$$I_k = -I_{0k} + G_k V_k - G_k E_{0K}.$$

$$I = -I_0 + GV - GE_0. \text{ forma matriciale}$$

Poi costruiamo il vettore dei generatori ideali di tensione, in cui in ogni riga c'è il valore dell'eventuale generatore ideale di tensione che è inserito nel ramo in questione. Alcuni di questi valori possono essere nulli perché nel ramo corrispondente non c'è un generatore ideale di tensione, ma ci può essere per esempio un generatore ideale di corrente per cui costruiamo anche il vettore colonna dei generatori ideali di corrente inseriti in ogni ramo. Anche in questo caso alcuni dei termini possono essere nulli, nel caso in cui nel ramo non ci sia un generatore ideale di corrente. Se il ramo è passivo entrambi i valori possono essere nulli, e quindi è presente solo la conduttanza di ramo che è inserita nella matrice delle conduttanze dei lati.

La caratteristica può essere scritta in forma matriciale. Nella forma matriciale G è la matrice delle conduttanze di lato, V è il vettore colonna delle tensioni sui singoli rami della rete. Ognuna delle righe di questo vettore colonna risultante I è in realtà nella forma $I_k = - I_{0k} + G_k V_k - G_k E_{0K}$; non abbiamo fatto altro che rappresentare questa legge caratteristica generale che abbiamo costruito in forma matriciale avendo introdotto la matrice delle conduttanze di lato, il vettore colonna dei generatori ideali di tensione e il vettore colonna dei generatori ideali di corrente.

A questo punto siamo in grado di costruire la forma matriciale delle equazioni risolventi per la rete. Abbiamo visto che per imporre la seconda legge di Kirchhoff alle maglie basta esprimere le tensioni $V_k$ (e quindi il vettore colonna delle tensioni di lato) in funzione dei potenziali ai nodi.

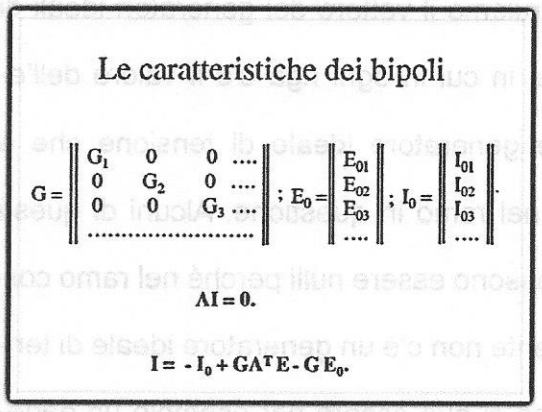
Le caratteristiche dei bipoli

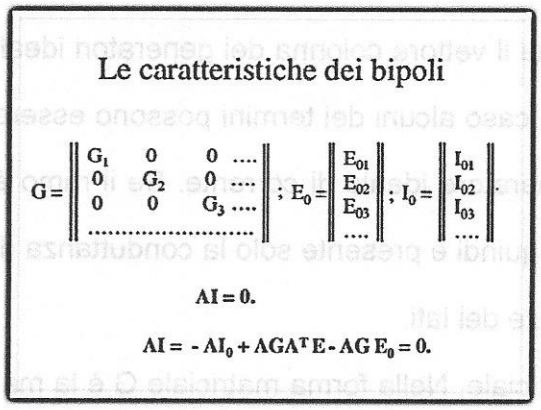
$$G = \begin{Vmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & G_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & G_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}; \quad E_0 = \begin{Vmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ E_{03} \\ \dots \end{Vmatrix}; \quad I_0 = \begin{Vmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \dots \end{Vmatrix}.$$

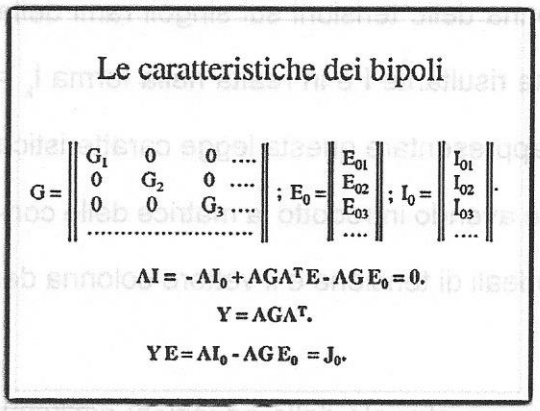
$$A^T E = V.$$

$$I = -I_0 + GA^T E - GE_0.$$

Se utilizziamo la relazione per cui il vettore V è dato da $V = A^T E$, $A^T$ è la trasposta della matrice di incidenza, E è il vettore colonna dei potenzia-




li ed inseriamo questa relazione nella relazione precedente otteniamo:

$I = - I_0 + GA^T E - GE_0$.

A questo punto abbiamo già introdotto la seconda legge di Kirchhoff, dobbiamo ora inserire anche la prima, che in forma matriciale veniva scritta $AI = 0$, dove A è la matrice di incidenza e, moltiplicando per A entrambi i menbri di $I = - I_0 + GA^T E - GE_0$. , si arriva alla relazione:

$AI = - AI_0 + AGA^T E - AGE_0 = 0$.

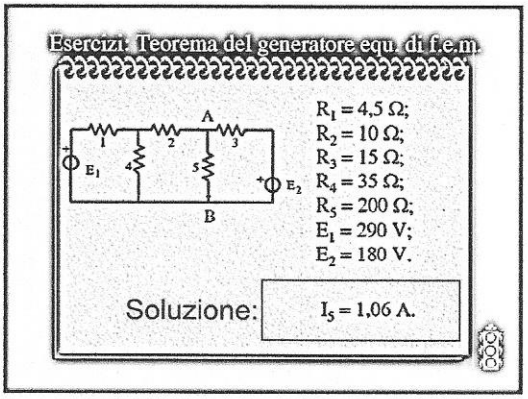
Posto $Y = AGA^T$ e posto $AI_0 - AGE_0 = J_0$, J matrice dei generatori di corrente nei nodi, abbiamo:

$YE = AI_0 - AGE_0 = J_0$.

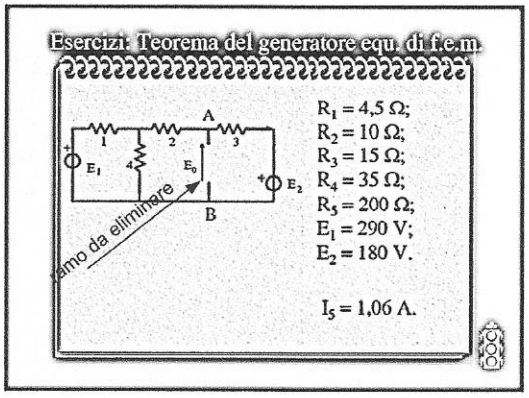
Quest' ultimo risultato, $YE = J_0$ è un sistema di n - 1 equazioni in cui le incognite sono i potenziali nei nodi.

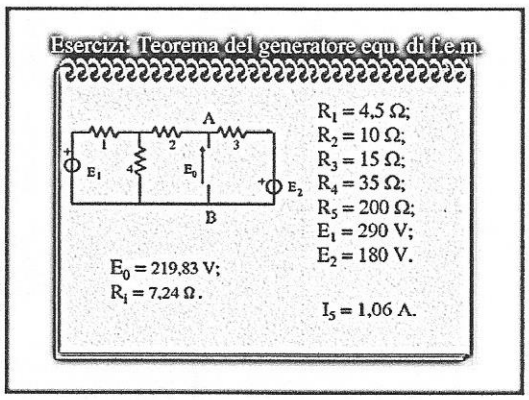
$J_0$ sono da considerarsi noti, contengono i generatori e quindi fanno parte delle caratteristiche dei rami.

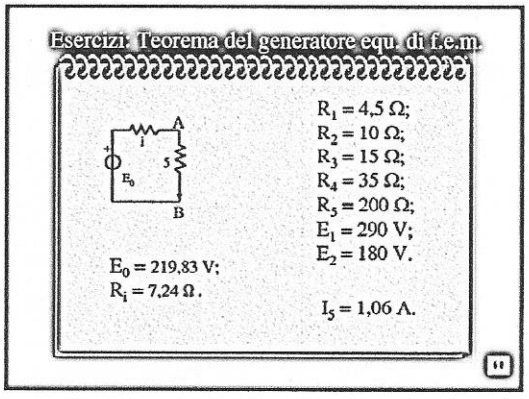
Il sistema di equazioni è quello risolvente che abbiamo chiamato metodo dei potenziali ai nodi. Si tratta, in termini numerici, di invertire la matrice Y per trovare la soluzione.




Vediamo la soluzione di un esercizio dato in precedenza, anche avvalendoci del laboratorio virtuale.



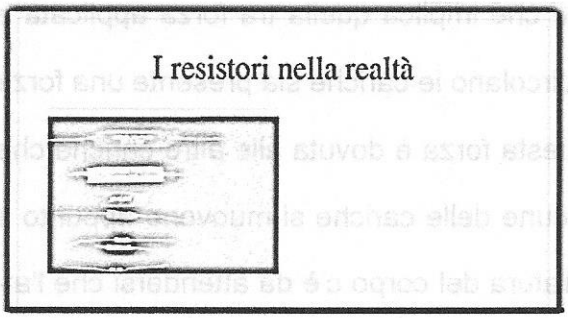



LEZIONE 13

# I bipoli nella realtà

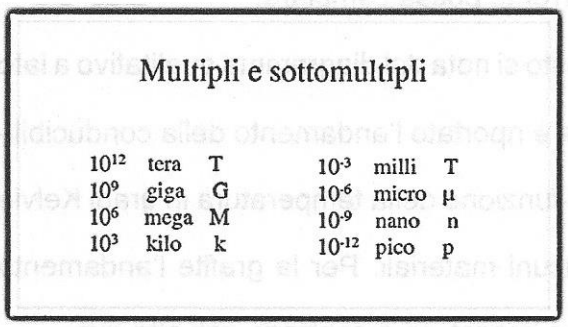
Prof. Luciano De Menna
44'42"

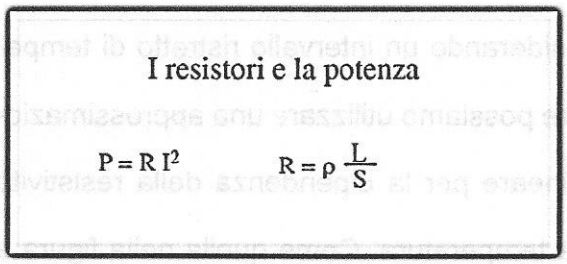
Confronto fra bipoli ideali e componenti reali
Resistori
Generatori
Proporzionamento dei conduttori
Esercizi



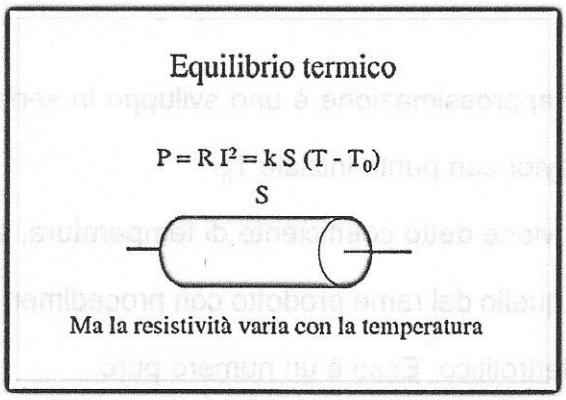

Vedremo un confronto tra i bipoli ideali e i componenti reali.

Nella realtà i resistori sono fatti come in figura, con dimensioni, a parità di resistenza, anche molto diverse. Questo è spiegato dal fatto che un resistore attraversato da corrente porta ad una dissipazione di potenza e l'energia dissipata nell'unità di tempo è espressa dalla relazione $P = R I^2$. E' cioè proporzionale al quadrato della corrente.




La resistenza R è data dalla relazione accanto in figura, dove la lettera ρ rappresenta il materiale. L è la lunghezza ed S è la sezione del canale che trasporta il moto delle cariche.




A causa della potenza dissipata il resistore si riscalda per effetto Joule e parte della energia viene trasmessa all'ambiente secondo un coefficiente indicato dalla lettera k.

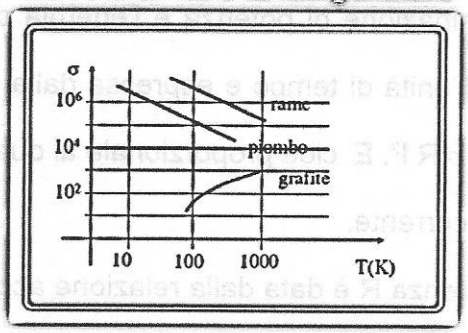
La trasmissione di energia per unità di tempo è proporzionale alla superficie a contatto con l'e-

sterno. T è la temperatura del resistore e $T_0$ è quella dell'ambiente. Quando si raggiunge l'equilibrio tra la potenza fornita e l'energia fornita nell'unità di tempo all'esterno, la temperatura del resistore si stabilizza. Se fosse tutto qui, più è grande la sezione e prima si raggiunge l'equilibrio. Questo non basta perché la resistività del materiale con cui è fatto il resistore varia con la temperatura.

Di questo dovevamo aver sentore dal modello di Drude descritto in precedenza.

La relazione di linearità tra tensione e corrente che implica quella tra forza applicata e velocità media implica che nel materiale in cui circolano le cariche sia presente una forza di attrito che sia proporzionale alla velocità. Questa forza è dovuta alle altre cariche che costituiscono il reticolo del conduttore in cui alcune delle cariche si muovono appunto a formare la corrente. All'aumentare della temperatura del corpo c'è da attendersi che l'attrito che subiscono le cariche portatrici della corrente possa cambiare.

**La resistività e la temperatura**




Questo si nota dal diagramma qualitativo a lato dove è riportato l'andamento della conducibilità in funzione della temperatura in gradi Kelvin di alcuni materiali. Per la grafite l'andamento non è lineare ed è contrario agli altri due.

Considerando un intervallo ristretto di temperature possiamo utilizzare una approssimazione lineare per la dipendenza della resistività dalla temperatura. Come quella nella figura a lato.

**L'approssimazione lineare**

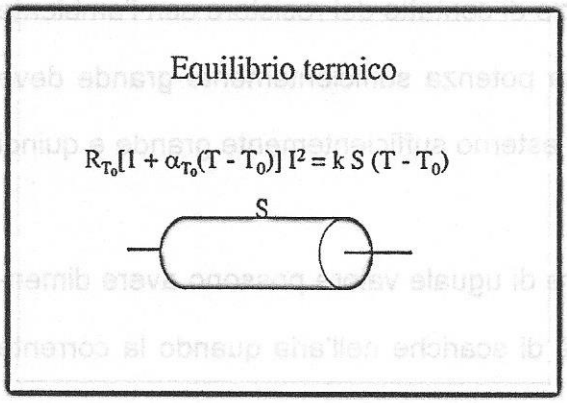
$$\rho = \rho_{T_0}[1 + \alpha_{T_0}(T - T_0)]$$

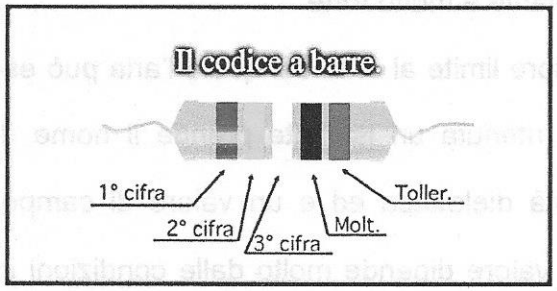
$$\rho(T) = \rho(T_0) + \rho'(T)|_{T_0}(T - T_0) + \ldots$$

Per il rame (elettrolitico) $\alpha_{20°} = 0{,}0038\ (°C)^{-1}$

Tale approssimazione è uno sviluppo in serie di Taylor con punto iniziale $T_0$.

$\alpha\ T_0$ viene detto coefficiente di temperatura, a lato quello del rame prodotto con procedimento elettrolitico. Esso è un numero puro.




Il fatto che la resistività dipenda dalla temperatura complica l'equilibrio termico perché al posto di $RT_0$ dobbiamo mettere nella equazione dell'equilibrio una resistività che varia perlomeno linearmente se il campo di variazione delle temperature è sufficientemente ristretto. Questo vuol dire che al passare della corrente nel resistore il valore della resistenza cambia perché il resistore si riscalda e varia la resistività e quindi anche la sua resistenza.

Se si vuole dare un significato al valore assegnato ad un resistore si deve dire in quale ambiti di temperature il resistore mantiene una data resistenza. Il valore della resistenza su un resistore viene indicato con un codice di colori: il codice a barre, che segue una convenzione, come da figura. Il significato dei colori è ricavabile dai manuali relativi.

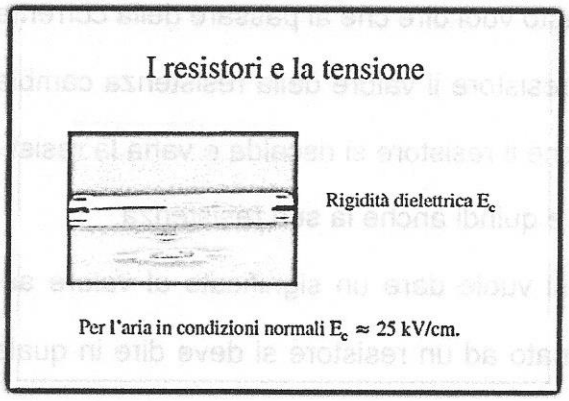
La banda numero cinque è quella della tolleranza, valore percentuale, che rappresenta un margine di errore che dipende dalla modalità di costruzione e da altri fattori. Dipende anche dalla temperatura a cui il resistore è portato a lavorare.

La banda di temperatura del resistore dipende dalla potenza dissipata e quindi dal quadrato della corrente. In pratica, accanto al valore della tolleranza, in resistori sono classificati in dipendenza della potenza che essi riescono a dissipare. Quindi avremo resistori da 1/4 di Watt, che significa che possono dissipare una potenza non superiore ad 1/4 di Watt e questo significa che la corrente che vi circola deve essere tale che $RI^2$ sia inferiore ad 1/4 di Watt. Poi avremo resistori da 1/2W, 1W ecc. La differenza dei resistori di watt diversi sta nella capacità di trasferire all'ambiente esterno il calore, quindi la potenza, che viene dissipata nel resistore stesso per effetto del passaggio della corrente.

Riguardando la relazione dell'equilibrio termico, tanto maggiore è la capacità di trasferire

calore all'esterno quanto maggiore è la superficie di contatto del resistore con l'ambiente esterno. Un resistore in grado di dissipare una potenza sufficientemente grande deve avere una superficie di contatto con l'ambiente esterno sufficientemente grande e quindi anche un volume sufficientemente grande.

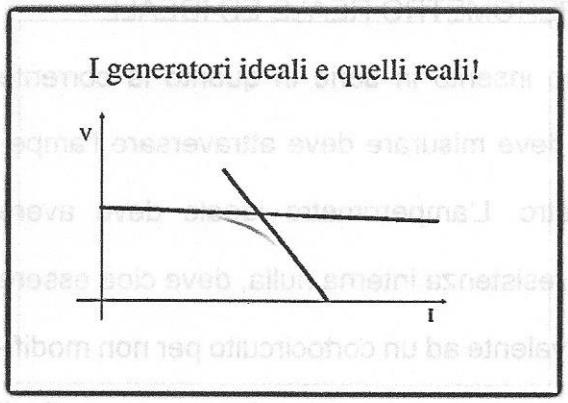
Ma questo non è l'unico motivo perchè resistore di uguale valore possono avere dimensioni differenti. Ha a che fare con la possibilità di scariche nell'aria quando la corrente circolante è molto forte.




Il valore limite al di la del quale l'aria può essere ritenuta un isolante prende il nome di rigidità dielettrica ed è un valore di campo. Tale valore dipende molto dalle condizioni in cui il mezzo si trova ad operare. In condizioni normali la rigidità dielettrica dell'aria, cioè il massimo campo che può essere sopportato dall'aria senza produrre fenomeni di scarica, è di circa 23 kV/cm.

Quindi se devo costruire un resistore che deve lavorare ad una tensione di 25 kV non posso immaginare di costruirlo inferiore ad un centimetro, perché altrimenti tra i due morsetti del resistore vi sarebbe nell'aria una distanza inferiore ad un centimetro, e quindi un campo elettrico maggiore di 25 kV al centimetro, una volta che il resistore è messo in funzione, si avrebbe una scarica tra i due elettrodi del resistore. Per questo motivo resistori per alte tensioni (indipendentemente dalla resistenza e dalla potenza che devono dissipare) possono avere dimensioni molto grandi con una grande distanza tra i due morsetti.

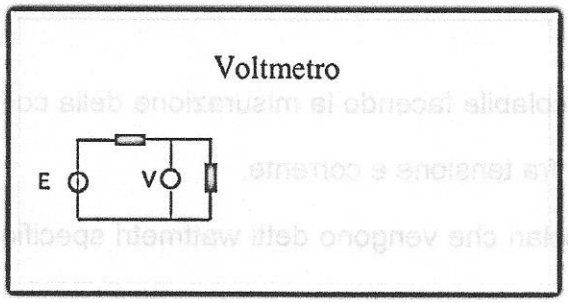
La tolleranza dipende anche dalla modalità di costruzione del resistore e naturalmente se si vuole un resistore con bassa tolleranza il suo costo sarà maggiore.




Si noti a lato il diagramma sui generatori ideali e quelli reali.

I generatori reali hanno una curva della tensione in dipendenza della corrente che erogano in cui in un primo tratto può essere approssimabile ad un generatore ideale di tensione, la tensione si mantiene quasi costante, decresce linearmente, poi comincia a decrescere molto rapidamente e tende ad andare a zero la tensione quando la corrente assume un certo valore che prende il nome di corrente di cortocircuito perché se la tensione ai morsetti è nulla vuol dire che tali morsetti sono chiusi in corto circuito tra di loro. In realtà questa zona di funzionamento di gran parte dei generatori non è praticabile perché un generatore di tensione, anche se reale, posto in cortocircuito rischierebbe naturalmente di distruggersi.

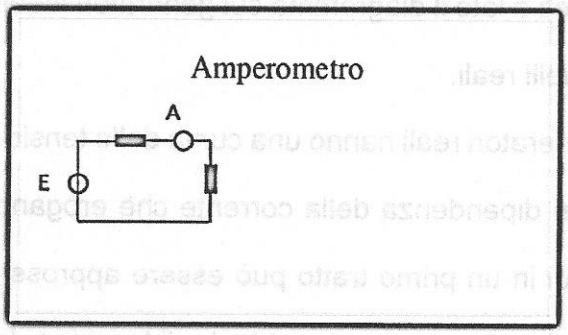
Ora accenniamo alla differenza al voltmetro reale e voltmetro ideale ed in seguito all'amperometro.




VOLTMETRO REALE ED IDEALE

Abbiamo detto che il voltmetro deve essere uno strumento con una resistenza molto elevata altrimenti rischia di lasciare invariato il circuito nel quale viene inserito. Esso deve essere inserito in parallelo tra i morsetti dei quali si vuole misurare la d.d.p. Se il voltmetro non ha una resistenza infinita ai suoi morsetti allora modificherà il circuito nel momento in cui viene inserito. La tensione ai morsetti del voltmetro è data dalla tensione del generatore meno la caduta sul resistore interno del generatore. Se la resistenza del voltmetro non è infinita allora essa sarà minore, quindi un voltmetro non ideale introduce un errore di questo tipo, che è inevitabile. I voltmetri con resistenza molto elevata riducono l'errore a valori trascurabili e quindi accettabili.

Una cosa analoga avviene per l'amperometro, che viene inserito in serie.



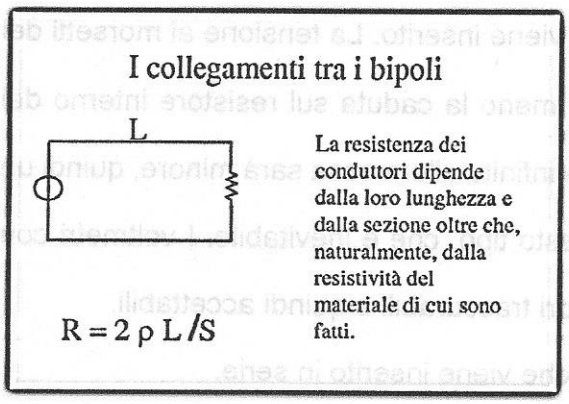

AMPEROMETRO REALE ED IDEALE

Viene inserito in serie in quanto la corrente che deve misurare deve attraversare l'amperometro. L'amperometro ideale deve avere una resistenza interna nulla, deve cioè essere equivalente ad un cortocircuito per non modificare il circuito in cui viene inserito. Se l'amperometro presenta una resistenza non nulla, il carico a cui il generatore reale idealizzato costituito dal generatore ideale più la resistenza interna in serie è collegato (il carico), è diverso perché la resistenza equivalente sarà la somma del carico effettivo con la resistenza interna dell'amperometro. Anche in questo caso bisogna tener conto di questa differenza introdotta dall'inserimento di un amperometro. Gli amperometri per correnti grosse sono facilmente riconoscibili dalla grandezza dei morsetti perché devono essere attraversati da una corrente sufficientemente elevata e produrre una caduta di tensione e avere una resistenza equivalente complessiva, nonostante tutto, molto bassa.

Nel caso di corrente continua, la potenza è calcolabile facendo la misurazione della corrente e della tensione, e poi facendo il prodotto fra tensione e corrente.

In regimi diversi esistono degli strumenti particolari che vengono detti wattmetri specifici per la misura della potenza.

Un altro elemento che abbiamo sempre considerato ideale sono i collegamenti tra i vari bipoli.




I COLLEGAMENTI TRA BIPOLI

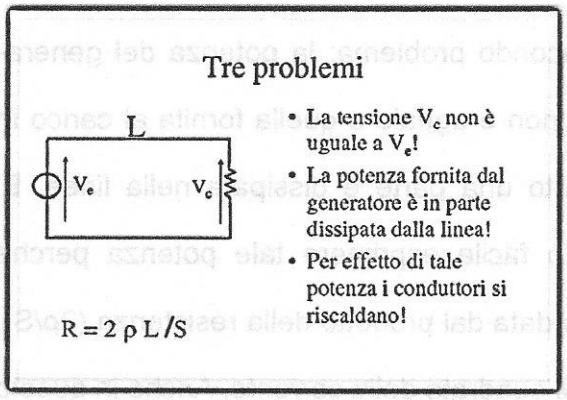
I collegamenti li abbiamo considerato finora di resistenza nulla, equivalenti a dei cortocircuiti. In figura un generatore abbastanza distante dal carico, indicato con L: per quanto possa fare grande la sezione del conduttore e utiliz-

zare un materiale con una bassa resistività, il tratto di conduttore tra il generatore e il resistore sarà necessariamente sede di una caduta di tensione perché presenterà una resistenza.

In questo caso R è calcolato come da figura a lato: $R = 2 \rho L / S$; c'è 2 perché i tratti del conduttore sono 2, uno all'andata e uno al ritorno.

La resistività ipotizzata del materiale è ρ, L è la lunghezza ed S è la sezione.

Per avere dei collegamenti tra i bipoli che non abbiamo nessuna influenza sul comportamento del circuito si devono usare sezioni sufficientemente grandi dato che le lunghezza sono fissate dalle distanze alle quali si trovano i bipoli e la resistività è fissata dal materiale usato, di norma rame, che rappresenta il miglior compromesso tra bassa resistività e costo. La presenza di una resistenza offerta dai conduttori di collegamento tra i bipoli comporta una necessità di progettare i conduttori di collegamento. Cioè non è un fatto automatico: dobbiamo essere sicuri che i conduttori utilizzati per collegare i bipoli nella realtà introducano un disturbo rispetto alle condizioni ideali quanto minore possibile.




Da questa considerazione abbiamo essenzialmente tre problemi.

I TRE PROBLEMI

• La tensione $V_c$ non è uguale a $V_e$!

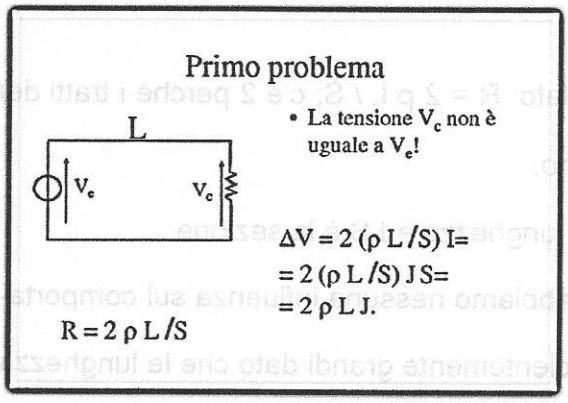
Ovvero la tensione $V_e$ del generatore non è uguale alla tensione che è sul carico, perché c'è la caduta dovuta alla resistenza dei conduttori.

• La potenza fornita dal generatore è in parte dissipata dalla linea di collegamento fra il generatore e il carico in base al fatto che la linea presenta una certa resistenza quindi $RI^2$ è la potenza che viene dissipata in essa!

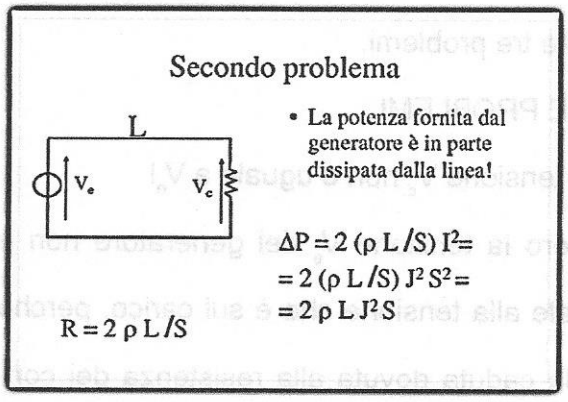
• Per effetto di tale potenza i conduttori si riscaldano!

Sono tre problemi distinti, collegati tra di loro, dei quali si deve tener conto quando si de-

cide con quali conduttori collegare due bipoli, per esempio nel caso che stiamo trattando, un generatore con un carico.

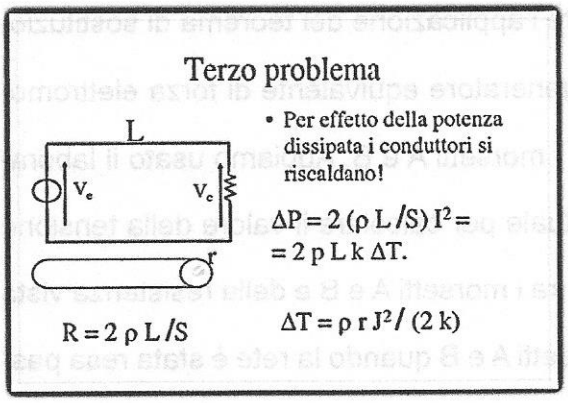



Il primo problema: la tensione del generatore e la tensione sul carico. Dalla relazione a lato si vede che la caduta di tensione è dipendente solo da J, fissati ρ ed L, la distanza fra i due bipoli. Fare in modo che la caduta di tensione sia al di sotto di certi limiti accettabili, altrimenti utilizzo un generatore con una certa tensione, ma sul carico ho una tensione molto inferiore, vuol dire controllare la densità di corrente che circola nei conduttori. Questa è la norma generalmente più usata, quella che è sufficiente generalmente utilizzare per "proporzionare" i conduttori per una determinata applicazione. Cioè mantenere il valore di J, la densità di corrente, al di sotto di certi limiti. Per i conduttori usati usualmente si parla di densità di correnti accettabili di qualche Ampere al millimetro quadro.




Il secondo problema: la potenza del generatore non è uguale a quella fornita al carico in quanto una parte è dissipata nella linea. E' molto facile esprimere tale potenza perché sarà data dal prodotto della resistenza ($2\rho/S$), per il quadrato della corrente. Anche in questo caso, esprimendo la corrente come prodotto della densità di corrente per la sezione otteniamo il risultato $2\rho LJ^2S$ quindi non è qui più vero che la sola densità di corrente è il parametro di controllo necessario in quanto compare ancora S nella formula finale. In realtà, tornando alla prima relazione, una volta assegnato il valore della corrente che deve attraversare i conduttori, è evidente che voler limitare la potenza dissipata condiziona essenzialmente, dato che gli altri parametri sono

tutti fissati, la sezione del conduttore che deve essere utilizzato. Maggiore è la sezione, minore è la potenza dissipata nel conduttore e quindi quella sottratta al carico.

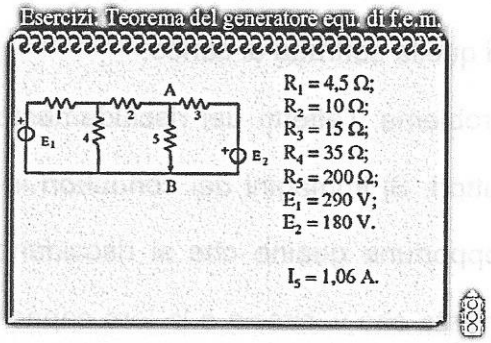



Il terzo problema: l'effetto del riscaldamento dei conduttori. Si immagini dei conduttori inseriti in opportune guaine che si riscaldano per la corrente che vi circola e la loro capacità di trasmettere calore all'esterno può essere limitata dalle condizioni operative e quindi è necessario assicurare che i conduttori non raggiungano temperature troppo elevate altrimenti ci potrebbe essere un deterioramento degli isolanti o dello stesso conduttore che può localmente fondersi. In questo caso possiamo calcolare la temperatura che i conduttori raggiungono che dipenderà dal coefficiente di trasmissione del calore verso l'esterno (k), dalla superficie esterna presentata dal conduttore (2pL, p è il perimetro del conduttore), Da questa relazione, fissata la corrente, si può calcolare il valore del salto di temperatura che è la differenza tra la temperatura del conduttore e temperatura dell'ambiente esterno. Anche in questo caso possiamo inserire il valore di I come J moltiplicato S e otteniamo la relazione finale $\Delta T = \rho r J^2 / (2 k)$, in cui anche in questo caso non è J l'unico parametro, c'è anche r, il raggio del conduttore. Comunque, spesso, si fa riferimento soltanto a J.

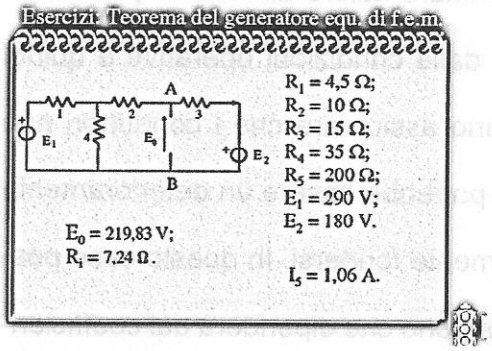
Tenendo conto di questi tre problemi, si proporziona, a seconda delle necessità, il tipo di conduttore e la sezione del conduttore per effettuare un adeguato collegamento tra un bipolo ed un altro, tipicamente tra un generatore ed un carico.

In genere su tutti i manuali esistono delle tabelle da cui si ricavano conduttori e dimensionamenti in base alle diverse applicazioni.

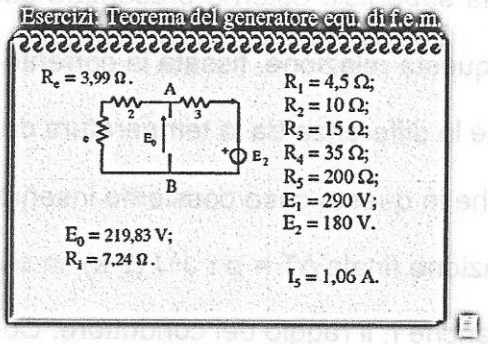
## ESERCIZI



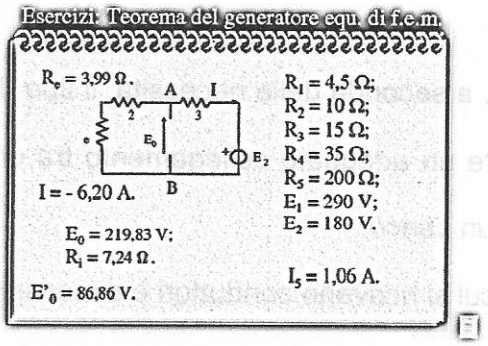

soluzione all'esercizio di risoluzione di una rete mediante l'applicazione del teorema di sostituzione del generatore equivalente di forza elettromotrice tra i morsetti A e B. Abbiamo usato il laboratorio virtuale per calcolare il valore della tensione a vuoto tra i morsetti A e B e della resistenza vista dai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva. Il risultato è stato che la corrente nel ramo A B è $I_5 = 1.06$A.



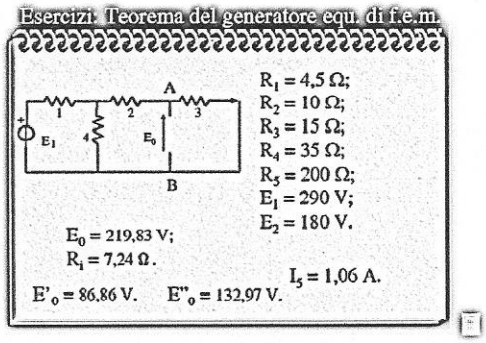

Si è calcolato il valore della tensione a vuoto E0 tra i morsetti A e B e della resistenza interna i cui valori sono $E_0 = 219,83$ V; $R_i = 7,24\ \Omega$.

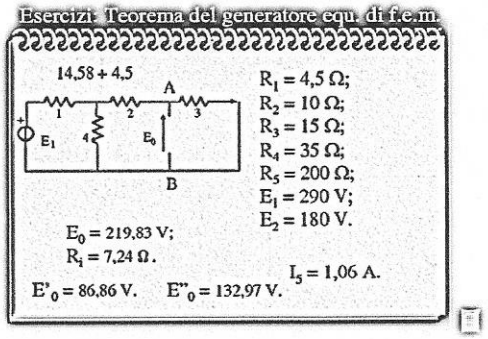


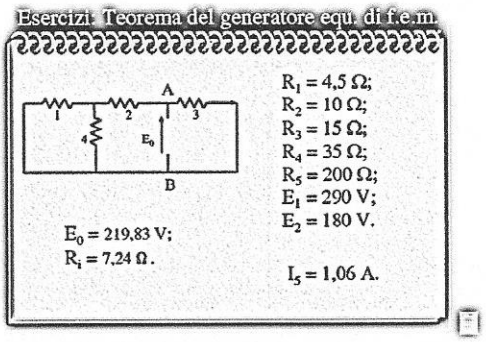

Il calcolo di questi due valori è possibile in quanto nella rete ci sono due generatori, e si applica la sovrapposizione degli effetti, immaginando che il generatore $E_1$ venga prima cortocircuitato e quindi agisca solo il generatore $E_2$. Per calcolare la corrente erogata da $E_2$ devo calcolare il parallelo fra il resistore 1 e 4, con in serie il resistore 2, con in serie il resistore 3, ed ho: la resistenza del parallelo $R_e = 3.99$A, la resistenza totale vista dal generatore $E_2$ è x e conoscendo questa è possibile calcolare la corrente e quindi moltiplicandola per la serie $R_2$ e $R_e$ ottenere la tensione tra i morsetti A e B prodotta dal solo generatore $E_2$.




I conti portano ad un valore di $E'_0 = 86,86$ V.




Si può fare una cosa analoga per il generatore $E_1$, supposto il generatore $E_2$ circuitato. Abbiamo la serie di 3 e 2 con in parallelo 4 e poi in serie 1; calcolata la resistenza totale si calcola la corrente totale. Poi questa corrente la possiamo ripartire tra i rami in parallelo 4 e la serie di 2 e 3 ed ottenere la corrente che circola nella serie 2 e 3 e quindi moltiplicandola per il valore della resistenza $R_3$ otteniamo la tensione $E"_0 = 132,97$ V.

Quindi nel circuito finale abbiamo un generatore di tensione $E_0 = 219,83$ V e una resistenza interna $R_i = 7,24\ \Omega$.

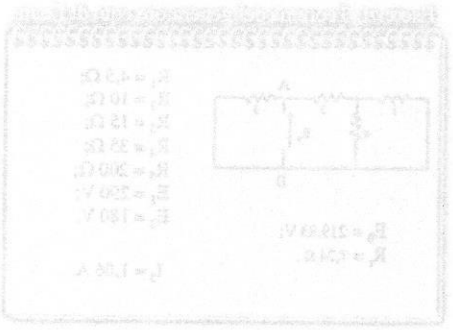
La volta prossima vedremo come si può applicare il teorema del generatore equivalente in una maniera forse più intelligente scegliendo diversamente i morsetti ai quali calcolare la rete equivalente.

Riepilogo della Lezione 13

- Confronto tra bipoli ideali e componenti reali;
- Resistori;
- Generatori;
- Proporzionamento dei conduttori;
- Esercizi.







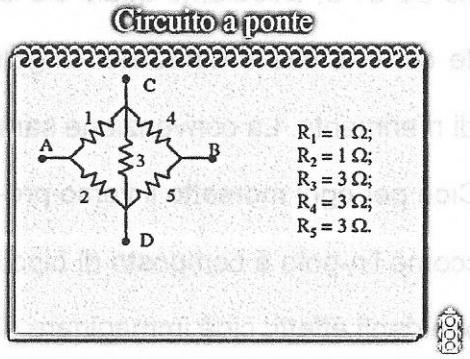
LEZIONE 14

# N-poli

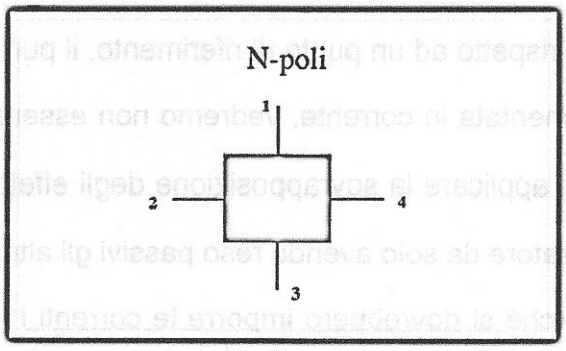
Prof. Luciano De Menna
44'04"

Definizione di N-polo passivo
Matrice delle conduttanze
Proprietà della matrice G
Esercizi

In questa lezione affronteremo un problema lasciato in sospeso. Abbiamo visto che una qualsiasi rete passiva vista da una coppia di morsetti è equivalente ad un unico bipolo resistore ed abbiamo visto come farlo mediante opportuni accoppiamenti serie/parallelo. Due resistori sono in serie quando sono attraversati dalla stessa corrente e sono in parallelo quando ai loro morsetti è applicata la stessa tensione. Però in alcuni casi si trova un ostacolo con il procedimento serie/parallelo visto. Quando cioè non si poteva applicare il procedimento in serie o in parallelo. L'esempio su cui è stata mostrata la problematica è quello del cosiddetto circuito a ponte.



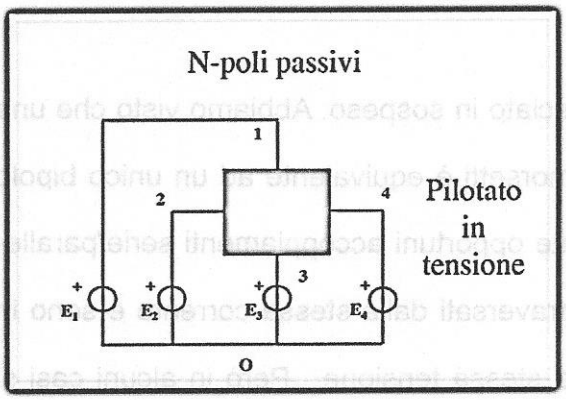

Vedendo la rete dai morsetti C e D abbiamo che 4 e 5 sono in serie, così come 1 e 2; ed i due resistori equivalenti che si ottengono sono in parallelo con il resistore 3. Ma se vediamo la rete dai morsetti A e B siamo in difficoltà perché nessuno dei resistori è in serie o in parallelo. Naturalmente dai morsetti A e B deve essere vista una resistenza, cosa che si può fare in laboratorio virtuale, ed il valore è 2 Ohm. Fra C e D c'è una resistenza di 6 Ohm.



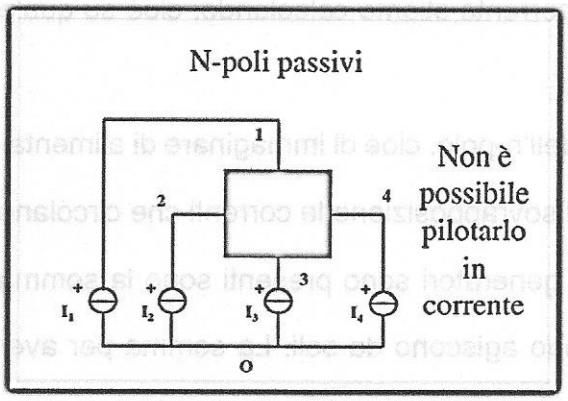

Per risolvere questo problema dobbiamo estendere il concetto di bipolo, che è un dispositivo che comunica all'esterno con i due

suoi morsetti.

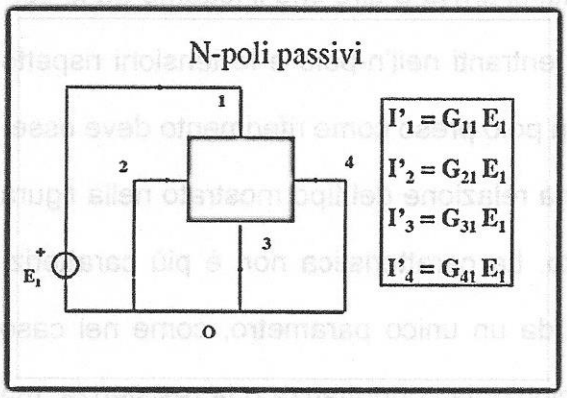
L'estensione è quello di sistemi che comunicano all'esterno con più morsetti e, in generale, possiamo dire con n morsetti. Come il caso di un quadri-polo in figura, che comunica con l'esterno con 4 morsetti. In generale i dispositivi potranno avere n poli; quindi ci chiediamo come possiamo trattare questi n-poli che supponiamo essere passivi cioè composti per ora soltanto di resistori, eventualmente cortocircuiti e bipoli a vuoto.




Innanzitutto occorre alimentare l'n-polo ed un modo è inserire agli n morsetti un numero n di generatori tali da portare ognuno dei morsetti dell'n-polo ad un determinato potenziale rispetto ad un potenziale di riferimento che è indicato con il potenziale del punto O. Ogni polo dell'n-polo è collegato a un generatore che lo pone al potenziale ad es. $E_1$ per il polo 1 rispetto ad O. Ci chiediamo quale sia la caratteristica dell'n-polo. Quale è cioè il legame tra le correnti che entrano nei singoli morsetti e le tensioni applicate tra i morsetti e il punto di riferimento. La convenzione sarà sempre quella dell'utilizzatore a ognuno dei morsetti. Cioè per ogni morsetto il verso prescelto per la corrente è quello entrante dell'n-polo. Siccome l'n-polo è composto di bipoli lineari, possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, cioè immaginare di far agire un generatore alla volta e supposti tutti gli altri resi passivi e quindi, trattandosi di generatori di tensione, cortocircuitati, sostituiti con un cortocircuito. In questo caso diremo che l'n-polo è stato pilotato in tensione perché ai morsetti dell'n-polo sono state poste le tensioni cioè i potenziali di ognuno dei morsetti rispetto ad un punto di riferimento, il punto O. L'altra alimentazione possibile, quella alimentata in corrente, vedremo non essere possibile per una ragione molto banale. Quindi applicare la sovrapposizione degli effetti consiste nell'immaginare che agisca ogni generatore da solo avendo reso passivi gli altri. L'alimentazione in corrente non è possibile perché si dovrebbero imporre le correnti I1,




$I_2$, $I_3$ e $I_4$ entranti nei 4 morsetti (n morsetti in generale). In realtà non posso dare ad arbitrio le correnti a questi 4 (n) generatori perché nulla mi assicura che al nodo O sia verificata la prima legge di Ohm, cioè che la somma delle correnti sia uguale a zero. Quindi non potendo dare ad arbitrio le 4 (n) correnti non si può alimentare l'n-polo in corrente e poi determinare la legge che lega le correnti alle tensioni ai morsetti dell'n-polo. Devo necessariamente pilotarlo in tensione.

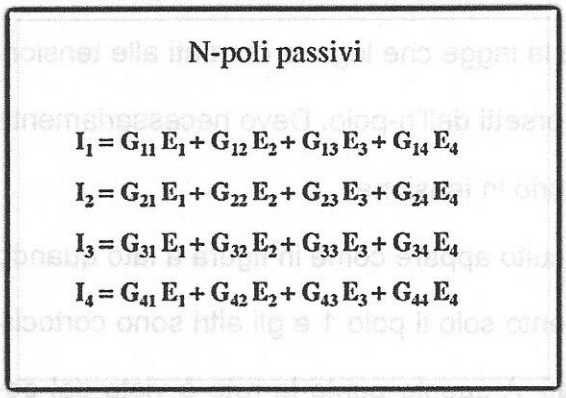



Il circuito appare come in figura a lato quando alimento solo il polo 1 e gli altri sono cortocircuitati. A questo punto la rete è vista dal generatore $E_1$ come un bipolo perché i poli 2, 3 e 4 sono stati collegati fra di loro in cortocircuito e tutti e 3 collegati a uno dei morsetti del generatore mentre l'altro morsetto del generatore è collegato al polo 1. Quindi in questo caso il generatore $E_1$ produrrà delle correnti sia nel morsetto 1 che nel morsetto 2, 3 e 4. Evidentemente se l'n-polo è lineare la relazione tra le correnti entranti nei singoli morsetti dell'n-polo e la tensione del generatore dovrà essere una relazione di proporzionalità. Quindi dovremo avere la corrente detta $I'_1$ perché non è la corrente $I_1$ che entra nel morsetto 1 dell'n-polo quando sono presenti tutti i generatori che alimentano l'n-polo ma è quella relativa soltanto alla presenza del generatore $E_1$. Analogamente abbiamo per la corrente nel morsetto $I'_2$ e gli altri la proporzionalità con l'unico generatore presente $E_1$.

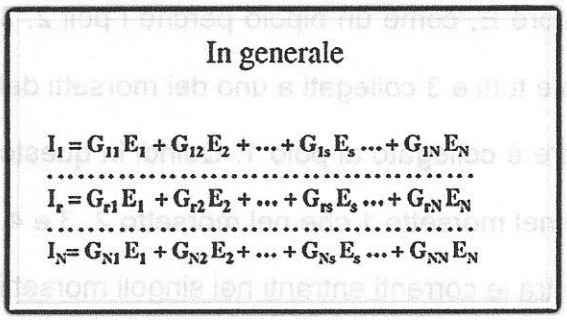
I coefficienti di proporzionalità hanno le dimensioni delle conduttanze, visto che legano tensioni a correnti e quindi è giusto indicarli con i simboli G ed è necessario indicarli con due pedici in quanto si deve tener conto chi è il generatore che sta alimentando la rete (in

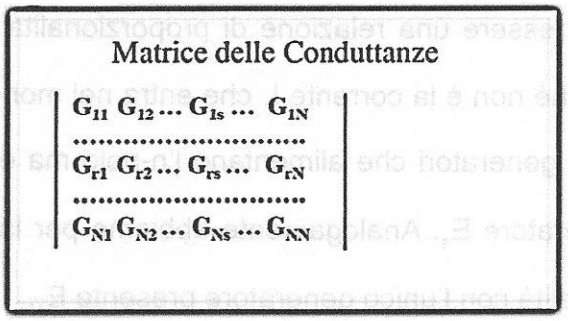
questo caso 1) come secondo pedice e quale corrente stiamo calcolando, cioè su quale nodo.

Questo discorso può essere fatto per tutti i poli dell'n-polo, cioè di immaginare di alimentare solo con $E_2$, con $E_3$, $E_4$ ecc. Per il principio di sovrapposizione le correnti che circolano nei morsetti dell'n-polo quando tutti e quattro i generatori sono presenti sono la somma delle correnti dovute ai singoli generatori quando agiscono da soli. La somma per aver mantenuto la stessa convenzione della corrente entrante in tutti i morsetti del n-polo.




Quindi si arriva a dire che il legame tra le correnti entranti nell'n-polo e le tensioni rispetto ad un polo preso come riferimento deve essere una relazione del tipo mostrato nella figura a lato. La caratteristica non è più caratterizzata da un unico parametro, come nel caso del bipolo, la conduttanza o la resistenza, ma è caratterizzata, in generale, da una n-upla di numeri, n pari al numero di morsetti. Nel caso del quadri-polo abbiamo 16 coefficienti di proporzionalità, indicati dai parametri $G_{11}$, $G_{12}$ ecc. Quindi la caratterizzazione dell'n-polo non può più avvenire attraverso un unico numero, ma in generale, per n poli, da una matrice, la matrice delle conduttanze che avrà $n^2$ elementi.




I coefficienti di proporzionalità possono essere distinti in due tipi, fra le correnti e le tensioni nell'n-polo. Gli elementi che potremmo dire della diagonale della matrice vengono chiamati conduttanze proprie, questo perchè il termine $G_{rr}$ si ottiene come rapporto tra $I_r$ e $E_r$ quando è stato posto uguale a zero tutte le

**Definizioni**

$$I_1 = G_{11}E_1 + G_{12}E_2 + \dots + G_{1s}E_s \dots + G_{1N}E_N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$I_r = G_{r1}E_1 + G_{r2}E_2 + \dots + G_{rs}E_s \dots + G_{rN}E_N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$I_N = G_{N1}E_1 + G_{N2}E_2 + \dots + G_{Ns}E_s \dots + G_{NN}E_N$$

***Conduttanze Proprie*** $\quad G_{rr} = \left.\frac{I_r}{E_r}\right|_{\substack{E_r=0 \\ l \neq r}}$

altre tensioni. Questo perché se sono uguali a zero tutte le altre tensioni rimane solo la colonna relativa a $E_r$. Quindi le conduttanze proprie sono gli elementi della diagonale della matrice delle conduttanze.

**Definizioni**

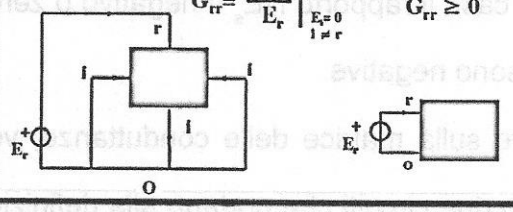
$$I_1 = G_{11}E_1 + G_{12}E_2 + \dots + G_{1s}E_s \dots + G_{1N}E_N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$I_r = G_{r1}E_1 + G_{r2}E_2 + \dots + G_{rs}E_s \dots + G_{rN}E_N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$I_N = G_{N1}E_1 + G_{N2}E_2 + \dots + G_{Ns}E_s \dots + G_{NN}E_N$$

***Conduttanze Inproprie o mutue*** $\quad G_{rs} = \left.\frac{I_r}{E_s}\right|_{\substack{E_r=0 \\ l \neq s}}$

Chiameremo conduttanze improprie o mutue gli elementi fuori diagonale, con termine generico $G_{rs}$ che si ottiene quando annulliamo tutti i potenziali degli altri nodi dell'n-polo, quindi $E_i = 0$ per $i \neq s$ e lasciano in vita soltanto il generatore $E_s$ quindi $G_{rs} = I_r / I_s$. Sono dette conduttanze improprie perché non rappresentano il rapporto tra corrente e tensione ad una stessa coppia di morsetti in quanto è una corrente che entra nel morsetto r e la differenza di potenziale tra il morsetto s e il morsetto O.

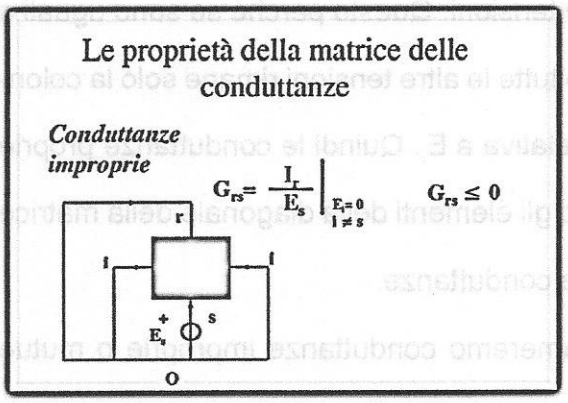
**Le proprietà della matrice delle conduttanze**

***Conduttanze proprie*** $\quad G_{rr} = \left.\frac{I_r}{E_r}\right|_{\substack{E_r=0 \\ l \neq r}} \qquad G_{rr} \geq 0$



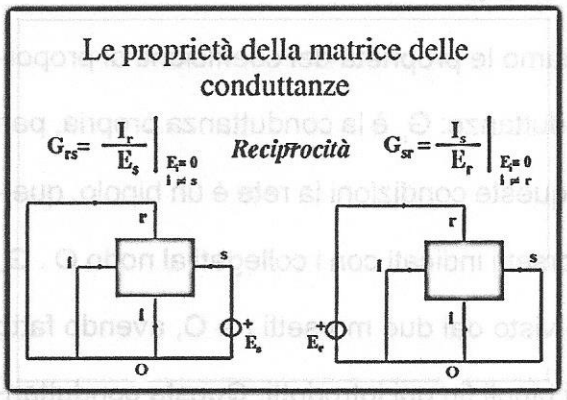

Hanno le dimensioni di conduttanze e perciò sono chiamate conduttanze improprie o mutue, mutue perché mettono in relazione morsetti diversi.

Vediamo le proprietà dei coefficienti di proporzionalità o degli elementi della matrice delle conduttanze: $G_{rr}$ è la conduttanza propria, pari a $I^r/E_r$ con tutti gli altri generatori resi passivi. In queste condizioni la rete è un bipolo, quello che si ottiene tra il morsetto r e tutti gli altri morsetti indicati con i collegati al nodo O . $G_{rr}$ è proprio la conduttanza del bipolo equivalente visto dai due morsetti r e O, avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore e nell'ipotesi dei bipoli fin qui introdotti. Questa conduttanza non può che essere maggiore o uguale a zero avendo appunto fatto la convenzione




dell'utilizzatore.

Per le conduttanze improprie (figura a lato) la valutazione è come in figura a lato. Poiché siamo in tensioni e correnti costanti vale un teorema di non amplificazione delle tensioni. Questo significa che in una rete alimentata da un unico generatore i morsetti del generatore sono uno a potenziale maggiore e l'altro a potenziale minore rispetto a tutti i morsetti presenti nella rete. Se supponiamo $E_s$ positiva, avendo assunto questo verso per il generatore, vorrà dire che il morsetto superiore del generatore è quello a potenziale più grande rispetto a tutti i nodi della rete ed il morsetto inferiore, quello chiamato per O, è il morsetto a potenziale più piccolo rispetto a tutti i nodi della rete. Questo significa che la corrente $I_r$ va dal nodo a potenziale più basso ad un nodo interno dell'n-polo che dovrà avere per definizione un potenziale maggiore del potenziale di O. Questo ci porta a concludere che la corrente $I_r$ in questo verso come da figura deve essere necessariamente negativa. Allora il rapporto $I_r/E_s$ è tale che se $E_s$ è positivo $I_r$ è negativo. Un ragionamento del tutto analogo è supponendo $E_s$ negativa, quindi O è il morsetto a potenziale maggiore nella rete avremmo immediatamente che $I_r$ è positiva e quindi in ogni caso il rapporto $I_r/E_s$ è negativo o zero. Quindi essenzialmente le conduttanze improprie sono negative.




Sempre sulla matrice delle conduttanze, vediamo i due circuiti che portano alla definizione delle due conduttanze $G_{rs}$ e $G_{sr}$. A sinistra il circuito della $G_{rs}$ in cui il generatore è al nodo s, la corrente è valutata nel nodo r. Invece per $G_{sr}$ il generatore è sul nodo r e la corrente si valuta nel nodo s. Siamo nelle ipotesi del teorema di reciprocità, per cui il rapporto tra causa ed effetto si mantiene lo stesso. Siccome

sono corrente e tensione causa ed effetto questo significa dire che in base alla reciprocità possiamo assicurare che $G_{rs} = G_{sr}$. Cioè gli elementi fuori diagonale della matrice delle conduttanze sono a coppie uguali tra di loro.

**Le proprietà della matrice delle conduttanze**

*Nodo 0*

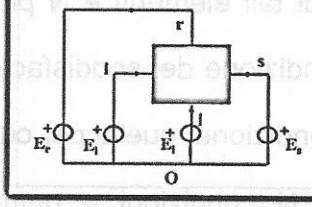
$$I_1 = G_{11}E_1 + G_{12}E_2 + \dots + G_{1s}E_s \dots + G_{1N}E_N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$I_r = G_{r1}E_1 + G_{r2}E_2 + \dots + G_{rs}E_s \dots + G_{rN}E_N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$I_N = G_{N1}E_1 + G_{N2}E_2 + \dots + G_{Ns}E_s \dots + G_{NN}E_N$$

C'è un'altra proprietà deducibile dalla matrice delle conduttanze: il nodo O è il nodo in cui convergono tutte le correnti $I_1$, ..., $I_n$ che entrano nell'n-polo. Quindi se si sommano tutte le correnti che entrano nell'n-polo si deve necessariamente ottenere zero perché nel nodo O deve essere verificata la prima legge di Kirchhoff. Si possono sommare tutti i primi membri fra loro e tutti i secondi membri fra loro; in quest'ultima somma si possono mettere in evidenza le tensioni $E_1$, $E_2$, ..., $E_S$, ..., $E_N$. Si ottiene dunque un aspetto della somma del tipo in figura a lato. Il potenziale del nodo 1, del nodo 2, ecc., ognuno moltiplicato per la somma estesa ad r di $G_{r1}$, $G_{r2}$ ecc. La somma di queste somme deve essere uguale a zero. Siccome i potenziali $E_x$ sono arbitrari, imposti dall'esterno, e siccome la somma deve essere sempre uguale a zero, allora questo accade solo se ciascuna delle sommatorie è separatamente uguale a zero. Si arriva al risultato che la somma delle $G_{rS}$ per S costante ed r variabile da 1 a N deve essere zero. Questa è un'altra condizione a cui gli elementi della matrice delle conduttanze devono soddisfare. In ogni sommatoria posso immaginare di tirare fuori il termine $G_{SS}$ e quindi in ogni riga della matrice delle conduttanze il termine proprio $G_{SS}$ è uguale a meno la sommatoria dei termini impropri presenti sulla riga. Quindi , riepilogando le proprietà della matrice delle conduttanze, abbiamo che il numero degli elementi è $N^2$, N è il numero di morsetti dell'n-polo, gli elementi sono stati chiamati

**Le proprietà della matrice delle conduttanze**

*Nodo 0*

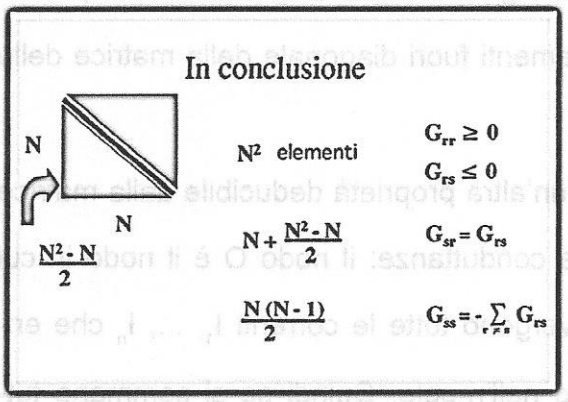
$$E_1 \sum_r G_{r1} + E_2 \sum_r G_{r2} + \dots + E_s \sum_r G_{rs} + \dots + E_N \sum_r G_{rN} =$$

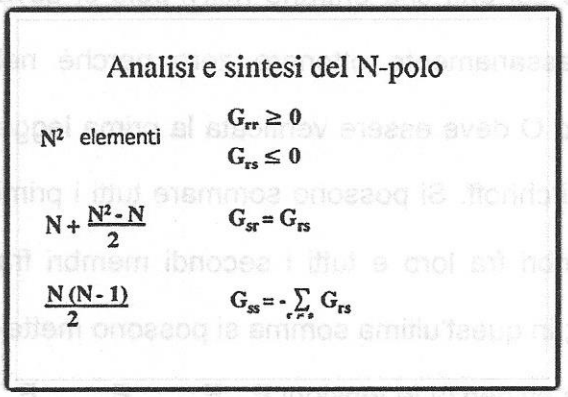



$$\sum_r G_{rs} = 0$$

$$G_{ss} = -\sum_{r \neq s} G_{rs}$$

con la lettera G.




In figura a lato la matrice è divisa dalla diagonale. Si noti che in ogni triangolo ci sono $(N^2 - N) / 2$ elementi perché $N^2 - N$ sono tutti gli elementi meno quelli della diagonale e dividendo per due otteniamo gli elementi di uno dei due triangoli in cui è divisa la matrice.

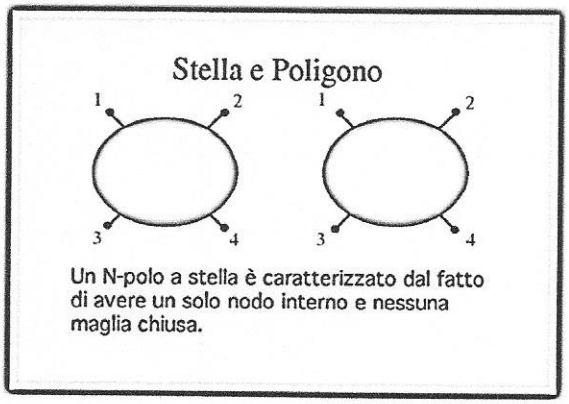
La condizione $G_{SR} = G_{RS}$ ci dice che gli elementi del triangolo inferiore sono uguali agli elementi del triangolo superiore, per cui se si vuole assegnare la matrice dell'n-polo si può assegnare ad arbitrio solo gli elementi contenuti in un triangolo e quelli della diagonale principale. Il numero di tali elementi è N più il numero di uno dei due triangoli. Abbiamo però visto che la condizione del soddisfacimento della prima legge di Kirchhoff al nodo O impone un'altra condizione, quella per cui $G_{SS} = - \sum G_{RS}$ per $R \neq S$. Questa fornisce ancora altre N condizioni e quindi i parametri indipendenti assegnabili per dare una matrice delle conduttanze non sono più quelli calcolati finora, ma dobbiamo sottrarci N, ottenendo $N(N - 1) / 2$.

Quindi i parametri indipendenti sono gli elementi di uno dei triangoli, gli atri possono essere ricavati dalla varie condizioni.

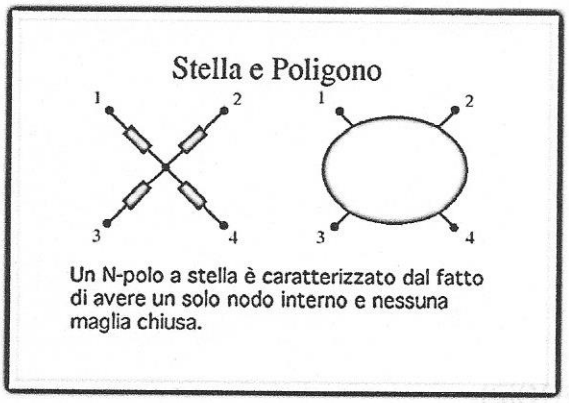
In pratica possiamo dire che l'analisi dell'n-polo corrisponde all'idea di avere il circuito che corrisponde all'n-polo e si vuole calcolare i parametri G dell'n-polo. La sintesi invece è avere la matrice delle G e voler costruire una rete che ha quella matrice delle G come sua matrice delle conduttanze.

a questo punto devono essere soddisfatte delle condizioni di fisica realizzabilità e cioè

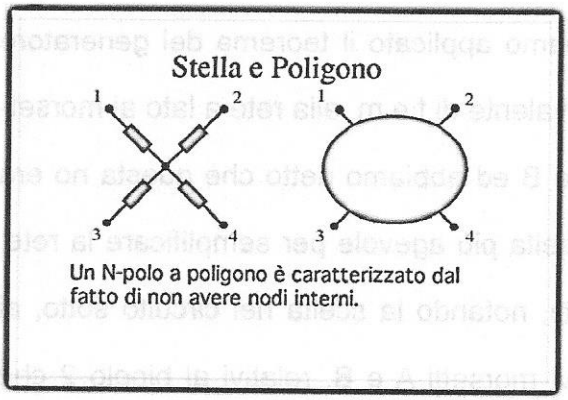
i parametri $G_{RR}$ devono essere maggiori o uguali a zero, i $G_{RS}$ devono essere negativi, i parametri indipendenti assegnabili sono al più N(N - 1)/2.



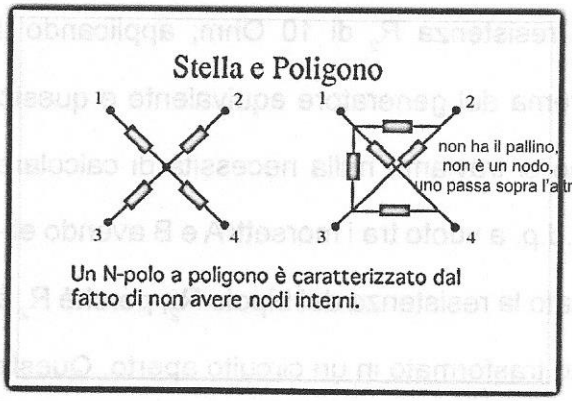
Un N-polo a stella è caratterizzato dal fatto di avere un solo nodo interno e nessuna maglia chiusa.



Un N-polo a stella è caratterizzato dal fatto di avere un solo nodo interno e nessuna maglia chiusa.



Un N-polo a poligono è caratterizzato dal fatto di non avere nodi interni.



Un N-polo a poligono è caratterizzato dal fatto di non avere nodi interni.

Di tutti gli n-poli possibili possiamo distinguere due categorie: n-poli a stella quelli caratterizzati dall'avere un solo nodo interno ed n nodi esterni e nessuna maglia chiusa al suo interno. Poi possiamo considerare gli n-poli a poligono che sono caratterizzati dal fatto di non avere nodi interni.

Quindi:

• Un N-polo a stella è caratterizzato dal fatto di avere un solo nodo interno e nessuna maglia chiusa.

• Un N-polo a poligono è caratterizzato dal fatto di non avere nodi interni.

• Un N-polo a poligono è caratterizzato dal fatto di non avere nodi interni.

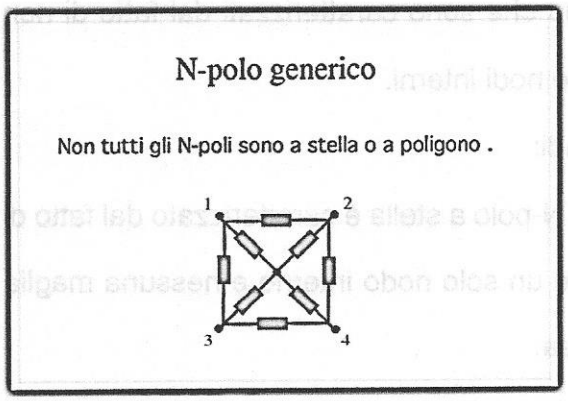
• Se tutti i morsetti dell'N-polo a poligono sono collegati tra loro con un bipolo, allora l'N-polo si dice a poligono completo.

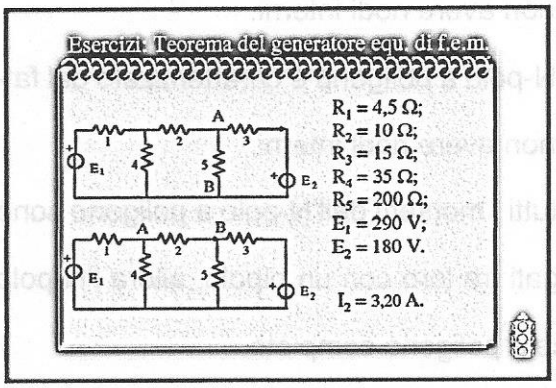
• Non tutti gli N-poli sono a stella o a poligono (se ad esempio ha un nodo interno e forma delle maglie).

Ci occuperemo prossimamente di come si fa a trasformare un n-polo a poligono in un n-polo a stella indipendentemente dal fatto che esso sia poligono completo o no.



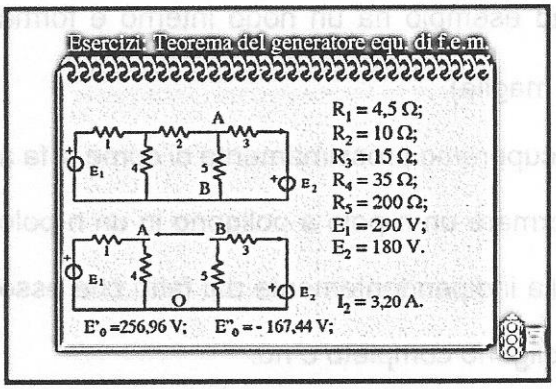

Questo ci consentirà di risolvere il problema che ci pone il circuito a ponte.



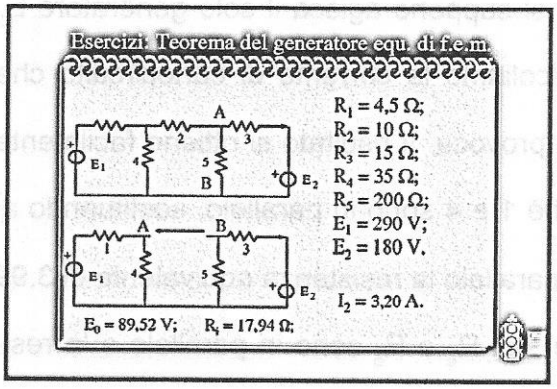




ESERCIZI

Abbiamo applicato il teorema del generatore equivalente di f.e.m. alla rete a lato ai morsetti A e B ed abbiamo detto che questa no era la scelta più agevole per semplificare la rete. Infatti, notando la scelta nel circuito sotto, ai nuovi morsetti A e B, relativi al bipolo 2 che una resistenza $R_2$ di 10 Ohm, applicando il teorema del generatore equivalente e questo ramo ci troviamo nella necessità di calcolare la d.d.p. a vuoto tra i morsetti A e B avendo eliminato la resistenza del bipolo $R_2$, perché $R_2$ è stato trasformato in un circuito aperto. Questo



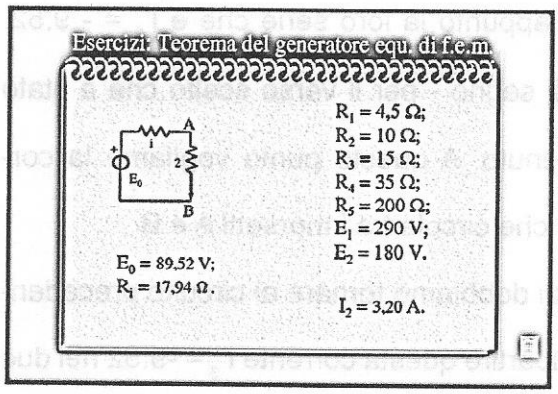
semplifica la rete perché la suddivide in due parti separate: un maglia con il generatore $E_1$ e una maglia con il generatore $E_2$. Andando a vedere nel laboratorio virtuale col multimetro quanto vale la corrente nel ramo 2 abbiamo un valore di 3.20A. Per avere questo risultato applicando il generatore equivalente di f.e.m. si deve calcolare la tensione a vuoto tra i morsetti A e B. Cosa possibile applicando la sovrapposizione degli effetti: la d.d.p. fra il nodo A ed il nodo O sarà data dalla corrente circolante nella maglia a destra moltiplicata per la resistenza del ramo 4 che è di 35 Ohm. La corrente che circola nella maglia a sinistra, in verso orario, è data dalla tensione del generatore $E_1$ che è 290V diviso la serie di $R_1$ e $R_4$. Si ottiene, moltiplicando per R4 che è 35, $E'_0$ = 256,96 V. Analogamente calcoliamo la d.d.p. tra il nodo B ed il nodo O calcolando la corrente come $E_2$ diviso la somma di $R_5$ ed $R_3$ e moltiplicare per 200 Ohm e otteniamo $E''_0$ = - 167,44 V. Col segno - (meno) se d.d.p. tra O e B, col segno + (più) se tra B e O.




Facendo la somma algebrica delle due tensioni $E'_0$ = 256,96 V e $E''_0$ = - 167,44 V per ottenere la d.d.p. tra A B, ottenendo il risultato di 89.52V.

Quindi la tensione del generatore equivalente è 89.52V.

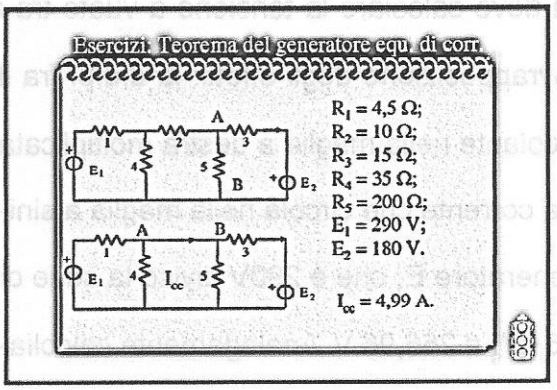
Resta da calcolare la resistenza interna: quando si sono circuitati i generatori $E_1$ e $E_2$ la resistenza interna è data dal parallelo di 1 e 4 con in serie il parallelo di 3 e 5. Il risultato è una resistenza interna di 17.94 Ohm.

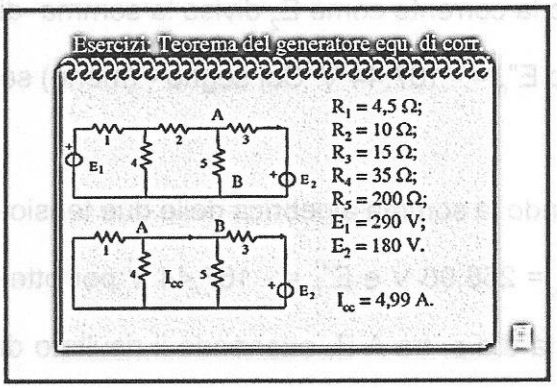


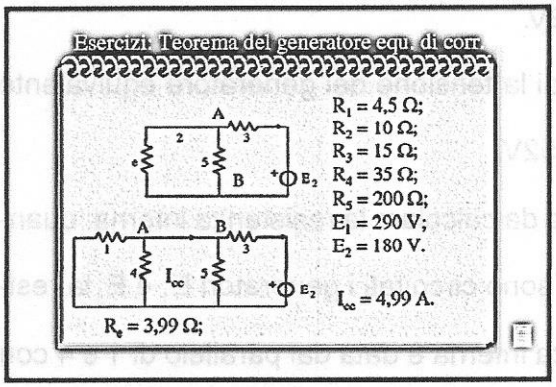

A questo punto possiamo costruire il circuito equivalente, come da figura a lato.

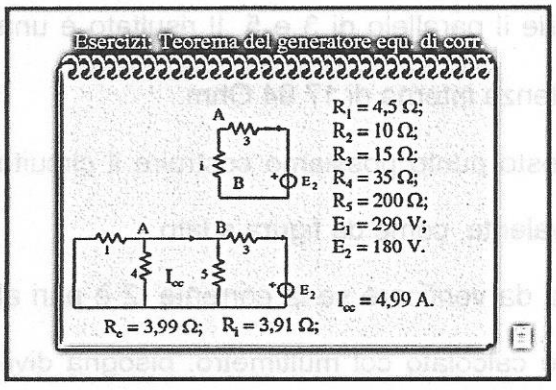
Resta da verificare se la corrente I2 è pari al valore calcolato col multimetro: bisogna divi-

dere 89.52 per la somma di 17.94 e $R_2$ = 10 Ohm. Quindi otteniamo $I_2$ = 3.20A, giustamente.



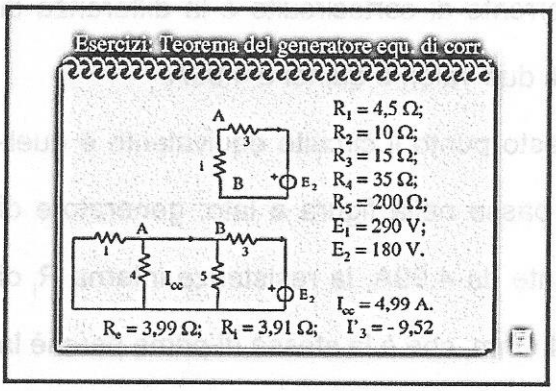



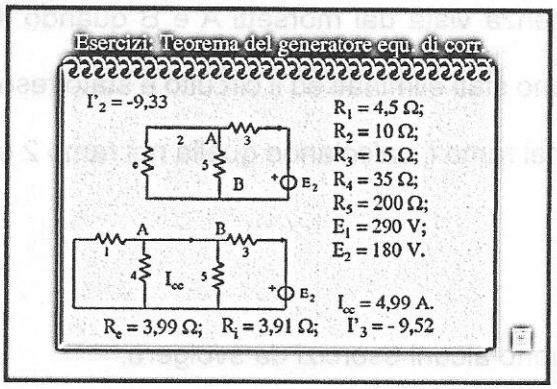




Un altro modo di affrontare questo stesso problema con i teoremi di caratterizzazione esterna delle reti, e cioè il teorema del generatore di f.e.m. e di corrente, potrebbe essere quello di applicare il teorema del generatore equivalente di corrente. Per farlo, al posto di $R_2$ si deve mettere un cortocircuito e calcolare la corrente di cortocircuito tra i morsetti A e B. Anche in questo caso si può applicare la sovrapposizione degli effetti e quindi in un primo caso si suppone agisca il solo generatore $E_2$ e calcoliamo la corrente di cortocircuito che esso provoca. Il risultato si ottiene facilmente perchè 1 e 4 sono in parallelo, sostituendo al loro parallelo la resistenza equivalente di 3.99 Ohm, poi $R_e$ e $R_5$ sono in parallelo e la resistenza equivalente è 3.91 Ohm.

Poi la $R_i$ e $R_3$ sono in serie ed il generatore $E_2$ vede appunto la loro serie che è $I'_3$ = - 9,52. Con il segno - per il verso scelto che è stato mantenuto. A questo punto vogliamo la corrente che circola tra i morsetti A e B.

Quindi dobbiamo tornare al circuito precedente e ripartire questa corrente $I'_3$ = -9.52 nei due



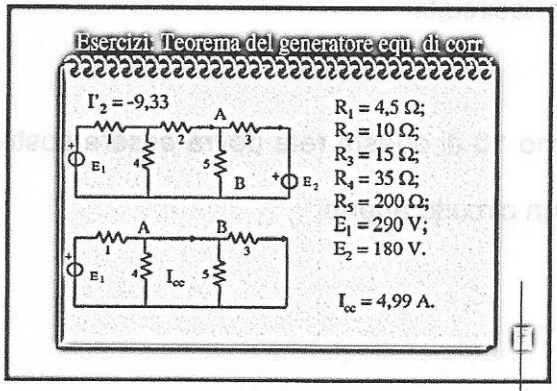



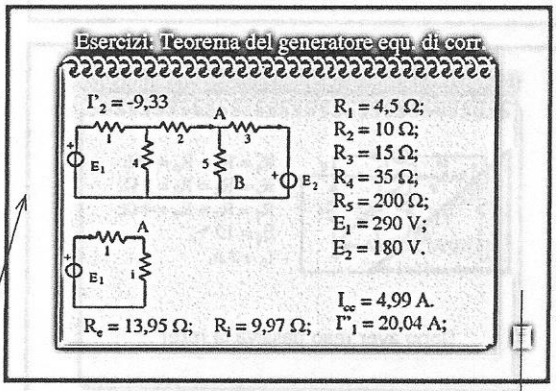

rami in parallelo $R_5$ e $R_e$, come da seconda figura nella pagina.

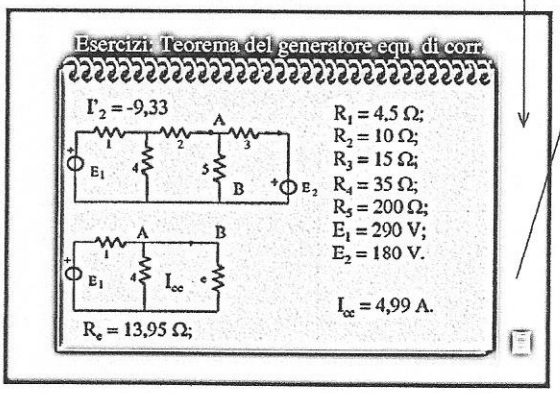
Quindi basta moltiplicare per $R_5$ e dividere per la somma di $R_e$ con $R_5$. Questo perché la corrente che circola nel ramo 2 è quella che circola anche nella resistenza $R_e$.

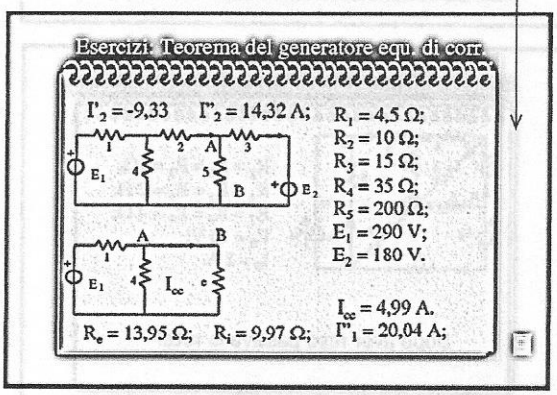
Facendo i conti si ottiene $I'_2 = -9.33$.

La stessa cosa deve ora essere fatta per il generatore $E_2$ con un risultato di $I''_2 = 14.32$.

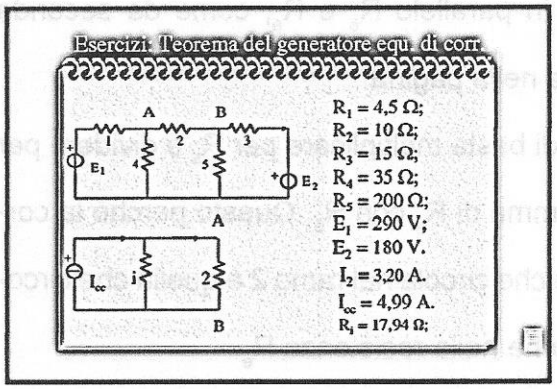


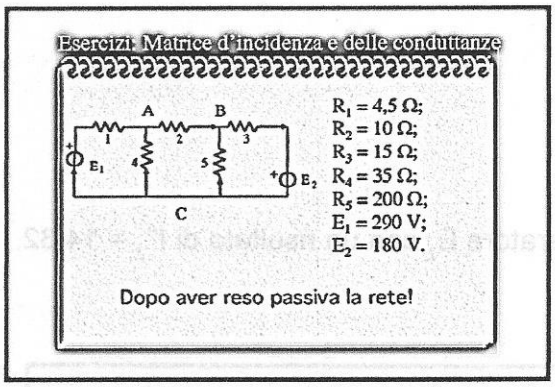




14.13



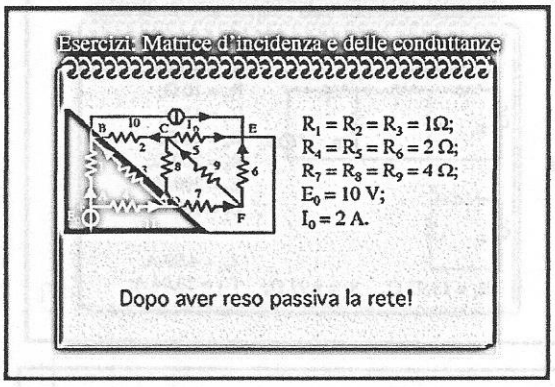

La corrente di cortocircuito è la differenza di questi due valori e quindi è 4.99A.

A questo punto il circuito equivalente è quello in basso nella figura a lato: generatore di corrente da 4.99A, la resistenza interna $R_i$ di 17.94 Ohm, che è la stessa di prima perché la resistenza vista dai morsetti A e B quando il cortocircuito non è presente e i due generatori sono stati eliminati ed il circuito è stato reso passivo. Ripartendo la corrente $I_{cc}$ nel ramo 2 e nel ramo i, calcolando quella nel ramo 2 è facile vedere che il risultato è $I_2$ = 3.20 A.

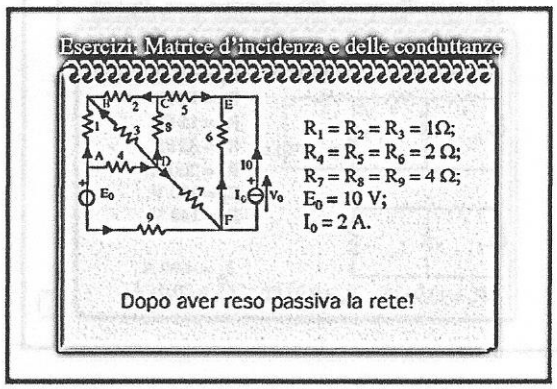



Seguono alcuni esercizi da svolgere.

Provare a calcolare la matrice di incidenza e la matrice delle conduttanze: prima la rete deve essere resa passiva sostituendo $E_1$ e $E_2$ con dei cortocircuiti.




Al ramo 10 di questa rete dovrà essere sostituito un circuito aperto.



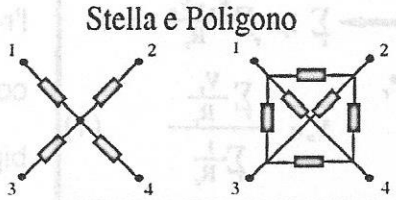

14.14

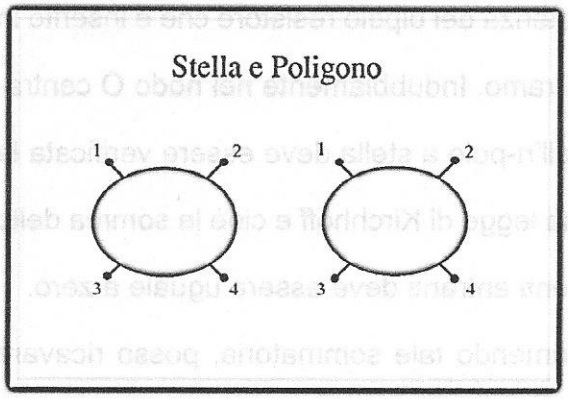
LEZIONE 15

# Analisi e sintesi del N-polo

Prof. Luciano De Menna
43'49"

Trasformazione stella-poligono
Analisi e sintesi dell'N-polo
Sintesi di un N-polo a poligono completo
Esercizi




In questa lezione affronteremo il problema della trasformazione di un N-polo a stella in un N-polo a poligono. Trasformazione necessaria per determinare la resistenza tra due morsetti diagonali del ponte.

L'N-polo a stella non ha maglie ma ha un solo nodo interno.

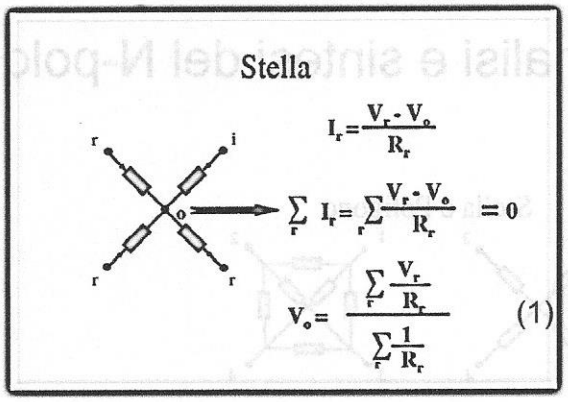
L'N-polo a poligono non ha nodi interni e può essere completo come in figura oppure non completo.

Immaginando i due N-poli chiusi in una scatola il loro modo di funzionare deve dipendere esclusivamente dalla caratteristica dell'N-polo e cioè dalla matrice delle conduttanze che lo definisce, cioè quella matrice che ci consente, una volta noti i potenziali dei 4 nodi (per un quadripolo), di determinare le correnti entranti nei singoli nodi (o poli). La convenzione per il verso positivo per le correnti nei singoli poli dell'N-polo sia quello entrante.

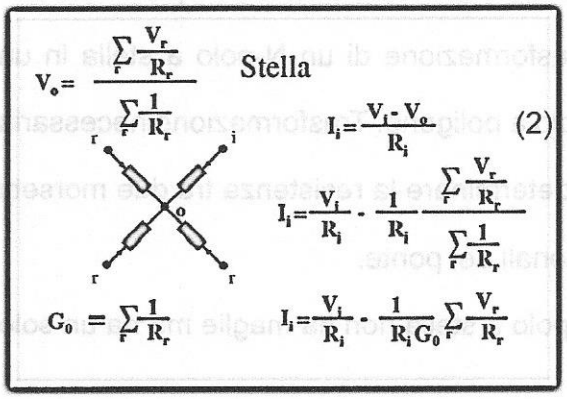
Dunque l'obiettivo è vedere se e come è possibile trasformare un N-polo a stella in un N-polo a poligono equivalente, in questo caso completo.

In un n-polo a stella sono noti i potenziali degli N poli che rappresentano i morsetti del dispositivo ma non è noto il potenziale dell'unico nodo interno all'n-polo, quello che nella relativa figura è stato chiamato nodo O.

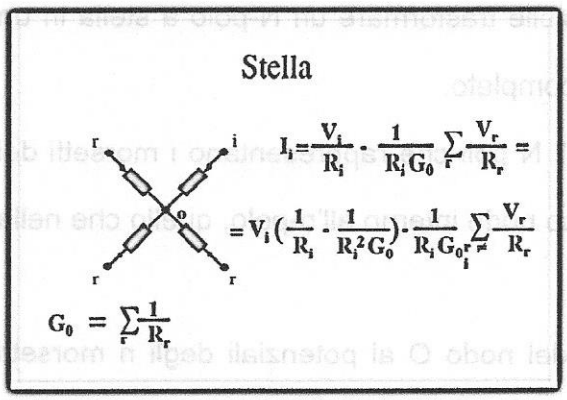
Occorre una relazione che lega il potenziale del nodo O ai potenziali degli n morsetti



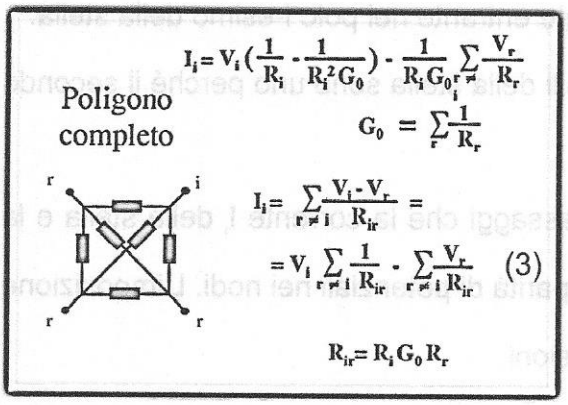

dell'n-polo. Questa relazione è molto facile da trovare, perché, considerando ogni corrente che entra nel morsetto di un n-polo, ad esempio l'r-esimo morsetto, essa può essere espressa come differenza di potenziale ai morsetti del bipolo inserito in quel ramo ($V_r$ - $V_0$) diviso la resistenza del bipolo resistore che è inserito in quel ramo. Indubbiamente nel nodo O centrale dell'n-polo a stella deve essere verificata la prima legge di Kirchhoff e cioè la somma delle correnti entranti deve essere uguale a zero.




Esprimendo tale sommatoria, posso ricavare $V_0$ in quanto essa non dipende dall'indice r (vd. 1). Ora possiamo introdurre l'espressione di $V_0$ in funzione dei potenziali $V_r$ nella espressione della generica corrente che entra in un n-polo a stella (vd. 2), con riferimento al morsetto i-esimo. Si noti come venga definita $G_0$ come la conduttanza equivalente alla somma di tutte le conduttanze dei rami della stella. Così facendo abbiamo una espressione più compatta. Nella sommatoria della espressione finale è compreso anche il nodo i, quello nel quale stiamo calcolando la corrente, quindi il secondo termine della espressione dipende anche dal potenziale $V_i$ del nodo i-esimo. Se vogliamo mettere in evidenza tutta la parte della corrente che dipende dal potenziale nel nodo i-esimo e lasciare in un secondo termine tutto quello che dipende dal potenziale degli altri nodi dell'n-polo dobbiamo estrarre il termine $V_i$ da tale sommatoria, ottenendo una espressione come da figura a lato.




Quindi abbiamo ricavato l'espressione della




corrente i-esima nell'n-polo a stella; con questa informazione passiamo al poligono completo, volendo esprimere la dipendenza della corrente i-esima generica entrante nel morsetto i dell'n-polo in funzione dei potenziali ai nodi dello stesso n-polo. Poi paragoneremo le due espressioni, quella della stessa e quella del poligono completo e vedremo sotto quali condizioni queste due espressioni sono identiche, cioè danno le stesse correnti a parità di potenziale. Quindi a quel punto se gli n-poli danno le stesse correnti a parità di potenziali sono del tutto equivalenti dal punto di vista elettrico. E quindi, pur vedendo che ci sono dei problemi, avremmo trovato l'equivalenza stella - poligono o poligono - stella.

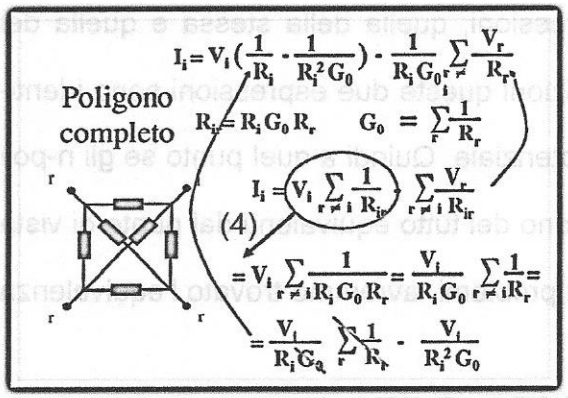
Dobbiamo quindi esprimere la corrente i-esima entrante nell'i-esimo nodo, o polo, dell'n-polo a poligono in funzione dei potenziali. E' molto semplice perché la corrente entrante nel nodo i-esimo è pari alla somma delle correnti che circolano in tutti i rami che sono collegati con il nodo i-esimo. Poiché il poligono è completo possiamo affermare che tutti i nodi dell'n-polo a poligono sono collegati al nodo i-esimo e quindi affermare che la corrente $I_i$ deve avere espressione come da rif. 3. La sommatoria è estesa a tutti i nodi tranne il nodo i perché stiamo calcolando la corrente nel nodo i. Comunque, nel caso in cui r = i la differenza al numeratore si annulla quindi non darebbe contributo. Per correttezza si indica la sommatoria per r diverso da i.

Ora è conveniente separare i termini che dipendono dal potenziale nel nodo i da quelli che dipendono dagli altri nodi e separare la sommatoria in due parti. Il termine $R_{ir}$ è la resistenza inserita tra il nodo i ed il nodo r del poligono completo. Ramo che deve comunque essere presente perché stiamo ipotizzando il poligono completo. A questo punto resta da vedere sotto quali condizioni questa corrente che rappresenta la corrente entrante nel generico polo i dell'n-polo a poligono completo diventa uguale a parità di potenziali e quindi

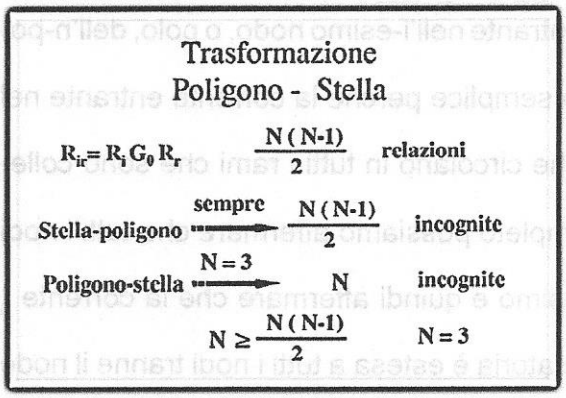
a parità di $V_i$ e $V_r$ a quella che esprime la corrente entrante nel polo i-esimo della stella.

I pedici in riferimento al poligono sono due, quelli della stella sono uno perché il secondo sarebbe O comune a tutti.

Se si impone $R_{ir} = R_i\, G_0\, R_r$ si vede in pochi passaggi che la corrente $I_i$ della stella e la corrente $I_i$ del poligono completo sono uguali a parità di potenziali nei nodi. L'imposizione rende cioè uguali i secondi termini delle espressioni.




Resta da vedere se rende uguali anche i primi termini. Per fare questo occorre considerare nel poligono anche il termine corrispondente al pedice i, aggiungendolo e sottraendolo (vd. 4). $R_{ir}$ viene sostituito con $R_i G_o R_r$. A conti fatti si ottiene l'equivalenza.



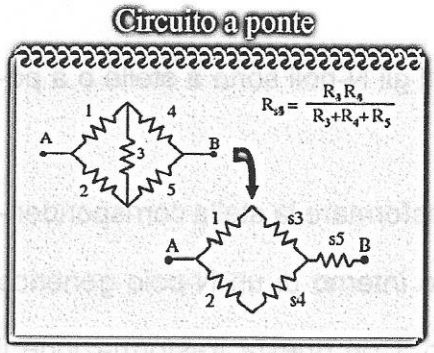

Quindi l'imposizione rende equivalenti i due n-poli, quello a stella e quello poligono completo. Questo comporta una serie di relazioni di equivalenza da imporre, come da figura a lato.




Dalle considerazioni sulle incognite, la trasformazione stella - poligono è sempre possibile, quella poligono - stella è possibile solo se N = 3, cioè dal triangolo alla stella a tre rami. Nella figura a lato $R_0$ è la somma di tutte le resistenze che confluiscono nel triangolo.

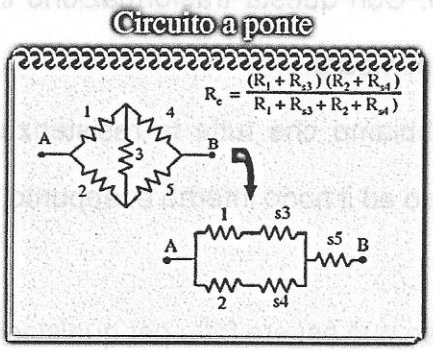
A questo punto è possibile verificare se questa trasformazione ci risolve il problema lasciato in sospeso della riduzione di un circuito che presenta caratteristiche del tipo a ponte.

In effetti questo è possibile perché il triangolo fatto dalle resistenze 3, 4 e 5 è possibile

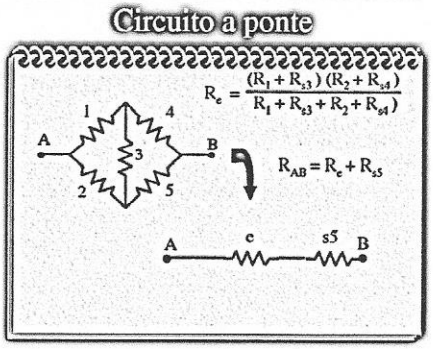


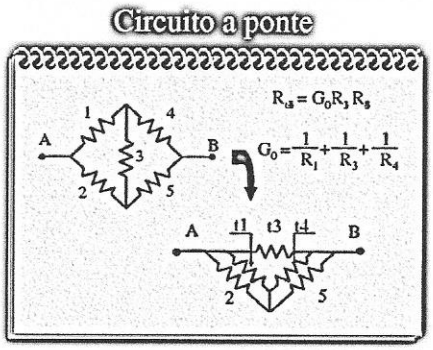

trasformarlo in una stella, composta da resistori s3, s4 e s5.

A questo punto, nel poligono, il resistore 1 ed il resistore s3 sono in serie, il resistore 2 ed s4 sono in serie ed i due rami sono in parallelo, ed il loro parallelo è in serie ad s5.




Quindi sviluppando le relazioni ricaviamo le resistenze equivalenti. Da una verifica col multimetro, si dimostra quanto ottenuto.




Un'altra via è quella di trasformare la stella costituita dai rami 1, 3 e 4 che convergono nell'estremo superiore del circuito a ponte in un triangolo.

Si ottiene un circuito come da figura a lato in cui t1, t3, t4 rappresentano le tre resistenze del triangolo che sono collegati ai morsetti a cui era collegata la stella di resistenze 1, 3 e 4, cioè il morsetto A e B. Quindi i due circuiti visti dai morsetti A e B sono equivalenti. Abbiamo che t1 e t2 sono in parallelo, t4 e 5 sono in parallelo, t3 è in parallelo alla serie di queste due. Quindi abbiamo la possibilità di calcolare la resistenza equivalente vista ai morsetti A e B.

Sull'n-polo a poligono c'è da ricordare che abbiamo detto che non sono presenti nodi in-

terni.

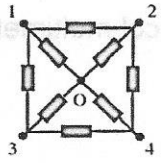
## N-polo a poligono

- In un N-polo a poligono non sono presenti nodi interni

Inoltre non tutti gli N-poli sono a stella o a poligono.

## N-polo generico

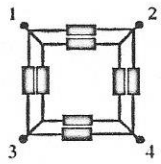
Non tutti gli N-poli sono a stella o a poligono .




Si può però trasformare la stella corrispondente a ogni nodo interno di un N-polo generico in un poligono. Con questa trasformazione il nodo interno scompare.

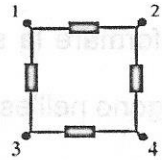
Nella figura abbiamo che tutte le resistenze sono in parallelo ed il nodo interno è, appunto, scomparso.

Eliminando i nodi interni .




Questo discorso può essere fatto per qualsiasi N-polo.

Eliminando i nodi interni .

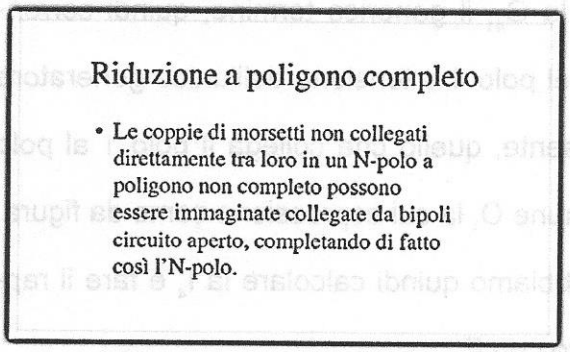



## Riduzione a poligono

- Attraverso successive eliminazioni dei nodi interni, mediante trasformazioni stella poligono, è possibile eliminare tutti i nodi interni in un N-polo e trasformarlo quindi in un N-polo a poligono, non necessariamente completo.

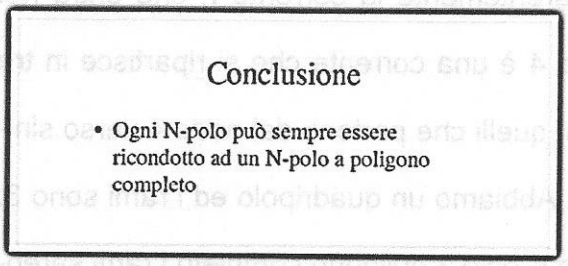
RIDUZIONE A POLIGONO

• Attraverso successive eliminazioni dei nodi interni, mediante trasformazioni stella poligono, è possibile eliminare tutti i nodi interni in un N-polo e trasformarlo quindi in un N-polo a poligono, non necessariamente completo.




RIDUZIONE A POLIGONO COMPLETO

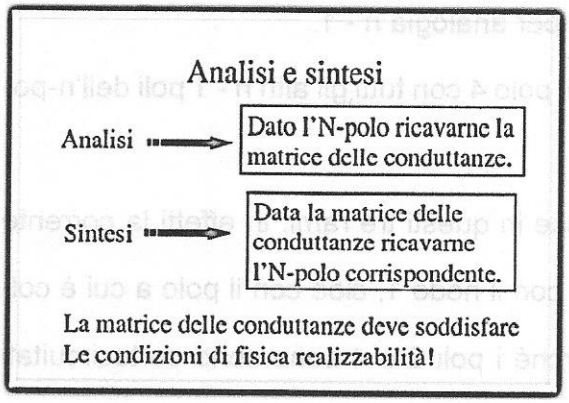
• Le coppie di morsetti non collegati direttamente tra loro in un N-polo a poligono non completo possono essere immaginate collegate da bipoli circuito aperto, completando di fatto così l'N-polo.




CONCLUSIONE

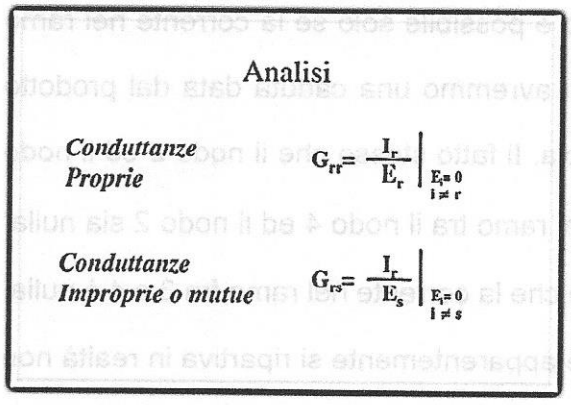
• Ogni N-polo può sempre essere ricondotto ad un N-polo a poligono completo.

Questo ci è utile per l'analisi e la sintesi.



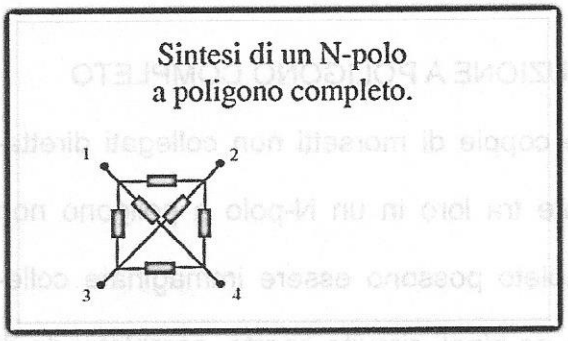

Per l'analisi non ci sono particolari problemi. Basta calcolare le $G_{rr}$ e le $G_{rs}$ con l'espressione come da figura, cioè rapporto tra corrente e tensione.

In linea di principio il problema è risolvibile sempre.




Per il problema della sintesi, possiamo affrontarlo in maniera semplice per l'N-polo a poligono completo.

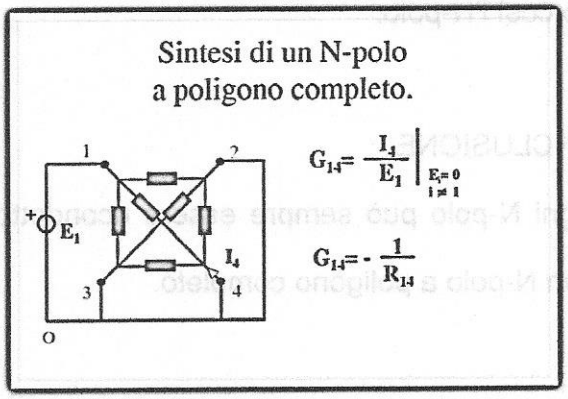
Cioè il problema è quello di avere una matrice delle conduttanze, che soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità e vogliamo costruire un circuito a poligono completo che abbia quella matrice delle conduttanze come caratteri-




stica.

Sia la $G_{41}$ il generico termine, quindi corrente nel polo 4 e tensione dell'unico generatore presente, quello che collega il polo 1 al polo comune O, la cui espressione come da figura.

Dobbiamo quindi calcolare la $I_4$ e fare il rapporto con $E_1$.




Apparentemente la corrente $I_4$ che entra nel nodo 4 è una corrente che si ripartisce in tre rami, quelli che partono dal nodo 4 verso sinistra. Abbiamo un quadripolo ed i rami sono 3; in un n-polo a poligono completo i rami sarebbero per analogia n - 1.

Sarebbero i rami che collegano per definizione il polo 4 con tutti gli altri n - 1 poli dell'n-polo.

Quindi apparentemente la corrente $I_4$ si ripartisce in questi tre rami: in effetti la corrente $I_4$ deve circolare nel ramo che collega il nodo 4 con il nodo 1, cioè con il polo a cui è collegato l'unico generatore presente. Questo perché i poli 2 e 4 sono sono cortocircuitati per costruzione per calcolare la $G_{41}$; questo vuol dire che la tensione ai morsetti 2 - 4 deve essere necessariamente nulla. Ma questo è possibile solo se la corrente nel ramo che va dal nodo 2 al nodo 4 è nulla, altrimenti avremmo una caduta data dal prodotto della sua resistenza per la corrente che vi circola. Il fatto stesso che il nodo 2 ed il nodo 4 sono cortocircuitati impone che la corrente nel ramo tra il nodo 4 ed il nodo 2 sia nulla. Un ragionamento analogo ci porta a concludere che la corrente nel ramo fra 3 e 4 è nulla. Quindi la corrente $I_4$ che entra nel nodo 4 e che apparentemente si ripartiva in realtà non si ripartisce e circola tutta nel ramo della diagonale che è occupato dalla resistenza che possiamo chiamare $R_{14}$.

Quindi il rapporto tra tensione $E_1$ e corrente $I_4$, a meno del segno, deve essere proprio pari alla resistenza che è presente tra il ramo 1 e 4, che abbiamo chiamato $R_{14}$.

Per quanto riguarda il segno, esso deve essere negativo perché in effetti ci troviamo nell'aver fatto una convenzione del generatore in quanto in 1 c'è la convenzione dell'utilizzatore, ma la corrente $I_4$ entra nel nodo 4 quindi è una corrente che entra nel morsetto inferiore del generatore $E_1$. Per cui possiamo concludere che il rapporto tra $E_1$ e $I_4$ è negativo ed è $-R_{14}$. Il rapporto tra $I_4$ ed $E_1$ sarà $-1/R_{14}$. Quindi se dalla matrice delle conduttanze vogliamo costruire un n-polo poligono completo che sia compatibile con quella matrice basta inserire tra ogni coppia di morsetti r ed s una resistenza $R_s$ pari a $-1G_{rs}$, dove $G_{rs}$ è l'elemento di posto r ed s della matrice assegnata. Cioè:

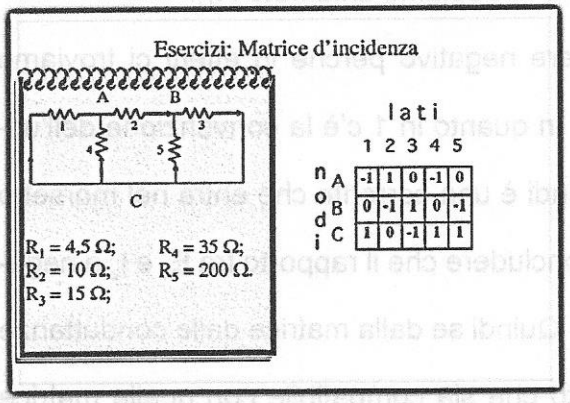
**Sintesi di un N-polo a poligono completo.**

Data una matrice delle conduttanze di un N-polo, che rispetti le condizioni di fisica realizzabilità, è sempre possibile costruire un N-polo a poligono completo che sia compatibile con tale matrice inserendo tra ogni coppia di morsetti r ed s una resistenza $R_{rs}$ pari a $-1/G_{rs}$, dove $G_{rs}$ è l'elemento di posto r ed s della matrice assegnata.

## SINTESI DI UN N-POLO A POLIGONO COMPLETO

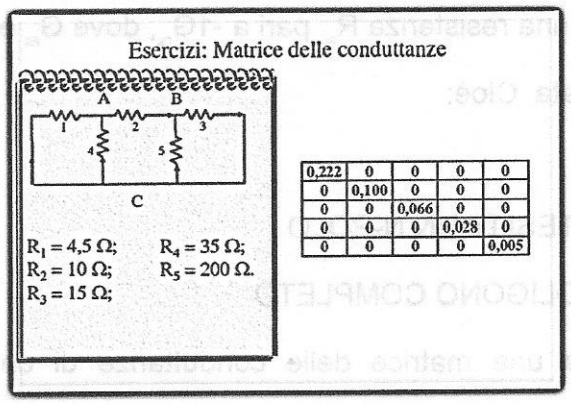
Data una matrice delle conduttanze di un N-polo, che rispetti le condizioni di fisica realizzabilità, è sempre possibile costruire un N-polo a poligono completo che sia compatibile con tale matrice inserendo tra ogni coppia di morsetti r ed s una resistenza $R_{rs}$ pari a $-1/G_{rs}$, dove $G_{rs}$ è l'elemento di posto r ed s della matrice assegnata.

Di seguito la soluzione di alcuni esercizi dati in precedenza



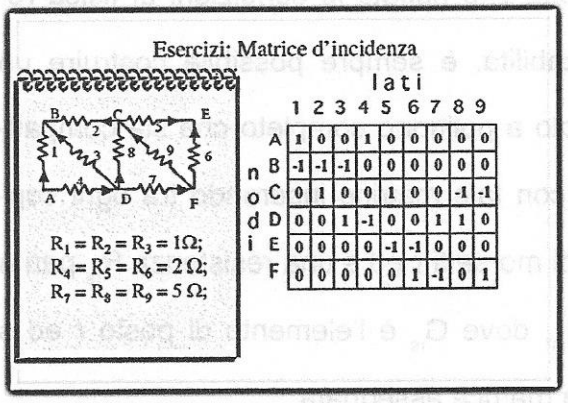

| nodi \ lati | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | -1 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| B | 0 | -1 | 1 | 0 | -1 |
| C | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 |

Abbiamo i lati ed i nodi, ad esempio il lato 1 entra nel nodo A (per cui c'è -1) ed esce dal nodo C (per cui c'è -1). Il lato 4, con il verso che abbiamo scelto esce dal nodo C ed entra nel nodo A, per cui +1 al posto 4C e -1 al posto 4A.



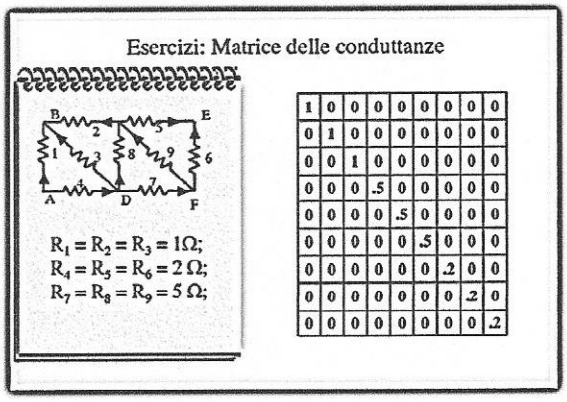

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,222 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0,100 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0,066 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0,028 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0,005 |

La matrice delle conduttanze della rete è una matrice diagonale i cui termini sono le conduttanze dei singoli bipoli presenti nei rami della rete. Quindi per il lato 1 dobbiamo fare l'inverso di 4,5 che è 0.222. Per il lato 2 dobbiamo fare l'inverso di 10 ecc.




| nodi \ lati | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 |
| D | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 |

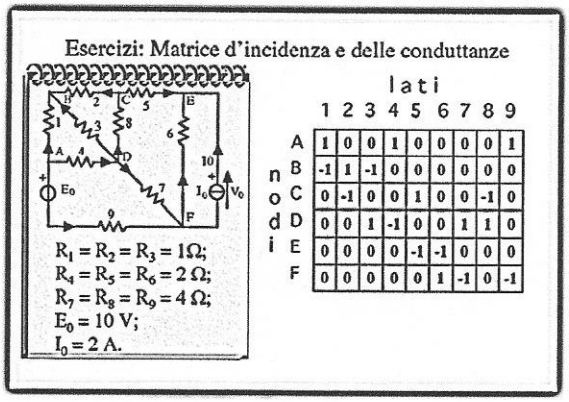
In questo caso più complesso, prendiamo il lato 8, che esce dal nodo D ed entra nel nodo C. Quindi nodo D = 1 e nodo C = -1.




| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | .5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | .5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | .5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | .2 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | .2 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | .2 |

Questa è una rete attiva, che deve essere resa passiva, mettendo un cortocircuito al posto di $E_0$ ed al posto di $I_0$ dobbiamo mettere un circuito aperto. Questo è come se il ramo 10 non esistesse.

Quindi, prendendo ad esempio il ramo 7, esso

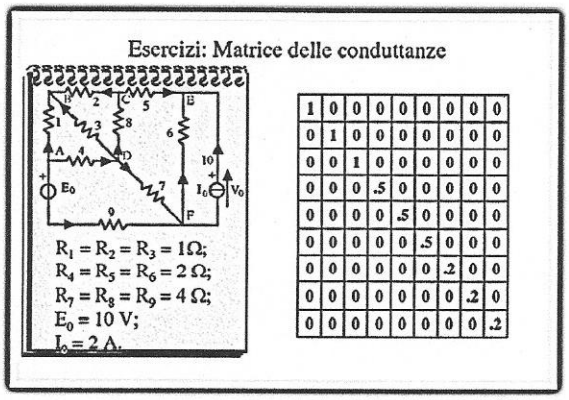



| nodi \ lati | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| B | -1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | -1 |

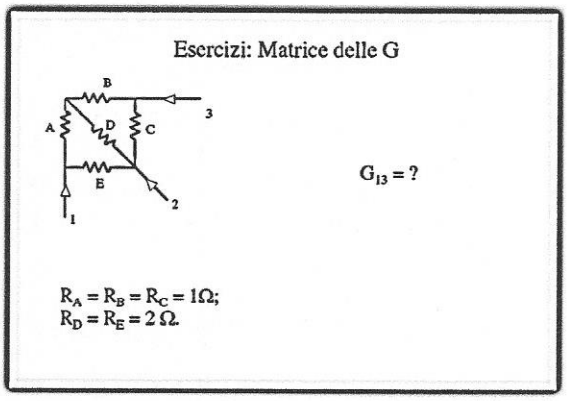
va dal nodo D al nodo F, 1 e -1.

Per la matrice delle conduttanze nessun problema.

Si noti che la matrice di incidenza si può scrivere anche per una rete attiva, quella che non si può scrivere è la matrice delle conduttanze perché essa veniva fuori quando avevamo tirato fuori i generatori presenti nella rete, perciò ci siamo limitati a scrivere la matrice di incidenza e delle conduttanze per la rete resa passiva.




| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | .5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | .5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | .5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | .2 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | .2 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | .2 |



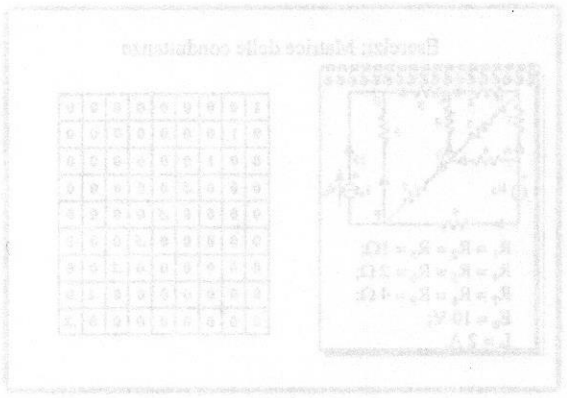

Per esercizio, proviamo a fare un esempio di n-polo. Un circuito a ponte visto come un tri-polo. Si immagina di alimentarlo in tensione dai morsetti indicati.

15.11

Riepilogo della Lezione 15

- Trasformazioni stella-poligono;
- Analisi e sintesi dell'N-polo;
- Sintesi di un N-polo a poligono completo;
- Esercizi.



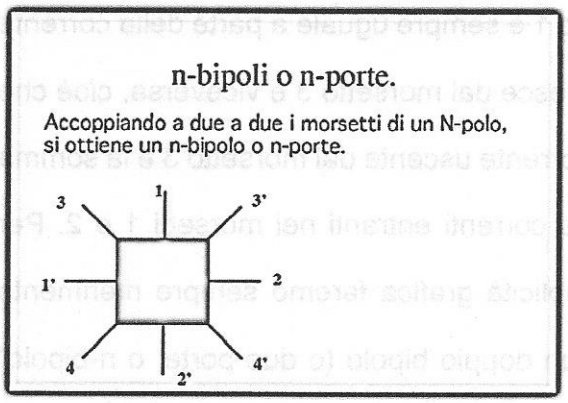


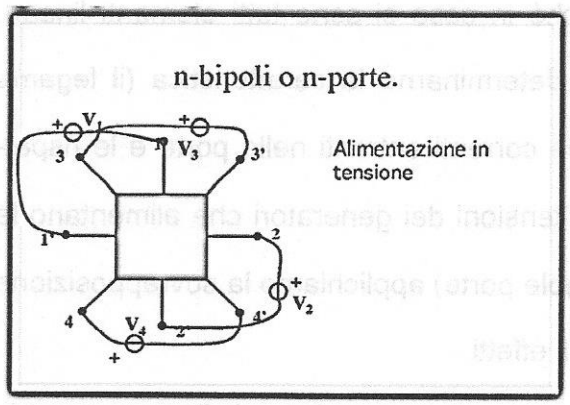
LEZIONE 16

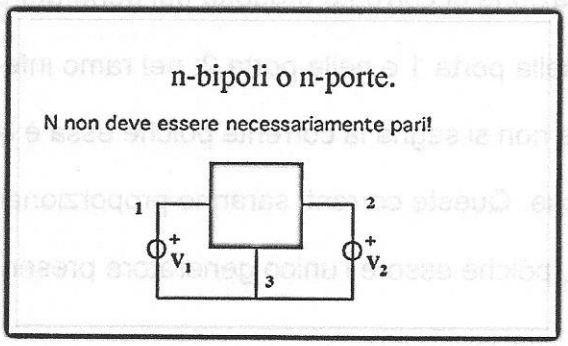
# Introduzione degli n-bipoli o n-porte

Prof. Luciano De Menna
43'24"

n-bipoli o n-porte
Matrice delle G e delle R
Doppi bipoli a T o a Pi-greco
Doppi bipoli come adattatori
Potenza assorbita da un doppio bipolo
Esercizi



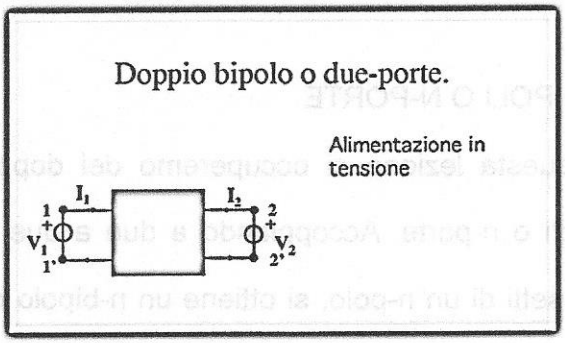

## N-BIPOLI O N-PORTE

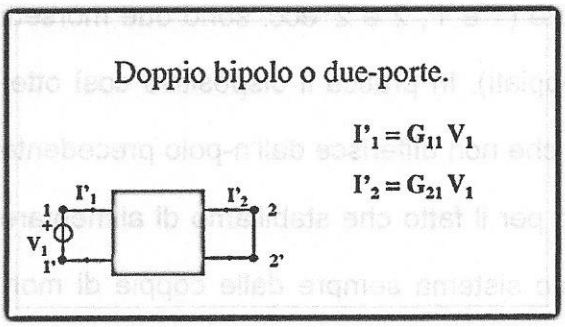
In questa lezione ci occuperemo dei doppi bipoli o n-porte. Accoppiando a due a due i morsetti di un n-polo, si ottiene un n-bipolo o n-porte (1 e 1', 2 e 2' ecc. sono due morsetti accoppiati). In pratica il dispositivo così ottenuto che non differisce dall'n-polo precedente salvo per il fatto che stabiliamo di alimentare questo sistema sempre dalle coppie di morsetti che abbiamo scelto. Come ad esempio una alimentazione in tensione nella figura a lato in cui i generatori sono inseriti tra i morsetti corrispondenti nell'accoppiamento delineato in precedenza. In pratica assicureremo che non utilizzeremo mai questo n-polo se non alimentandolo dalle coppie di morsetti. Quindi avremo un n-bipolo piuttosto che un n-polo. Se ad ogni coppia di morsetti diamo il nome di porta possiamo anche parlare di n-porta. Nel caso particolare abbiamo un quadri-porta con

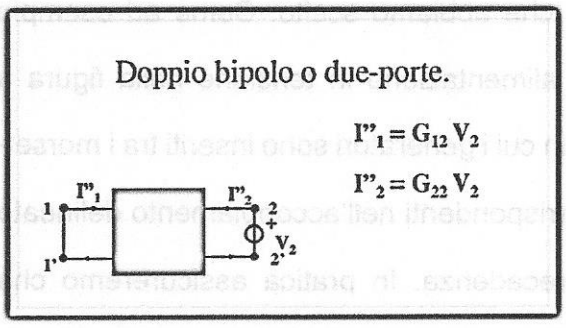
alimentazione in tensione.

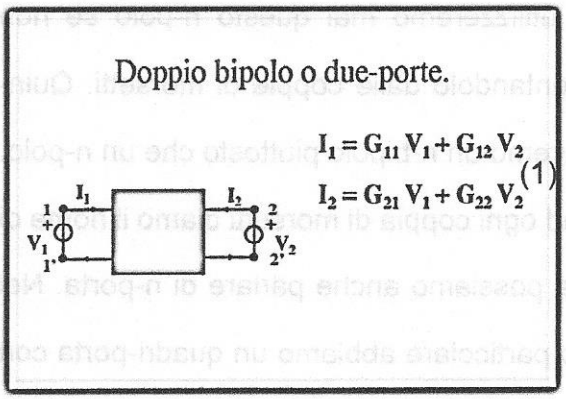
Non si deve pensare che N dell'n-polo sia necessariamente pari per ottenere un n-bipolo in quanto un morsetto può essere usato due volte.

Nel caso in figura a pagina precedente si veda come per N = 3 usando il morsetto 3 due volte sia per la porta 1 che per la porta 2 quindi alimentando con un generatore di tensione tra 1 e 3 e con un altro tra 2 e 3, otteniamo un doppio bipolo (o un due-porte). In pratica assicuriamo che la corrente entrante nel morsetto 1 è sempre uguale a parte della corrente che esce dal morsetto 3 e viceversa, cioè che la corrente uscente dal morsetto 3 è la somma delle correnti entranti nei morsetti 1 e 2. Per semplicità grafica faremo sempre riferimento ad un doppio bipolo (o due-porte, o n-bipolo) supponendolo alimentato in tensione.



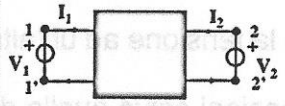




Poiché in esso ci sono tutti elementi lineari, per determinarne la caratteristica (il legame tra le correnti entranti nelle porte e le rispettive tensioni dei generatori che alimentano le singole porte) applichiamo la sovrapposizione degli effetti.

Quindi $I'_1$, quando agisce solo il generatore $V_1$, la frazione di corrente prodotta dal generatore $V_1$ nella porta 1 e nella porta 2; nel ramo inferiore non si segna la corrente poiché essa è la stessa. Queste correnti saranno proporzionali a $V_1$ poiché esso è l'unico generatore presente.

Doppio bipolo o due-porte.




$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} \qquad |I| = \|G\|\,|V| \qquad (2)$$

$$|I| = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} \qquad |V| = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$$

(3)

n-bipolo o n-porte.

$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} \dots G_{1s} \dots G_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ G_{r1} \dots G_{rs} \dots G_{rn} \\ \dots\dots\dots\dots \\ G_{n1} \dots G_{ns} \dots G_{nn} \end{vmatrix} \qquad |I| = \|G\|\,|V|$$

Definizioni.

$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} \dots G_{1s} \dots G_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ G_{r1} \dots G_{rs} \dots G_{rn} \\ \dots\dots\dots\dots \\ G_{n1} \dots G_{ns} \dots G_{nn} \end{vmatrix}$$

*Conduttanze proprie*

$$G_{rr} = \left.\frac{I_r}{V_r}\right|_{\substack{V_r = 0 \\ l \neq r}}$$

Definizioni.

$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} \dots G_{1s} \dots G_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ G_{r1} \dots G_{rs} \dots G_{rn} \\ \dots\dots\dots\dots \\ G_{n1} \dots G_{ns} \dots G_{nn} \end{vmatrix}$$

*Conduttanze mutue o improprie*

$$G_{rs} = \left.\frac{I_r}{V_s}\right|_{\substack{V_r = 0 \\ l \neq s}}$$

$I'_2$ sempre quando agisce solo il generatore $V_1$. Per l'uso del simbolo G abbiamo le dimensioni di una conduttanza essendo rapporti tra correnti e tensioni. E' chiaro che il simbolo $G_{11}$ ha un significato diverso da quello che aveva nel caso dell'n-polo.

Analogamente alimentando alla porta 2 con il generatore V2 abbiamo $I''_2$ e $I''_2$, il secondo contributo. Sommando otteniamo la relazione (1) fra le correnti entranti alle porte e le tensioni applicate alle singole porte. Anche in questo caso la caratteristica del dispositivo è rappresentata da una matrice delle conduttanze G poiché l'alimentazione è in tensione. E' sempre possibile utilizzare una rappresentazione matriciale di queste relazioni (vd. 2), affermando che il vettore colonna delle I è pari al prodotto della matrice G per il vettore colonna delle V. In (3) abbiamo il caso generale, con la matrice composta da $n^2$ elementi. E' stato usato n piccolo per il numero degli elementi per distinguerlo da N grande per indicare il numero di morsetti dell'N-polo.

Possiamo quindi ricavare delle definizioni dalla matrice delle conduttanze: le conduttanze proprie, quelle della diagonale della matrice.

La conduttanza propria sarà il rapporto tra la

corrente entrante in una porta con la tensione alla stessa porta quando tutte le altre porte sono cortocircuitate, cioè i generatori sono stati eliminati e sostituiti con cortocircuiti.

Avremo poi le conduttanze mutue, o improprie, fuori della diagonale, pari al rapporto tra la corrente ad una porta e la tensione ad un'altra porta quando tutte le tensioni salvo quella del denominatore sono state poste uguali a zero.

Il termine "improprio" indica che pur essendo dimensionalmente delle conduttanze, in realtà non sono conduttanze di un bipolo equivalente perchè la corrente è di una porta e la tensione di un'altra porta.

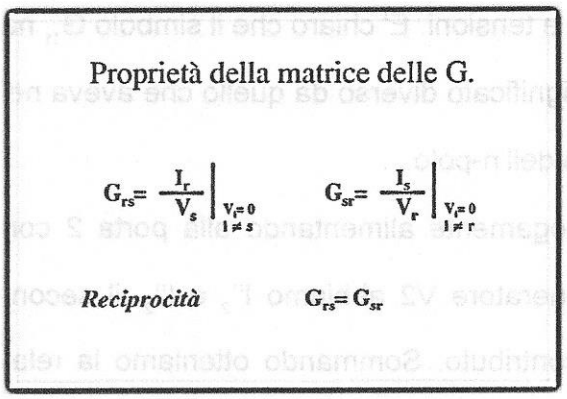
Per quanto riguarda le proprietà abbiamo analogia con l'N-polo.

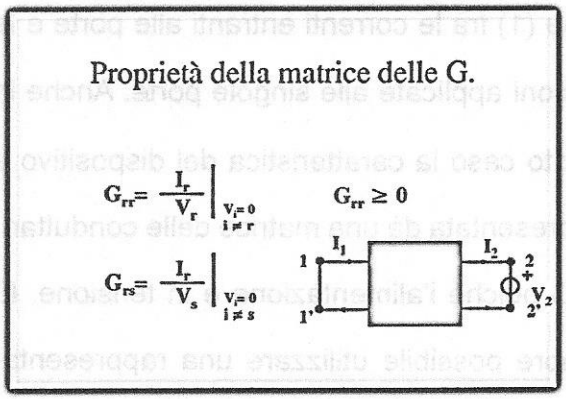
Per la reciprocità la matrice è simmetrica: gli elementi fuori diagonale sono uguali.

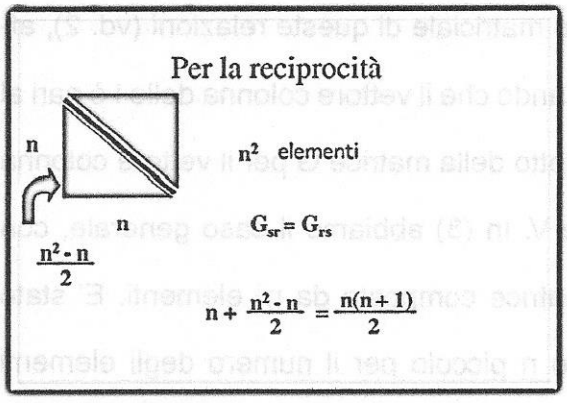
Il segno di $G_{rr}$ deve essere positivo, quello delle $G_{rs}$ non si può dire.

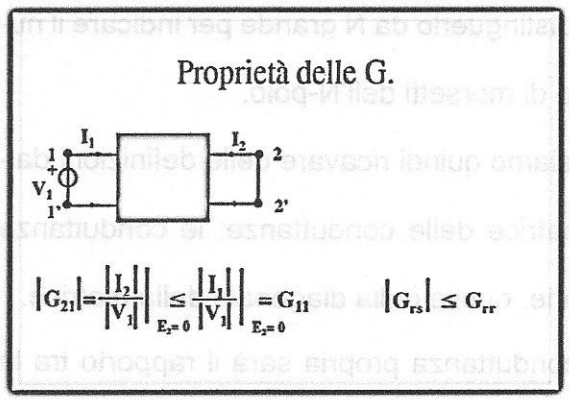
Una proprietà utile è $|G_{21}| \leq G_{11}$.

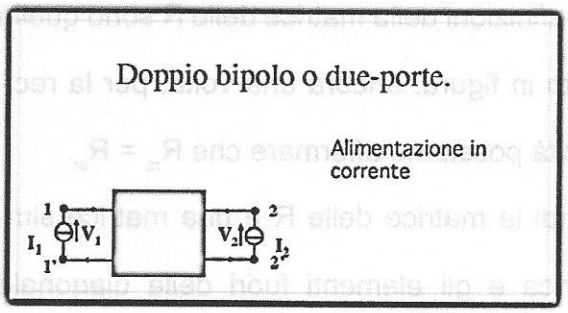
Per il doppio bipolo a due porte è possibile concepire di pilotarlo in corrente, cioè di inserire alla porta primaria e alla porta secondaria due generatori di corrente invece di due generatori di tensione. Questo perché non c'è più, come nel caso dell'N-polo un morsetto comune nel quale tutti i morsetti dei generatori devono confluire. Questo ci imponeva il non poterlo alimentare in corrente in quanto le n



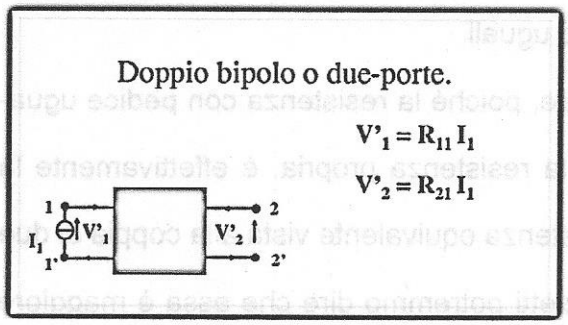



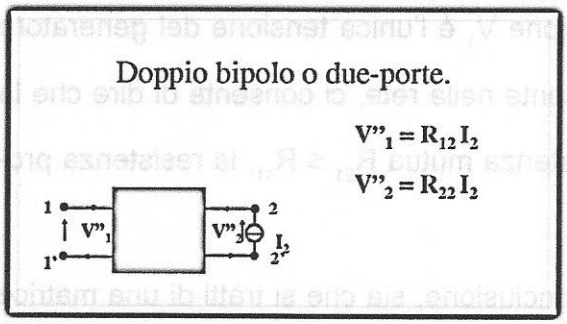



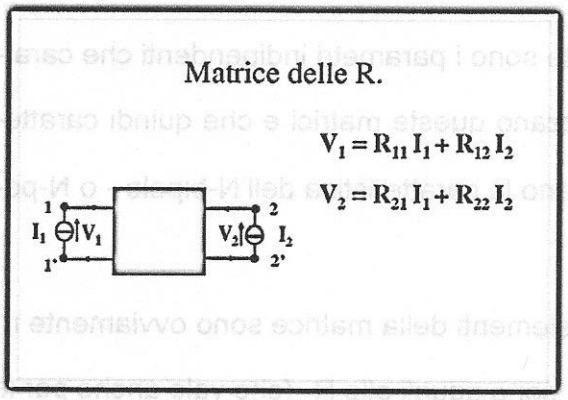



correnti non potevano essere arbitrarie. Mentre in questo caso le corrente $I_1$ e $I_2$ sono arbitrarie perché i morsetti 1 e 1' e 2 e 2' non sono necessariamente in comune.




Quindi è possibile anche una alimentazione in corrente che dà luogo ad un discorso analogo a quello fatto per l'alimentazione in tensione potendo applicare la sovrapposizione degli effetti supponendo i bipoli lineari. Avremo che le tensioni alle porte primarie e secondarie si ottengono come sovrapposizione dell'effetto della tensione prodotta dalla corrente $I_1$ imposta al primario sulla porta primaria quando il secondario è aperto (aperto perché è un generatore di corrente, quindi va aperto, non cortocircuitato come nel caso del generatore di tensione) e $V'_2$ è la tensione ai morsetti 2 e 2' alla porta secondaria per effetto della presenza del generatore di corrente $I_1$ alla porta primaria. Cosa analoga si può dire inserendo un generatore di corrente $I_2$ alla porta secondaria ed ottenere i contributi alle tensioni alle porte primarie e secondarie dovute appunto a questa corrente. A questo punto per la sovrapposizione possiamo sommare i due effetti ed ottenere la caratteristica del doppio bipolo quando è alimentato in corrente. Abbiamo in pratica la matrice delle R; essa può caratterizzare il doppio bipolo come in precedenza abbiamo fatto con la matrice delle G.



**Proprietà della matrice delle R.**

$$R_{rs}=\left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i=0\\ i\neq s}} \qquad R_{sr}=\left.\frac{V_s}{I_r}\right|_{\substack{I_i=0\\ i\neq r}}$$

*Reciprocità* $R_{rs}=R_{sr}$

Le definizioni della matrice delle R sono quelle a lato in figura. ancora una volta, per la reciprocità possiamo affermare che $R_{rs} = R_{sr}$.

Quindi la matrice delle R è una matrice simmetrica e gli elementi fuori della diagonale sono uguali.

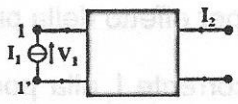
**Proprietà della matrice delle R.**

$$R_{rr}=\left.\frac{V_r}{I_r}\right|_{\substack{I_i=0\\ i\neq r}} \qquad R_{rr}\geq 0$$

$$R_{rs}=\left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i=0\\ i\neq s}}$$

Inoltre, poiché la resistenza con pedice uguale , la resistenza propria, è effettivamente la resistenza equivalente vista alla coppia di due morsetti potremmo dire che essa è maggiore o uguale a zero.

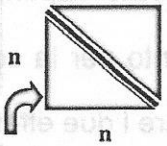
**Proprietà della matrice delle R.**




$$|R_{21}|=\left|\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}\leq\left|\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=R_{11} \qquad |R_{rs}|\leq R_{rr}$$

Poi, applicando in continua, il teorema di non amplificazione delle tensioni (questa volta), che ci consente di dire che $V_1 > V_2$ perché la tensione $V_1$ è l'unica tensione del generatore presente nella rete, ci consente di dire che la resistenza mutua $R_{21} \leq R_{11}$, la resistenza propria.

**Per la reciprocità**




$n^2$ elementi

$R_{sr} = R_{rs}$

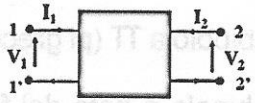
$\frac{n^2-n}{2}$

$$n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

In conclusione, sia che si tratti di una matrice delle G o una matrice delle R, vediamo ora quale sono i parametri indipendenti che caratterizzano queste matrici e che quindi caratterizzano la caratteristica dell'N-bipolo - o N-polo.

Gli elementi della matrice sono ovviamente $n_2$ però la relazione di reciprocità ci dice che le $R_{sr}$ sono uguali alle $R_{rs}$ (che vale anche per le conduttanze). Questo ci dice che gli elementi dei triangoli sono ricavabili l'uno dall'altro.

Doppio bipolo o due-porte.




$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} \qquad \|R\| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}$$

Doppio bipolo o due-porte.

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & G_{12} \\ I_2 & G_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}}$$

$$I_1 = G_{11} V_1 + G_{12} V_2$$
$$I_2 = G_{21} V_1 + G_{22} V_2$$
$$V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2$$
$$V_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2$$

Doppio bipolo o due-porte.

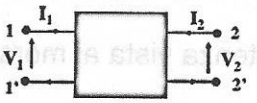
$$R_{11} = \frac{G_{22}}{G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21}}$$

$$I_1 = G_{11} V_1 + G_{12} V_2$$
$$I_2 = G_{21} V_1 + G_{22} V_2$$
$$V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2$$
$$V_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2$$

In generale.

$$R_{rs} = \frac{|G_{rs}|}{|G|} \qquad G_{rs} = \frac{|R_{rs}|}{|R|}$$

Doppio bipolo o due-porte.




$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} & G_m \\ G_m & G_{22} \end{vmatrix} \qquad \|R\| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_m \\ R_m & R_{22} \end{vmatrix}$$

Tre parametri indipendenti!

Alla fine gli elementi indipendenti che posso imporre per una matrice delle G o delle R di un N-bipolo sono n(n + 1) / 2 .

Qualunque sia la rappresentazione del N-bipolo, possiamo pensare di passare dalla matrice delle G alla matrice delle R. Questo perché entrambe rappresentano l'N-bipolo quindi è possibile ricavarle le une dalle altre.

Fare attenzione al fatto che $G_{11}$ non è $1/R_{11}$. Per una questione di geometria del circuito. La relazione di equivalenza si ottiene usando la regola di Cramer per le matrici.

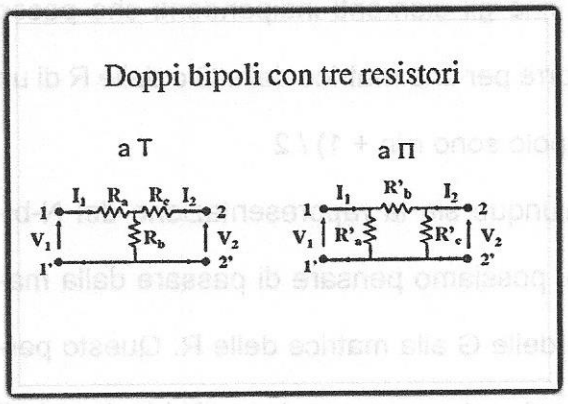
Si noti che $G_{22}$ è il minore complementare del posto $X_{11}$ e quindi in generale potremmo dire che la $R_{rs}$ è uguale a $G_{rs}$, il minore aggiunto, diviso per il determinante della G.

In maniera del tutto analoga il calcolo di $G_{rs}$.

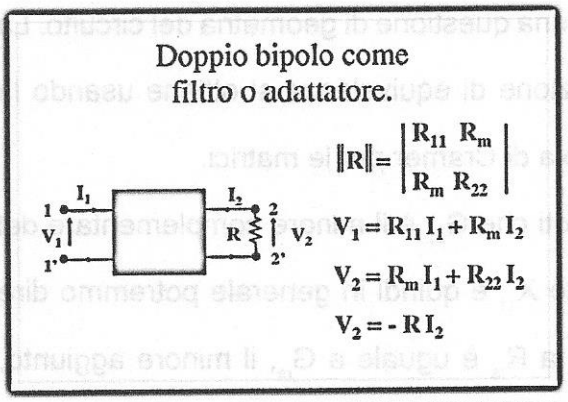
E' evidente che per caratterizzare una matrice delle G o delle R per un doppio bipolo c'è bisogno di soltanto tre parametri indipendenti, $G_{11}$, $G_{22}$ e $G_m$. Oppure $R_{11}$, $R_{22}$, $R_m$.

Questo ci fa pensare che con tre resistori collegati tra di loro si possa sintetizzare qualsiasi tipo di doppio bipolo. Questo è vero al 50%, perché con tre resistori si possono ottenere due diversi tipi di doppi bipoli.

Un doppio bipolo che chiameremo doppio bi-

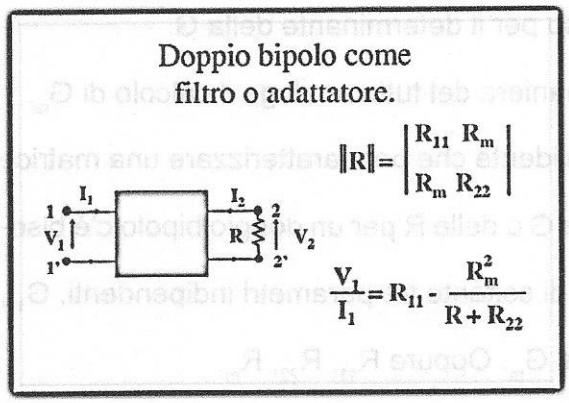


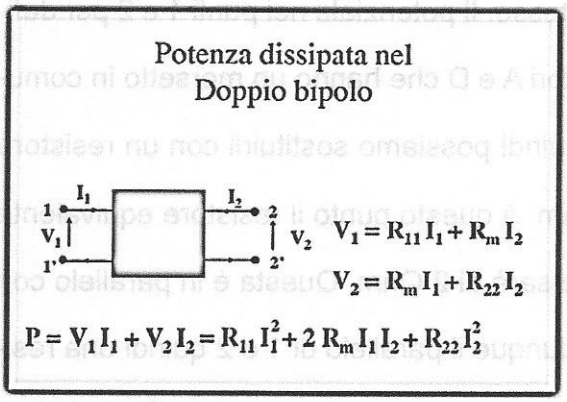

polo a T, o a stella, in cui i tre resistori sono collegati come da figura, a sinistra; oppure, a destra, si potrebbe dire a triangolo, anche se prende il nome di doppio bipolo a TT (pi greco). L'interesse per il doppio bipolo è dato dal fatto che esso è un utile dispositivo da inserire tra due parti di una rete: un porta di ingresso, immaginata collegata ad una parte della rete, e una porta di uscita collegata ad un'altra parte della rete.

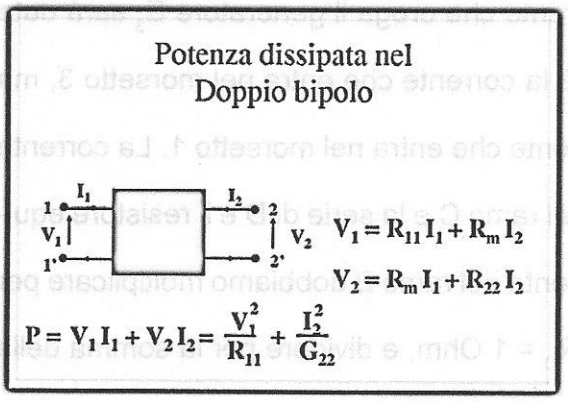



Una applicazione molto frequente è quella di usare il doppio bipolo come filtro o come adattatore.

In pratica si immagina di aver inserito alla porta secondaria di un doppio bipolo caratterizzato dalla matrice delle resistenze a lato in figura, un resistore R. Calcoliamo la resistenza vista ai morsetti 1 1': l'equazione che caratterizza il bipolo inserito tra i morsetti è $V_2 = - RI_2$. Il segno meno perché avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore alla porta secondaria automaticamente abbiamo fatto sul resistore $R_2$ una convenzione del generatore. La corrente nel resistore è entrante dal morsetto che è caratterizzato dalla coda della freccia che indica il verso positivo per la tensione $V_2$. Eguagliando le due equazioni relative a $V_2$ otteniamo $I_2$ in funzione di $I_1$ e sostituirlo nella prima equazione. Quindi otteniamo una relazione in cui compaiono solo la $V_1$ e la $I_1$. Facendo il rapporto otteniamo la resistenza vista ai morsetti 1 1' di questo sistema, cioè il doppio bipolo con la porta secondaria chiusa sulla resistenza



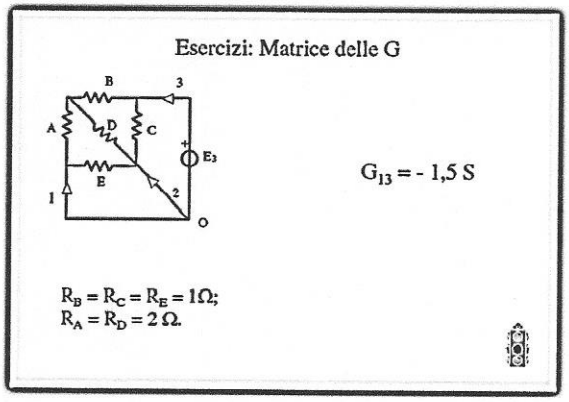



R.

Vediamo la potenza assorbita dal doppio bipolo, calcolando le potenze assorbite alle due porte: cioè $P = V_1 I_1 + V_2 I_2$. Sostituendo le tensioni con i valori in funzione delle resistenze e delle correnti ricaviamo una ulteriore relazione.

Con una serie di passaggi un po' più complessi di questi si può dimostrare un'altra formula, a lato in figura. Ricordando che $R_{11}$ si calcola per definizione aprendo la porta secondaria (perché la matrice delle R prevede una alimentazione in corrente) e quindi $R_{11}$ è la corrente vista dalla porta primaria quando il secondario è aperto per cui $V^2_1 / R_{11}$ può essere vista come la potenza alla porta primaria a vuoto. Il secondo termine della somma, $I^2_1 / G_{11}$, per analogia può essere visto come la potenza assorbita alla porta secondaria quando la primaria è in corto circuito. Per questo motivo, il secondo tipo dell'espressione della potenza viene detto potenza espressa come somma di potenza a vuoto e potenza in cortocircuito.




Vediamo ora la soluzione ad un esercizio proposto, in cui si tratta di calcolare il parametro $G_{13}$ del tripolo in figura.

Si tratta di un circuito a ponte visto come un tripolo. Verranno messi a potenziale rispetto al punto O i morsetti 1, 2 e 3. Per calcolare la $G_{13}$ occorre alimentare solo il morsetto 3 e collegare al morsetto di riferimento i nodi 1 e 2. Il calcolo è facile, notando che la resistenza

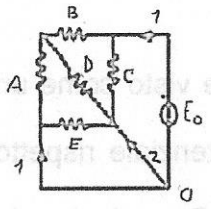
$R_e$ è cortocircuitata e quindi è come se non esistesse. Il potenziale nei punti 1 e 2 per definizione è lo stesso. Questo significa che i resistori A e D che hanno un morsetto in comune, quello in alto a sinistra, sono in parallelo, quindi possiamo sostituirli con un resistore equivalente di 1 Ohm, dato che $R_A = R_D = 2$ Ohm. A questo punto il resistore equivalente è in serie con $R_B$ che è di 1 Ohm quindi la serie sarà di 2 Ohm. Questa è in parallelo con il resistore $R_C$ di 1 Ohm. Il generatore $E_3$ vede dunque il parallelo di 1 e 2 quindi una resistenza di 2/3 Ohm. Questo significa che la corrente che eroga il generatore $E_3$ sarà data da $E_3$ diviso la resistenza di 2/3 Ohm. Questa è la corrente che entra nel morsetto 3, ma per calcolare la $G_{13}$ abbiamo bisogno della corrente che entra nel morsetto 1. La corrente che entra nel morsetto 3 la possiamo ripartire nel ramo C e la serie di D e il resistore equivalente al parallelo di A e D. Se vogliamo la corrente del ramo B dobbiamo moltiplicare per la corrente del ramo opposto, moltiplicare per $R_C = 1$ Ohm, e dividere per la somma della serie di B e A+D in parallelo pari a 2 Ohm. Quindi moltiplicare per 1 e dividere per 2 + 1. Quindi per 3.

$E_3 = 3/2 \ \ 1/3 = 1/2$

Questa corrente si ripartisce nei due rami A e D in parallelo che sono due rami di resistenza uguale quindi la corrente si ripartisce in parti uguali. Quindi la corrente nel ramo A, che coincide a meno del segno, con la corrente entrante nel ramo del nodo 1, perché il resistore $R_E$ è come se non ci fosse, basta che divida il risultato $E_3$ per 2 e ottengo $-I_1 = -1/4$

Quindi $G_{13} = -0.25$ S (Siemens).

Esercizi: Matrice delle G

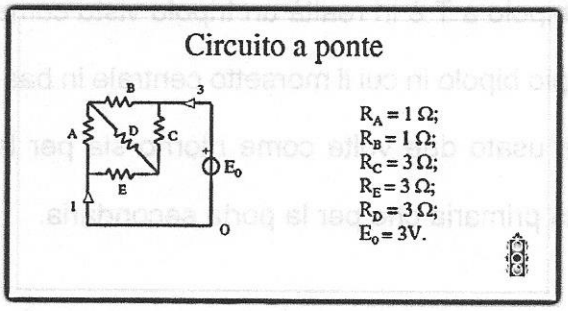



$$E_3 \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{2} = -I_1$$

$R_B = R_C = R_E = 1\Omega$;
$R_A = R_D = 2\ \Omega$.

$G_{13} = -0.25$ S

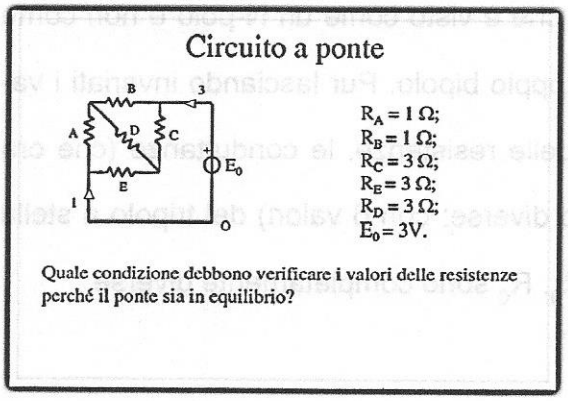
Il circuito a ponte ha una proprietà interessante, usata negli strumenti di misura.




Proviamo in laboratorio a misurare la corrente che circola nel ramo diagonale e poi cambiare alcuni valori dei parametri.

Da una successiva misurazione notiamo che è diminuita. Facendolo ancora troviamo valori diversi. Questo per dimostrare che la corrente nel ramo diagonale viene azzerata dalla modifica del valore di uno degli altri resistori. Quando cioè tra le resistenze dei lati del ponte esiste una certa relazione.

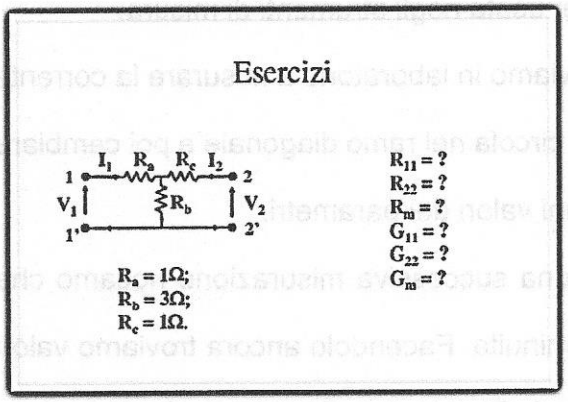
Se abbiamo una resistenza incognita e modificandone un'altra possiamo ricavare la relazione che rende nulla la corrente nel ramo diagonale, che è detta condizione di equilibrio.



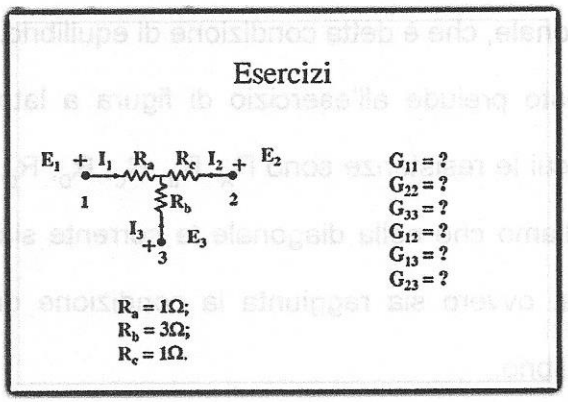

Questo prelude all'esercizio di figura a lato per cui le resistenze sono $R_A$, $R_B$, $R_C$, $R_D$, $R_E$. Vogliamo che nella diagonale la corrente sia nulla, ovvero sia raggiunta la condizione di equilibrio.

Avremo a questo punto un ponte di misura che prende il nome di ponte di Wheastone. Nella prossima lezione dimostreremo la condizione.

16.11




Abbiamo poi due esercizi, in cui il primo doppio bipolo a T è in realtà un tripolo visto come doppio bipolo in cui il morsetto centrale in basso è usato due volte come ritorno sia per la porta primaria che per la porta secondaria.




Questo è in pratica lo stesso circuito di prima. solo che è visto come un N-polo e non come un doppio bipolo. Pur lasciando invariati i valori delle resistenze, le conduttanze (che ora sono diverse: con 6 valori) del tripolo a stella $R_{RA}$, $R_B$, $R_C$ sono completamente diverse.

RIEPILOGO DELLA LEZIONE 16

- n-bipoli o n-porte;
- Matrice delle G e delle R;
- Doppi bipoli a T o a Π;
- Doppi bipoli come adattatori;
- Potenza assorbita da un doppio bipolo
- Esercizi.

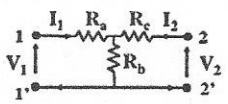
LEZIONE 17

# Altre rappresentazioni dei doppi bipoli

Prof. Luciano De Menna
44'04"

Doppi bipoli a T o a pi-greco: formule
Altre rappresentazioni dei doppi bipoli: parametri ibridi
Matrice di trasmissione
Esercizi
Ponte in equilibrio

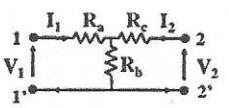
## Matrice delle R per il doppio bipolo a T




$$R_{11} = R_a + R_b$$
$$R_{22} = R_c + R_b$$
$$R_m = R_b$$

$$R_{rs} = \left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i = 0 \\ i \neq s}}$$

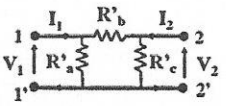
## Matrice delle G per il doppio bipolo a T




$$G_{11} = \frac{1}{R_a + \frac{R_b R_c}{R_b + R_c}}$$
$$G_{22} = \frac{1}{R_c + \frac{R_b R_a}{R_b + R_a}}$$
$$G_m = -\frac{R_b}{R_a (R_b + R_c) + R_b R_c}$$

$$G_{rs} = \left.\frac{I_r}{V_s}\right|_{\substack{V_i = 0 \\ i \neq s}}$$

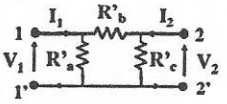
## Matrice delle R per il doppio bipolo a Π




$$R'_{11} = \frac{R'_a (R'_b + R'_c)}{R'_a + R'_b + R'_c}$$
$$R'_{22} = \frac{R'_c (R'_b + R'_a)}{R'_a + R'_b + R'_c}$$
$$R'_m = \frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c}$$

$$R_{rs} = \left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i = 0 \\ i \neq s}}$$

## Matrice delle G per il doppio bipolo a Π



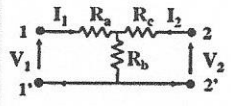

$$G'_{11} = \frac{R'_a + R'_b}{R'_a R'_b}$$

$$G'_{22} = \frac{R'_c + R'_b}{R'_c R'_b}$$

$$G'_m = -\frac{1}{R'_b}$$

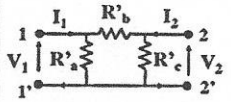
$$G_{rs} = \left.\frac{I_r}{V_s}\right|_{\substack{V_i = 0 \\ i \neq s}}$$

## Il segno delle mutue!




$$R_m = R_b$$

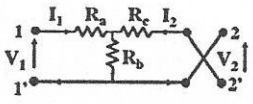
$$G_m = -\frac{R_b}{R_a (R_b + R_c) + R_b R_c}$$




$$R'_m = \frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c}$$

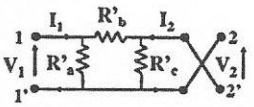
$$G'_m = -\frac{1}{R'_b}$$

## Inversione dei morsetti




$$R_m = -R_b$$

$$G_m = \frac{R_b}{R_a (R_b + R_c) + R_b R_c}$$



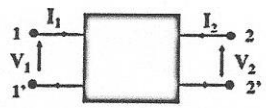

$$R'_m = -\frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c}$$

$$G'_m = \frac{1}{R'_b}$$

## I parametri ibridi h.

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

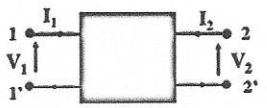



$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2 = 0} \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1 = 0}$$

## I parametri ibridi h.

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$



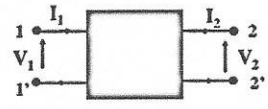

$$h_{12} = - h_{21}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1 = 0} \qquad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2 = 0}$$

## I parametri ibridi g.

$$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2$$

$$V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2$$

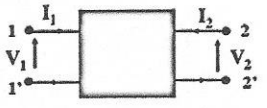



$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2 = 0} \qquad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1 = 0}$$

## I parametri ibridi g.

$$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2$$

$$V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2$$

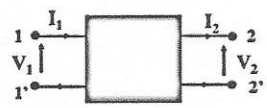



$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1 = 0} \qquad g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2 = 0}$$

## La matrice di trasmissione.

$$V_1 = t_{11} V_2 + t_{12} I_2$$

$$I_1 = t_{21} V_2 + t_{22} I_2$$

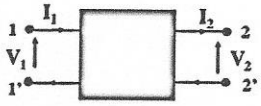



$$t_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2 = 0} \qquad t_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2 = 0}$$

## La matrice di trasmissione.

$$V_1 = t_{11} V_2 + t_{12} I_2$$

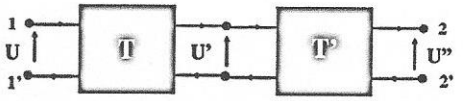
$$I_1 = t_{21} V_2 + t_{22} I_2$$




$$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

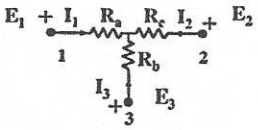
$$U' = T\,U$$

## La matrice di trasmissione.




$$\begin{cases} U = T\,U' \\ U' = T'\,U'' \end{cases} \Longrightarrow U = TT'\,U''$$

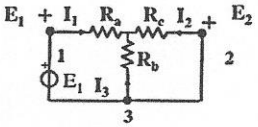
## Esercizi




$R_a = 1\Omega;$
$R_b = 3\Omega;$
$R_c = 1\Omega.$

$G_{11} = ?$
$G_{22} = ?$
$G_{33} = ?$
$G_{12} = ?$
$G_{13} = ?$
$G_{23} = ?$

## Esercizi

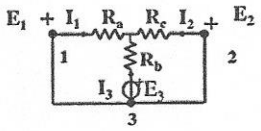



$R_a = 1\Omega;$
$R_b = 3\Omega;$
$R_c = 1\Omega.$

$$G_{11} = \left.\frac{I_1}{E_1}\right|_{\substack{E_i = 0 \\ i \neq 1}}$$

$G_{11} = 0{,}57\ S$
$G_{22} = 0{,}57\ S$
$G_{33} =$
$G_{12} =$
$G_{13} =$
$G_{23} =$

## Esercizi

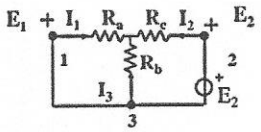



$G_{11} = 0{,}57\ S$
$G_{22} = 0{,}57\ S$
$G_{33} = 0{,}28\ S$
$G_{12} =$
$G_{13} =$
$G_{23} =$

$R_a = 1\Omega;$
$R_b = 3\Omega;$
$R_c = 1\Omega.$

$$G_{33} = \left.\frac{I_3}{E_3}\right|_{\substack{E_i = 0 \\ i \neq 3}}$$

## Esercizi

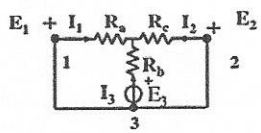



$G_{11} = 0{,}57\ S$
$G_{22} = 0{,}57\ S$
$G_{33} = 0{,}28\ S$
$G_{12} = -0{,}43\ S$
$G_{13} =$
$G_{23} =$

$R_a = 1\Omega;$
$R_b = 3\Omega;$
$R_c = 1\Omega.$

$$G_{12} = \left.\frac{I_1}{E_2}\right|_{\substack{E_i = 0 \\ i \neq 2}}$$

## Esercizi

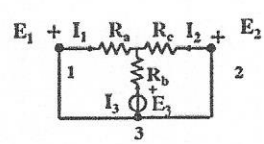



$G_{11} = 0{,}57\ S$
$G_{22} = 0{,}57\ S$
$G_{33} = 0{,}28\ S$
$G_{12} = -0{,}43\ S$
$G_{13} = -0{,}14\ S$
$G_{23} =$

$R_a = 1\Omega;$
$R_b = 3\Omega;$
$R_c = 1\Omega.$

$$G_{13} = \left.\frac{I_1}{E_3}\right|_{\substack{E_i = 0 \\ i \neq 3}}$$

## Esercizi

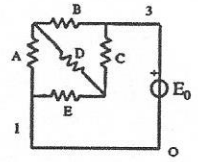



$G_{11} = 0{,}57\ S$
$G_{22} = 0{,}57\ S$
$G_{33} = 0{,}28\ S$
$G_{12} = -0{,}43\ S$
$G_{13} = -0{,}14\ S$
$G_{23} = -0{,}14\ S$

$R_a = 1\Omega;$
$R_b = 3\Omega;$
$R_c = 1\Omega.$

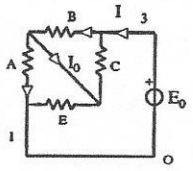
$$G_{23} = \left.\frac{I_2}{E_3}\right|_{\substack{E_i = 0 \\ i \neq 3}}$$

## Circuito a ponte




$R_A = 1\ \Omega$;
$R_B = 1\ \Omega$;
$R_C = 3\ \Omega$;
$R_E = 3\ \Omega$;
$R_D = 3\ \Omega$;
$E_0 = 3V$.

## Circuito a ponte



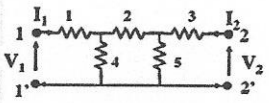

$R_A = 1\ \Omega$;
$R_B = 1\ \Omega$;
$R_C = 3\ \Omega$;
$R_E = 3\ \Omega$;
$R_D = 3\ \Omega$;
$E_0 = 3V$.

$$I_B = I\frac{R_C}{R_B + R_C}$$

$$I_A = I\frac{R_E}{R_A + R_E}$$

$$\Longrightarrow \quad R_B R_E = R_A R_C$$

## Esercizi:
## Matrice delle R e delle G



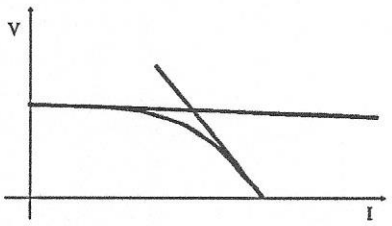
LEZIONE 18

# Generatori pilotati e amplificatori operazionali

Prof. Luciano De Menna
46'28"

Generatori pilotati
Amplificatore operazionale
Nullatore o noratore
Circuiti equivalenti
Esercizi

## I generatori ideali e quelli reali!

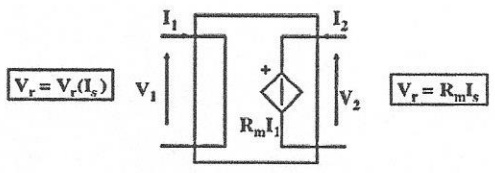



## Generatori Pilotati



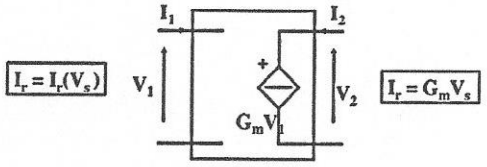
Generatore di Tensione | Generatore di Corrente

## Generatori di tensione
## Pilotato in corrente




GTPC
$R_m$= transresitenza

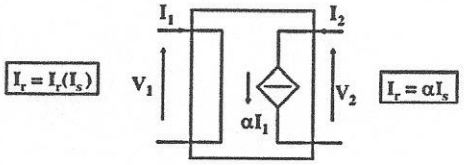
## Generatori di corrente
## Pilotato in tensione




**GCPT**

**$G_m$= transconduttanza**

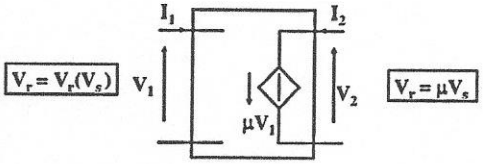
## Generatori di corrente
## Pilotato in corrente




**GCPC**

**$\alpha$ = rapporto di trasferimento di corrente**

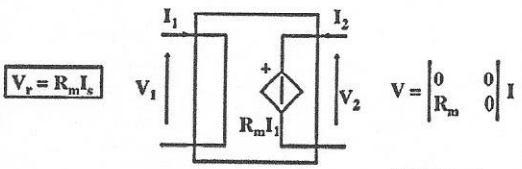
## Generatori di tensione
## Pilotato in tensione




**GTPT**

**$\mu$ = rapporto di trasferimento di tensione**

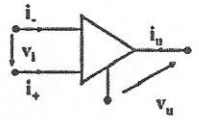
## Generatori di tensione
## Pilotato in corrente




**GTPC**

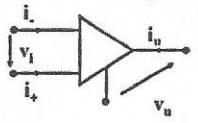
$R_{12} \neq R_2$

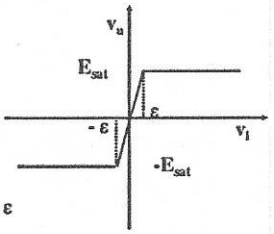
## Amplificatori operazionali




$$\begin{cases} i_- = I_- \\ i_+ = I_+ \\ v_u = f(v_i) \end{cases} \qquad v_u = \begin{cases} E_{sat} & v_i \geq \varepsilon \\ \frac{E_{sat}}{\varepsilon}\, v_i = A\, v_i & -\varepsilon < v_i < \varepsilon \\ -E_{sat} & v_i \leq -\varepsilon \end{cases}$$

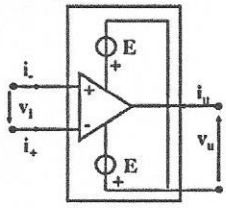
## Amplificatori operazionali



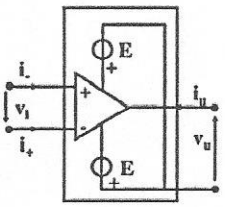




$$v_u = \begin{cases} E_{sat} & v_i \geq \varepsilon \\ \frac{E_{sat}}{\varepsilon}\, v_i = A\, v_i & -\varepsilon < v_i < \varepsilon \\ -E_{sat} & v_i \leq -\varepsilon \end{cases}$$

## Amplificatori operazionali a cinque morsetti



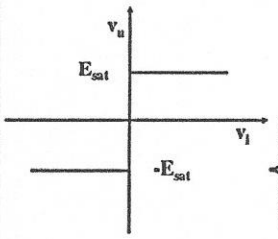

## Amplificatori operazionali ideali




$i_- = i_+ = 0; \qquad A = \infty$

$$\begin{cases} i_- = i_+ = 0 \\ v_u = E_{sat}\, sig(v_i) & \text{per } v_i \neq 0 \\ -E_{sat} < v_u < E_{sat} & \text{per } v_i = 0 \end{cases}$$

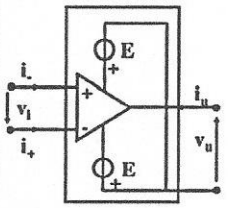
## Amplificatori operazionali ideali




$i_- = i_+ = 0; \quad A = \infty$

$\begin{cases} i_- = i_+ = 0 \\ v_u = E_{sat}\,\mathrm{sig}(v_i) \quad \text{per } v_i \neq 0 \\ -E_{sat} < v_u < E_{sat} \quad \text{per } v_i = 0 \end{cases}$

## Amplificatori operazionali nella zona di linearità




$i_- = i_+ = 0; \quad A = \infty$

$\begin{cases} i_- = i_+ = 0 \\ v_i = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} v_u = \text{qualsiasi valore} \\ i_u = \text{qualsiasi valore} \end{cases}$

## Nullatore e Noratore

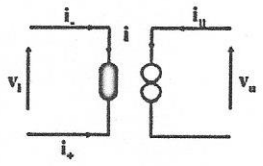



**Nullatore** $\begin{cases} v = 0 \\ i = 0 \end{cases}$




**Noratore** $\begin{cases} v = \text{qualsiasi} \\ i = \text{qualsiasi} \end{cases}$

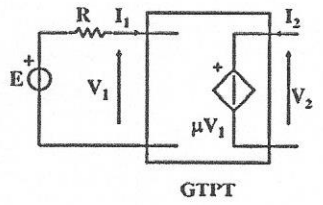
## Circuito equivalente dell'Operazionale ideale



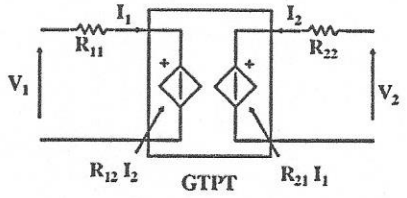

$\begin{cases} v_i = 0 \\ i_- = i_+ = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} v_u = \text{qualsiasi} \\ i_u = \text{qualsiasi} \end{cases}$

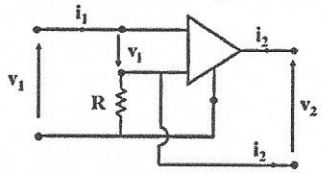
## Altri circuiti equivalenti




## Altri circuiti equivalenti



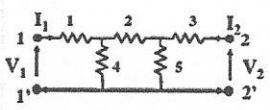

## Altri circuiti equivalenti




$$v_1 + R\, i_2 + v_i = 0$$

$$i_2 = -\frac{1}{R}\left(v_1 + v_i\right) = -\frac{1}{R}\left(v_1 + \frac{v_u}{A}\right) = -\frac{1}{R}v_1$$

## Esercizi:
## Matrice delle R e delle G



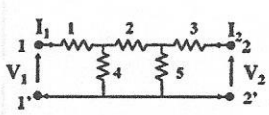

$$R_{rs} = \left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i = 0 \\ i \neq s}}$$

$$R_{11} = \frac{(R_2 + R_5)\,R_4}{R_2 + R_5 + R_4} + R_1$$

$$R_{22} = \frac{(R_2 + R_4)\,R_5}{R_2 + R_5 + R_4} + R_3$$

$$R_m = \frac{R_5 R_4}{R_2 + R_5 + R_4}$$

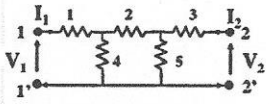
## Esercizi:
## Matrice delle R e delle G



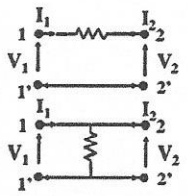

$$G_{11} = \left[ \frac{(R_e + R_2)\, R_4}{R_2 + R_e + R_4} + R_1 \right]^{-1} \qquad R_e = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5}$$

$$G_{rs} = \left. \frac{I_r}{V_s} \right|_{\substack{V_i = 0 \\ i \neq s}} \qquad G_m = \frac{-R_4 R_5 / (R_3 + R_5)}{(R_2 + R_e + R_4) R_1 + (R_2 + R_e) R_4}$$

## Esercizi:
## Matrici ibride e di trasmissione




## Esercizi:
## Rappresentazioni possibili



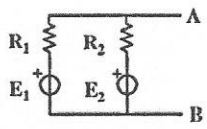

## Esercizi:
## Condizioni di fisica realizzabilità

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Delle seguenti matrici R di un doppio bipolo, quale non soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità e perché?

## Esercizi:




**Determinare la d.d.p. tra I morsetti A e B**

LEZIONE 19

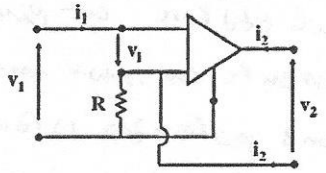
# Bipoli in regime dinamico

Prof. Luciano De Menna
44'08"

Ancora un circuito equivalente
Bipoli in regime dinamico
Condensatori ed induttori
Energia immagazzinata
Equazioni di Kirchhoff
Serie e parallelo di L e C
Esercizi

Le grandezze che variano nel tempo sono indicate con lettere minuscole: v per la tensione e i per la corrente.
V e I sono tensione e corrente in regime continuo, cioè costanti nel tempo.

## Altri circuiti equivalenti

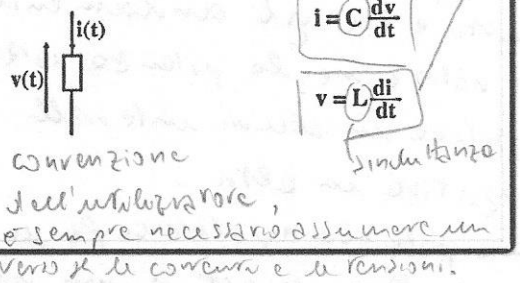



$$v_1 + R\, i_2 + v_i = 0$$

$$i_2 = -\frac{1}{R}(v_1 + v_i) = -\frac{1}{R}\left(v_1 + \frac{v_u}{A}\right) = -\frac{1}{R} v_1$$

La corrente è proporzionale alla derivata della tensione
La tensione è proporzionale alla derivata della corrente

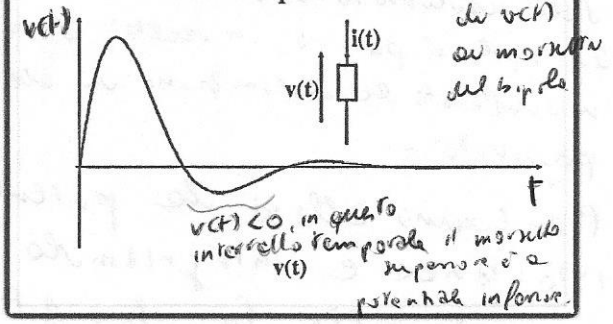
## Nuovi bipoli lineari




convenzione dell'utilizzatore, è sempre necessario assumere un verso per la corrente e la tensione.

Assumiamo che la tensione e la corrente possano variare nel tempo, mentre prima erano costanti (regime in corrente continua). La variazione sarà con leggi sinusoidali.
Per descrivere l'andamento della corrente e della tensione parleremo di forma d'onda, della corrente e della tensione.
Si possono introdurre dei nuovi bipoli, in quanto la derivazione rispetto al tempo della tensione in un caso e della corrente nell'altro è una operazione lineare.

## Nuovi bipoli lineari



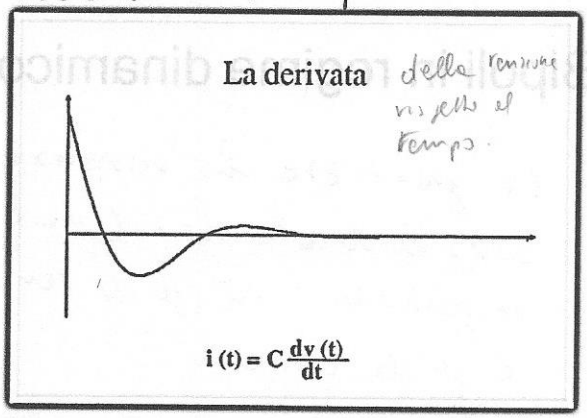

Andamento di v(t) ai morsetti del bipolo

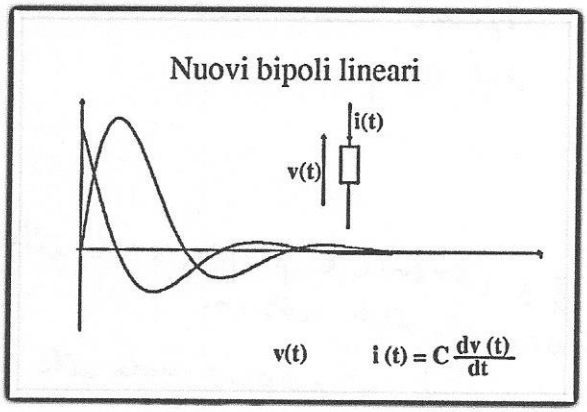
v(t) < 0, in questo intervallo temporale il morsetto superiore è a potenziale inferiore.

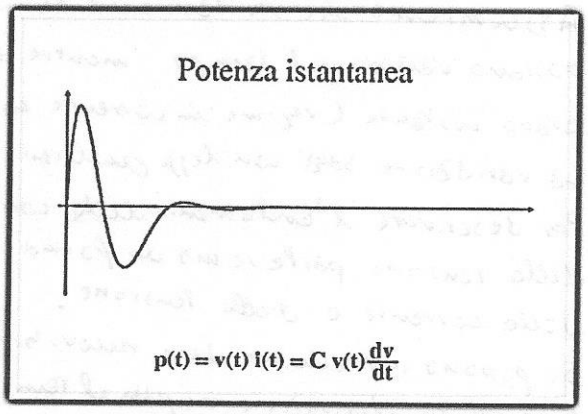
$v(t) > 0$ => verso concorde alla convenzione, il morsetto superiore del bipolo è a potenziale maggiore del morsetto inferiore

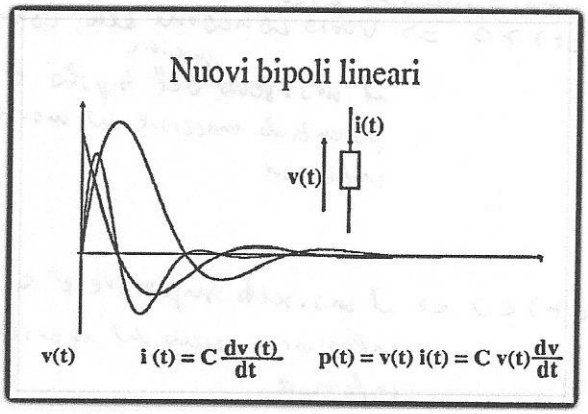
$v(t) < 0$ => il morsetto superiore è a potenziale inferiore e quello del morsetto inferiore

La presenza dell'operazione di derivazione comporta delle particolarità di questo bipolo.
Si suppone che l'andamento della tensione del bipolo sia v(t) e che la caratteristica del bipolo sia corrente proporzionale alla derivata della tensione, secondo un fattore denominato C.
A lato la derivata della tensione vista prima e, nella figura sottostante entrambe.
La derivata della tensione rappresenta la corrente nel bipolo in questione.
La derivata è positiva quando la funzione è crescente, si annulla quando la funzione ha un massimo, è negativa quando la funzione è decrescente ecc.
Questo bipolo, con la convenzione dell'utilizzatore, con questa tensione questa corrente ai suoi morsetti, assorbe una potenza istantanea, istantanea perché varia v e v nel tempo, il loro prodotto varia nel tempo.
La potenza istantanea p(t) è
$p(t) = v(t)\, i(t) = C\, v(t) \frac{dv}{dt}$.
A lato l'andamento della potenza istantanea e, sotto, tutte e tre gli andamenti.
Si nota come la potenza istantanea sia positiva in alcuni intervalli e sia negativa in altri.
Una potenza negativa ci fa pensare a un comportamento attivo, non passivo, del bipolo (avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore).
Il bipolo è passivo, in realtà; deve essere modificata la definizione di attività e passività.
Prendiamo allora la potenza istantanea e integriamola in un intervallo $t_0$, $t_0 + \Delta t$

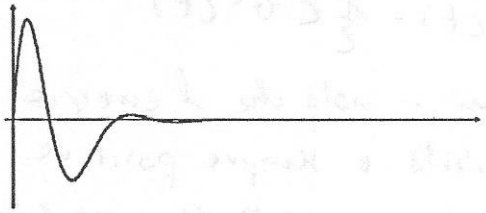


Potenza istantanea



$$p(t) = \frac{1}{2} C \frac{dv^2}{dt}$$

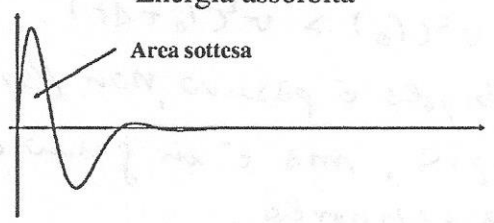
Tale integrale rappresenta l'energia assorbita (convenzione dell'utilizzatore) dal bipolo nell'intervallo di tempo considerato.

$$w(\Delta t) = \frac{1}{2} C [v^2(t_0+\Delta t) - v^2(t_0)]$$

Se supponiamo che il bipolo in considerazione, all'istante $t_0$ sia "scarico", cioè si abbia tensione nulla e corrente nulla ovvero assenza di energia assorbita all'istante $t_0$, l'energia $w(\Delta t)$ avrà l'espressione

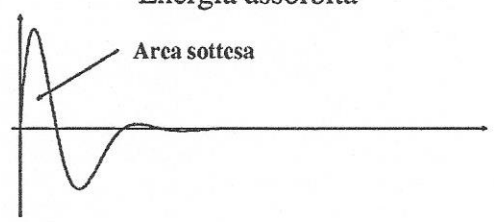
$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

Energia assorbita



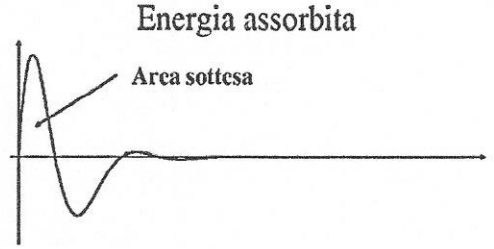

$$w(\Delta t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} p(t)\, dt$$ , intervallo $t_0$ e $t_0+\Delta t$

Energia assorbita




$$w(\Delta t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} p(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{1}{2} C \frac{dv^2}{dt} dt =$$

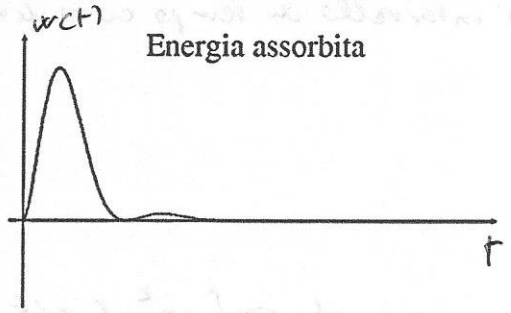
Energia assorbita




$$w(\Delta t) = \frac{1}{2} C [v^2(t_0+\Delta t) - v^2(t_0)]$$

↳ se $v^2(t_0) \neq 0$ e $v^2(t_0) > v^2(t_0+\Delta t) \Rightarrow w(\Delta t) < 0$, energia assorbita negativa.
Questo se l'energia assorbita dal bipolo prima di $t_0$ era maggiore di quella assorbita all'istante $t_0+\Delta t$.

## Energia assorbita




$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

A lato l'andamento di

$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

da cui si nota che l'energia assorbita è sempre positiva perché siamo partiti da una condizione in cui la tensione ai morsetti del bipolo era nulla.

L'energia assorbita può essere negativa se $v^2(t_0) > v^2(t_0 + \Delta t)$.

Il bipolo è passivo, non fornisce energia, ma è in grado di immagazzinarla.

La passività è dimostrata quando vedremo che l'energia assunta dal bipolo durante la carica è uguale a quella che restituisce durante la scarica

## Energia assorbita

$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

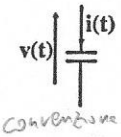
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)\, dt \geq 0$$

Convenzione dell'utilizzatore

**Definizione di passività in regime dinamico!**

IL BIPOLO IMMAGAZZINA ENERGIA E LA RESTITUISCE

## Condensatore

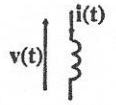



$$i = C \frac{dv}{dt}$$

convenzione dell'utilizzatore  C > 0 è detta capacità

È un bipolo passivo, in regime dinamico.

## Induttore




$$v = L \frac{di}{dt}$$

convenzione dell'utilizzatore  L è detta induttanza

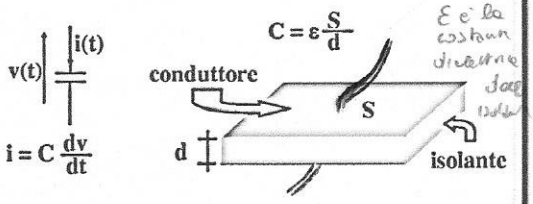
## Energia assorbita dall'induttore

$$w(\Delta t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} p(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{1}{2} L \frac{di^2}{dt}\,dt =$$

$$w(t) = \frac{1}{2} L\, i^2(t)$$

↳ L'induttore dipende dal cambiamento di $i$: avviene solo conducendo trattando i transitori.

## Condensatore

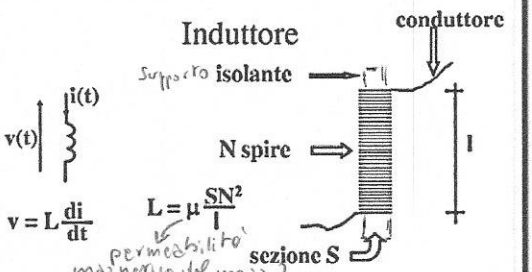



ε è la costante dielettrica del mezzo isolante

Nel S.I. La capacità C si misura in Farad

M. Faraday (1791 - 1867) $1C = \frac{1A}{1V}$

## Induttore




Nel S.I. L'induttanza L si misura in Henry

J. Henry (1797 - 1878) $1H = \frac{1V}{1A}$

## Kirchhoff

**Assumiamo che in ogni istante le leggi di Kirchhoff siano ancora valide!**

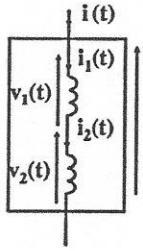
**E' un'approssimazione tanto più valida quanto più piccolo è il rapporto $\beta = \frac{l}{cT}$**

Si assume che in regime dinamico le leggi di Kirchhoff siano valide, istante per istante. Questo vale per approssimazione, che è tanto migliore quanto sono verificate le condizioni, cioè è piccolo $\beta$, con $\beta = \frac{l}{cT}$

con $l$ dimensione del dipolo,
$c$ velocità della luce,
$T$ tempo caratteristico della grandezza (della tensione o della corrente)

Collegamenti dei due nuovi bipoli. Convenzione dell'utilizzatore

## Serie di due induttori




$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

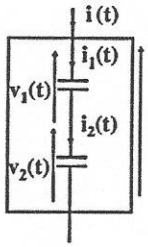
$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} =$$

$$= (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

$$L = (L_1 + L_2)$$

La serie di due induttori è un induttore di induttanza pari alla somma delle induttanze.

## Serie di due condensatori




$$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt}$$

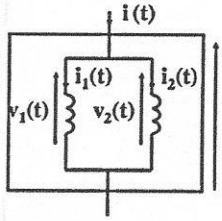
$$i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} = \frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} =$$

$$= i \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right]$$

$$\frac{1}{C} = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right] = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

## Parallelo di due induttori




$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

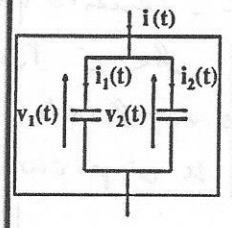
$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{v_1}{L_1} + \frac{v_2}{L_2} =$$

$$= v \left[\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right]$$

$$\frac{1}{L} = \left[\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right] = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2}$$

## Parallelo di due condensatori




$$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt}$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt}$$

$$i = i_1 + i_2 = C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} =$$

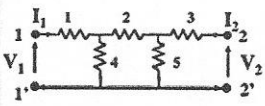
$$= (C_1 + C_2) \frac{dv}{dt}$$

$$C = (C_1 + C_2)$$

Vedremo il collegamento fra bipoli duali, nella prossima lezione

36'20"

## Esercizi:
## Matrice delle R e delle G



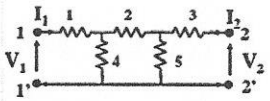

$$G_{11} = \left[ \frac{(R_c + R_2) R_1}{R_2 + R_e + R_4} + R_1 \right]^{-1}$$

$$R_e = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5}$$

$$G_{rs} = \left. \frac{I_r}{V_s} \right|_{\substack{V_i = 0 \\ i \neq s}}$$

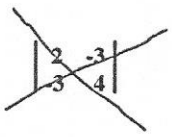
$$G_m = \frac{- R_3 R_5 / (R_3 + R_5)}{(R_2 + R_e + R_4) R_1 + (R_2 + R_e) R_3}$$

## Esercizi:
## Matrici ibride e di trasmissione




## Esercizi:
## Condizioni di fisica realizzabilità

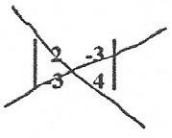
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

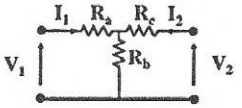



Delle seguenti matrici R di un doppio bipolo, quale non soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità e perché.

## Esercizi:
## Condizioni di fisica realizzabilità

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

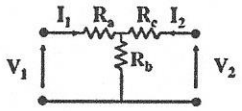


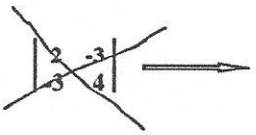




$R_a = 2\,\Omega$;
$R_b = 2\Omega$;
$R_c = 1\Omega$.

## Esercizi:
## Condizioni di fisica realizzabilità

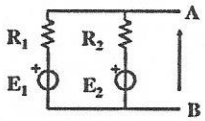
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$




$R_a = -1\,\Omega;$
$R_b = 3\,\Omega;$
$R_c = 1\,\Omega.$

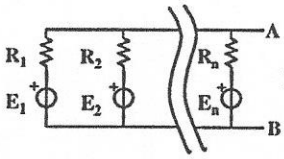
## Esercizi:




**Determinare la d.d.p. tra I morsetti A e B**

$$V_{AB} = \left[\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right] \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

## Esercizi:




**Formula generale?**

LEZIONE 20

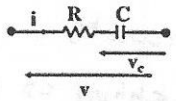
# Circuiti del primo ordine

Prof. Luciano De Menna
44'38"

Serie di R e C
Interruttore
Equazione risolvente
Equazioni differenziali
Scarica di C ed energia dissipata; l'oscilloscopio virtuale.
Esercizi

prossima lezione

## Resistore e condensatore in serie

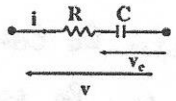



$$i = C\frac{dv_c}{dt}$$

**Se $v_c = V_c = cost.$ ⟹ Allora $i = 0$.**

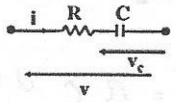
↳ perché la derivata di una costante è nulla.

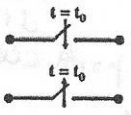
## Resistore e condensatore in serie




**Se tensione e corrente variano nel tempo ⟹ Allora è necessario precisare l'istante iniziale!**

## Interruttore

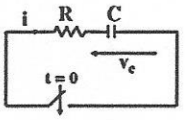



**Bipolo interruttore**

Solo se la tensione varia nel tempo la corrente non è nulla.
Ma si pone un problema sulla energia immagazzinata dal condensatore ($\frac{1}{2}Cv^2$), energia che varia nel tempo: diventa importante sapere l'istante iniziale da cui cominciamo a valutare l'evoluzione.
L'istante iniziale in cui cambia sia l'energia immagazzinata nel condensatore dell'assemblaggio del circuito con resistenza e condensatore in serie.
Per definire l'istante iniziale della evoluzione del circuito si introduce un nuovo bipolo, detto bipolo interruttore. Di questo ne esistono due tipi, uno in chiusura e uno in apertura.
Quando in chiusura, tale bipolo interruttore si comporta come bipolo circuito aperto per $t < t_0$ e come bipolo corto circuito per $t > t_0$, detto $t_0$ l'istante di transizione.
Il bipolo interruttore in apertura è analogamente definito.
Si parla, anche in questo caso di bipoli ideali.

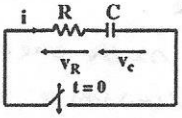
## RC in evoluzione libera




$v_c(0) = V_0$

Definizione di passività del condensatore

## RC in evoluzione libera




$v_c(0) = V_0$

$v_R = Ri = RC\frac{dv_c}{dt}$

$v_R + v_c = 0$

$v_c + RC\frac{dv_c}{dt} = 0$

$i = C\frac{dv_c}{dt}$

$$\boxed{\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = 0}$$

## Equazioni differenziali

$$\boxed{\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = 0}$$

- Differenziali;
- Omogenee;
- Lineari; *
- A coefficienti costanti. **

$$y' + a_0 y(x) = 0$$

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

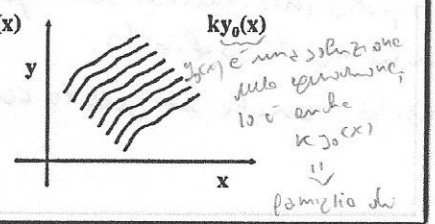
* l'incognita e sue derivate non compaiono elevate a potenza.

** $a_0$ è una costante, non è una variabile.

## Primo ordine

$$\boxed{\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = 0}$$

$$y' + a_0 y(x) = 0$$




$y_0(x)$ è una soluzione dell'equazione, lo è anche $k y_0(x)$

⇓

famiglia di soluzioni.

A lato il circuito con i suoi componenti, da cui si riconosce una maglia, in cui non ci sono bipoli attivi, essendo anche il bipolo condensatore passivo, con la nuova definizione di passività data.
Poiché il condensatore può immagazzinare energia, esso può avere all'istante $t = t_0$ una certa energia immagazzinata, in cui c'è da aspettarsi che la sua evoluzione non sia banale, cioè tutto nullo.
L'energia immagazzinata dal condensatore è proporzionale alla tensione quindi dobbiamo stabilirla all'istante $t_0$ (assumeremo pari a zero).
Si suppone che per $t = t_0$, $v_c(0) = V_0$.

Le condizioni iniziali sono importanti

Le equazioni del circuito:
- valgono le leggi di Kirchhoff ⇒ la somma delle tensioni nella maglia del circuito è identicamente uguale a zero.

Avendo visto la convenzione dell'utilizzatore deve valere $v_R + v_C = 0$ (LKT)

La prima legge di Kirchhoff non è applicata, poiché non essendovi nodi la corrente che circola è unica.
Ora dobbiamo utilizzare la caratteristica del condensatore, in cui la corrente è proporzionale alla derivata della tensione e quella del resistore che ci dice che la tensione sulla resistenza, $v_R$, è pari a $Ri$ che è uguale a $RC\frac{dv_c}{dt}$ in quanto la corrente $i$ è data appunto da $C\frac{dv_c}{dt}$, poiché è la stessa corrente che circola nel condensatore.
Quindi $v_R = Ri = RC\frac{dv_c}{dt}$, che, inserita nella LKT, porta alla seguente $v_C + RC\frac{dv_c}{dt} = 0$ che è una equazione differenziale nella incognita $v_C$, la tensione sul condensatore, omogenea, lineare, e a coefficienti costanti.
Dividendo tutto per $RC$ otteniamo la forma

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RT} = 0$$

## Nel piano (x,y)

eq. in studio

$y'(x_0) = - a_0 y(x_0)$

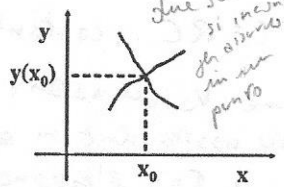
$y'' (x_0) = - a_0 y'(x_0)$

.....

$y^n (x_0) = - a_0 y^{n-1} (x_0)$

$y'+a_0 y(x) = 0$

due soluzioni si incontrano, ma distinte, in un punto




## Derivate successive nel punto

$y'(x_0) = - a_0 y(x_0)$

$y''(x_0) = - a_0 y'(x_0)$

.....

$y^n(x_0) = - a_0 y^{n-1} (x_0)$

$y''(x_0) = a_0^2 y(x_0)$

$y'''(x_0) = - a_0^3 y(x_0)$

.....

$y^n(x_0) = (- a_0)^n y (x_0)$

## Sviluppo in serie di Taylor

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n =$$

$$= y(x_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(- a_0)^n}{n!} (x-x_0)^n$$

$$= y(x_0)\, e^{-a_0(x-x_0)}$$

$y''(x_0) = a_0^2 y(x_0)$

$y'''(x_0) = - a_0^3 y(x_0)$

.....

$y^n(x_0) = (- a_0)^n y (x_0)$

$y(x) = k\, e^{-a_0(x-x_0)}$ -> famiglia di soluzioni delle equazioni, o integrale generale dell'equazione

## Equazione caratteristica

$y'+a_0 y(x) = 0$

$y(x) = k\, e^{-a_0(x-x_0)}$

$y'(x) = - a_0 y(x)$

$\boxed{e^{\alpha x}}$

$\alpha e^{\alpha x} + a_0 e^{\alpha x} = 0$

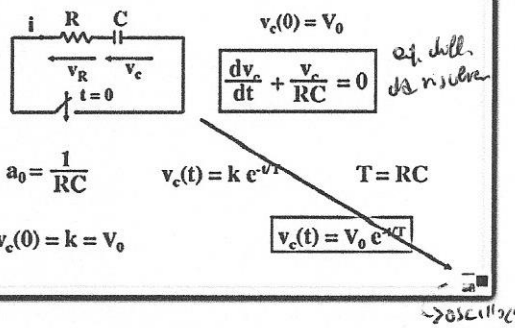
$\alpha = - a_0$

Metodo dell'equazione caratteristica, per il calcolo dell'integrale generale della equazione differenziale

$y' + a_0 y(x) = 0$.

Serve per calcolare $\alpha$.

## RC in evoluzione libera




→ oscilloscopio o oscillografo

Nel nostro caso $\lambda = \frac{1}{RC} = \alpha_0$

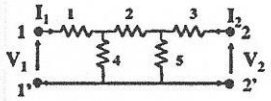
Quindi la soluzione generale è del tipo $v_c(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{T}}$

con $T = RC$, costante di tempo del circuito.

Siccome $v_c$ all'istante 0 deve valere, ma la nostra soluzione all'istante 0 vale k poiché per $t = 0$ l'esponenziale vale 1 otteniamo che $v_c(0) = k = V_0$.

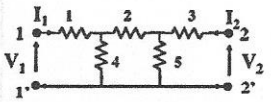
Quindi la soluzione è $v_c(t) = V_0\,e^{-\frac{t}{T}}$

## Esercizi: Matrici ibride e di trasmissione




$$h_{12} = \frac{R_4 R_5}{(R_2 + R_4 + R_6)(R_3 + R_5) + R_3 R_5}$$

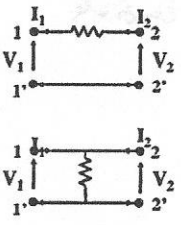
## Esercizi: Matrici ibride e di trasmissione




$$g_{12} = -\frac{R_5}{(R_2 + R_5 + R_6)(R_1 + R_4) + R_1 R_4} + \frac{R_4}{R_1 + R_4}$$

## Esercizi: Rappresentazioni possibili

per due strani doppi bipoli




**Parametri G e non R**

$$R_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1 = 0}$$

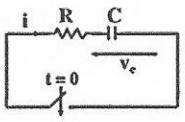



**Parametri R e non G**

$$G_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1 = 0}$$

W. Lap

# Esercizi




$v_c(0) = V_0$

**Scrivere l'equazione risolvente in termini dell'incognita corrente.**

(prima era scritta per l'incognita tensione)

w.6

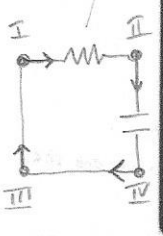
LEZIONE 21

# Circuiti del secondo ordine

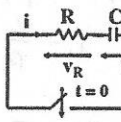
Prof. Luciano De Menna
46'48"

Ancora sulla serie di R e C e sull'energia immagazzinata
Serie di R ed L
Serie di R,L e C: equazioni del secondo ordine
Le diverse condizioni di funzionamento
Equazioni del secondo ordine
Radici reali e distinte
Esercizi

la ddp sul resistore è $V_I - V_{II}$




## RC in evoluzione libera




$v_c(0) = V_0$

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = 0$$

$v_c(t) = V_0 e^{-t/T}$ $\quad T = RC$

La corrente (costante di Tempo)

$$i(t) = C\frac{dv_c}{dt} = -\frac{C}{T} V_0 e^{-t/T} = -\frac{1}{R} V_0 e^{-t/T}$$

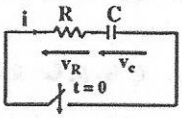
La caduta nelle R è proporzionale alla corrente, quindi ha lo stesso andamento della corrente, moltiplicato per R; $V = Ri$

oscillogramma

$Ri^2$ è la potenza dissipata nella resistenza R.

## Energia dissipata durante la scarica

(è tutta quella immagazzinata nel cond.)




$v_c(0) = V_0$

$$i(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/T}$$

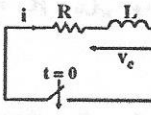
$$W = R\int_0^\infty i^2(t)\,dt = R\int_0^\infty \left[\frac{V_0}{R} e^{-t/T}\right]^2 dt =$$

$$= R\left[\frac{V_0}{R}\right]^2 \frac{T}{2}\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \frac{1}{2} C V_0^2$$

Energia dissipata durante la scarica del condensatore

pari a tutta l'energia immagazzinata nel condensatore

## RL in evoluzione libera




$i(0) = I_0$

Il comportamento dell'induttore L è duale a quello del condensatore, è lecito parlare di carica e scarica dell'induttore

(RL in evoluzione libera)

Il livello energetico dell'induttore è proporzionale al quadrato della corrente, assumiamo che la corrente all'istante iniziale sia $I_0$. Nell'induttore c'è una energia immagazzinata e nel circuito ...

Circuito RC chiuso su x stesso in un verso chiuso a formare una maglia, con un interruttore. L'istante di chiusura è assunto $t = 0$.

L'andamento della tensione ai capi del condensatore è stata calcolata ed è

$v_c(t) = V_0 e^{-\frac{t}{T}}$ $\quad T = RC$

$v_c(0) = V_0$

soluzione delle eq. diff.

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = 0$$

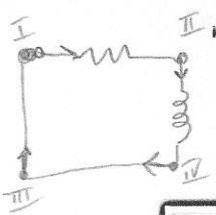
Affinché nel circuito ci sia corrente non nulla occorre che inizialmente il condensatore possieda una certa energia immagazzinata il che significa che la tensione iniziale sul condensatore deve essere non nulla e deve essere assegnata, cioè dobbiamo conoscere il livello energetico immagazzinato nel condensatore all'istante iniziale.

L'andamento della corrente si ricava facendo la derivata della tensione e moltiplicandola per C, ovvero $i(t) = C\frac{dv_c}{dt} =$

$$-\frac{C}{T} V_0 e^{-\frac{t}{T}} = -\frac{1}{R} V_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

$\left(T = \frac{1}{RC}\right)$

Il valore iniziale della corrente, che è negativo, è $\frac{V_0}{R}$. All'istante $t=0$ è come se il condensatore si comportasse da generatore con tensione $V_0$ e la corrente che circola nel circuito è $-\frac{V_0}{R}$




corrente nell'induttore → caduta di tensione sul resistore proporzionale a $-i$

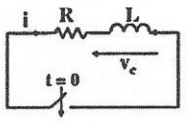
ddp fra II e III, $V_{III} = 0$ → caduta di tensione sull'induttore

circola corrente per effetto di questa energia.

(corrente nell'induttore; va a zero con la stessa legge sull'induttore / caduta di tensione sull'induttore.)

Laboratorio virtuale 16'25"

## RL in evoluzione libera




$i(0) = I_0$

$v_R$ (=) $Ri$ + $v_L$ (=) $L\frac{di}{dt} = 0$

$v_R + v_L = 0$ LKT

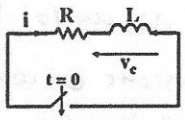
$v = L\frac{di}{dt}$ caratteristica del bipolo

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$

eq. risolta per trovare la tensione e vedere $\frac{L}{R}$

conv. utilizzatore

## RL in evoluzione libera




$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$

$\alpha = -\frac{R}{L}$ $\quad i(t) = k\, e^{\alpha t}$ $\quad T = L/R$

$10^{-1}$ H $\approx 10\ \Omega$

$i(0) = k = I_0$ $\quad i(t) = I_0\, e^{-t/T}$

$\approx 10$ ms $\approx 10^{-2}$ s

L'equazione che troviamo in questo caso è $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$

Abbiamo $\alpha = -\frac{R}{L}$ (l'unica radice della equazione caratteristica)

La soluzione sarà pertanto del tipo:

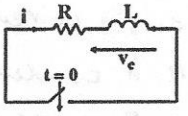
$i(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{T}}$, $T = \frac{L}{R}$

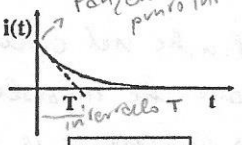
con condizione iniziale

$i(0) = k = I_0 \Rightarrow i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}$

Quindi nella scarica dell'induttore la costante di tempo è $\frac{L}{R}$; nel condensatore RC.

## La costante di tempo T




$i(t) = I_0\, e^{-t/T}$

Per costanza di tempo T piccola il decadimento della corrente è più rapido.

## IL CIRCUITO RLC

Inseriamo nel circuito, oltre al resistore, sia l'induttore che il condensatore, in serie.

Non ci sono generatori (bipoli attivi).

Ci aspettiamo una dinamica immaginando che sia il condensatore sia il conduttore siano inizialmente carichi.

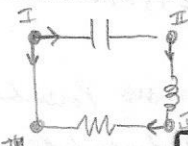
Dal laboratorio virtuale, con l'oscilloscopio, ci si aspetta che la soluzione sia somma di esponenziali → vd "Laboratorio Virtuale".

Dall'esperienza virtuale e dalla analisi: l'equazione di Kirchhoff alla maglia (LKT) è:

$v_R + v_C + v_L = 0$ e a questa equazione dobbiamo aggiungere le caratteristiche dei bipoli presenti nella rete e cioè:

$v_L = L\frac{di}{dt}$; $i = C\frac{dv_C}{dt}$; $v_R = Ri$,

quindi $v_R = RC\frac{dv_C}{dt}$, da sostituire



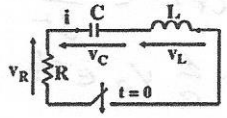

tensione sul condensatore

corrente = caduta sul resistore

Sonda su IV => ddp tra IV e III quindi la caduta sul resistore, quindi andamento della corrente

Sonda su II => tensione sul condensatore perché misura la ddp fra II e III, la cui misura = tensione sul condensatore.

## Il circuito R L C (solo bipoli passivi)




$v_R + v_C + v_L = 0$

$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + LC\frac{d^2v_C}{dt^2} = 0$

Ind. $v_L = L\frac{di}{dt}$

Cond. $i = C\frac{dv_C}{dt}$

Res. $v_R = Ri$

$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0$

nella LKT. In essa deve essere espresso $v_L$ in termini di $v_C$, che è molto semplice perché sostituisco $i = C\frac{dv_C}{dt}$ nella caratteristica dell'induttore e ottengo $v_L = LC\frac{d^2v_C}{dt^2}$ → $\frac{d^2i}{dt^2}$

L'equazione differenziale è dunque $RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + LC\frac{d^2v_C}{dt^2} = 0$ e, riordinandola per avere la derivata di ordine superiore con coefficiente unitario, abbiamo in definitiva

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0$$

equaz. differenziale coefficienti costanti ($1$, $\frac{R}{L}$ e $\frac{1}{LC}$), omogenea, del secondo ordine.

$y(x) = k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}$, con $k_1$ e $k_2$ da definire, rappresenta l'integrale generale, tutte le soluzioni.

Se fisso due valori della soluzione la soluzione è univocamente determinata.

Se fisso $k_1$ e $k_2$ ottengo una soluzione.

## Equazioni del secondo ordine

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0$$

famiglia di soluzioni, con due gradi di libertà, perché possiamo scegliere $k_1$ e $k_2$

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

$$e^{\alpha x}(\alpha^2 + a_1\alpha + a_0) = 0 \qquad \boxed{y(x) = k_1e^{\alpha_1 x} + k_2e^{\alpha_2 x}}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

$a_1$ e $a_2$

$a = 1$

## Equazioni del secondo ordine

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0 \qquad \boxed{y(x) = k_1e^{\alpha_1 x} + k_2e^{\alpha_2 x}}$$

**Integrale generale**

$$y'' = -a_1y' - a_0y$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

- Reali e distinte
- Reali e coincidenti
- Complesse coniugate

$2 \pm j5$

## Radici reali e distinte

$$\boxed{y(x) = k_1e^{\alpha_1 x} + k_2e^{\alpha_2 x}}$$

$$v_C(t) = k_1e^{\alpha_1 t} + k_2e^{\alpha_2 t}$$

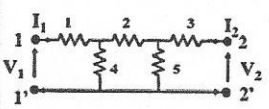


andamento

---

40'

## Esercizi:
## Matrici ibride e di trasmissione



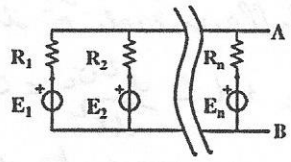

$$t_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0}$$

$$t_{12} = -\left[R_1 + \frac{R_4(R_2 + R_e + R_6)}{R_0}\right]\frac{(R_2 + R_e + R_6)(R_3 + R_5)}{R_5R_4}$$

$$R_e = \frac{R_5R_3}{(R_5 + R_3)} \qquad R_0 = R_2 + R_e + R_6 + R_4$$

## Esercizi:

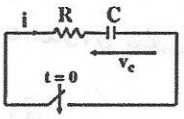
**Formula generale?**




$$I_r = \frac{E_r - (V_A - V_B)}{R_r} \qquad V_A - V_B = \frac{\sum_r \frac{E_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}}$$

formula di Millman vista nei sistemi trifase

## Esercizi




$v_c(0) = V_0$

$v_R + v_c = 0$

$i = C\frac{dv_c}{dt}$

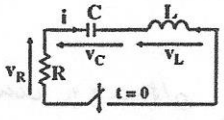
$v_R = Ri$

$\frac{dv_C}{dt} + \frac{dv_R}{dt} = 0$

$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0$

$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$

## Esercizi




**Scrivere l'equazione risolvente nella incognita corrente!**

L'equazione è stata scritta nella incognita tensione nella lezione 13.

Laboratorio Virtuale

. Diminuendo la resistenza nel circuito RLC ad un valore di circa $6.30\,\Omega$, osserviamo un cambio di schema e compaiono delle $\sim$, oscillazioni. Esse aumentano al diminuire di tale valore.

$\left[\frac{L}{C}\right] = \Omega$

Dunque

$R = 6.30\ \Omega$
$L = 1\ mH$
$C = 1\ mF$

$\frac{L}{C} = 10^{-9}$ ; $\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{10^3} \simeq \frac{10^{-4}}{3}$

$2\sqrt{\frac{L}{C}} = 6.30\ \Omega$

21'55" Il cambiamento qualitativo del comportamento del circuito avviene quando la resistenza ha un valore, detto valore critico pari a $2\sqrt{\frac{L}{C}}$, $L$ è l'induttanza e $C$ è la capacità del condensatore.

Per questo valore, la RESISTENZA CRITICA, il comportamento cambia e cominciano a uscire delle le oscillazioni.

Portando la resistenza a valori molto bassi (in realtà all'limite di zero ohm, non possibile in un circuito reale, perché avrei della corrente troppo elevate) e, nell esperimento virtuale portandolo a zero, rimane condensatore e induttore e non c'è più dissipazione. In queste condizioni corrente e tensioni si stabilizzano in forme d'onda sinusoidali.

Se volessimo calcolare la pulsazione angolare di queste oscillazioni, dato il periodo $T$, $\omega$ = pulsazione angolare è $\frac{2\pi}{T}$ ; $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Il periodo che si nota nell'esperienza virtuale è $\frac{3}{4}$ di un intervallo, $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ è il risultato finale.

Quando, per $R=0$, il condensatore e l'induttore hanno un livello energetico iniziale $\neq 0$, il circuito è in grado di oscillare. L'oscillazione non smorzata ed è a una sola frequenza, data da $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Potremmo verificare che, cambiando il livello energetico e la corrente, questa frequenza, $\omega_0$, non cambia.

LEZIONE 22

# Le oscillazioni nei circuiti del secondo ordine

Prof. Luciano De Menna
43'56"

Ancora sulla serie L, R e C
Radici complesse e coniugate
Radici coincidenti
Le condizioni iniziali
Bilanci energetici
Esercizi

## Radici complesse coniugate

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0 \le 0 \quad \Rightarrow \quad R^2 \le \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x} \qquad \alpha_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

(y(x): tensione; sostituzione ↔; $\Rightarrow j^2 = -1$)

$$y(x) = (A+jB)e^{(\alpha+j\beta)x} + (A-jB)e^{(\alpha-j\beta)x}$$

$R = 2\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$ è il caso critico;

## Oscillazioni

$$y(x) = (A+jB)e^{(\alpha+j\beta)x} + (A-jB)e^{(\alpha-j\beta)x} \qquad R^2 \le \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[(A+jB)e^{+j\beta x} + (A-jB)e^{-j\beta x}\right]$$

($e^{\alpha x}$ in evidenza)

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[A\left(e^{+j\beta x} + e^{-j\beta x}\right) + jB\left(e^{+j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)\right]$$

Se le radici sono complesse e coniugate anche le costanti sono coniugate:

$\lambda_1, \lambda_2$ complesse e coniugate

$\Downarrow$

$k_1$ e $k_2$ complesse e coniugate

Questo perché la funzione $y(x)$ rappresenta una tensione e non può quindi essere un numero complesso, ma un numero reale. Quindi una costante è $A + jB$ e l'altra $A - jB$.

Da

$$y(x) = (A+jB)e^{(\alpha+j\beta)x} + (A-jB)e^{(\alpha-j\beta)x}$$

si ricavano altre espressioni che arrivano ad un'altra espressione

## Oscillazioni

$$R^2 \leq \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[A\left(e^{+j\beta x} + e^{-j\beta x}\right) + jB\left(e^{+j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)\right]$$

↑ moltiplico per $\frac{2}{2}$ ↑ moltiplico per $\frac{2j}{2j}$

espressione della tensione

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[2A\,\frac{\left(e^{+j\beta x} + e^{-j\beta x}\right)}{2} - 2B\,\frac{\left(e^{+j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)}{2j}\right]$$

L'espressione finale, per trasformazioni algebriche è:

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[\frac{2A\left(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}\right)}{2} + \frac{-2B\left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)}{2j}\right]$$

in cui troviamo l'espressione della funzione seno in un caso e coseno nell'altro quindi otteniamo:

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[2A\,\mathrm{sen}(\beta x) - 2B\cos(\beta x)\right]$$

da cui risultano evidenti le oscillazioni.

## Oscillazioni

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \qquad R^2 \leq \frac{4L}{C}$$

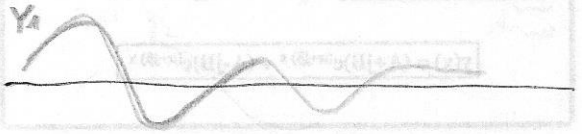
$$y(x) = e^{\alpha x}\left[2A\,\frac{\left(e^{+j\beta x} + e^{-j\beta x}\right)}{2} - 2B\,\frac{\left(e^{+j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)}{2j}\right]$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[2A\,\mathrm{sen}(\beta x) - 2B\cos(\beta x)\right]$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{R}{2L}} \qquad \boxed{\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

Quindi abbiamo che

$$\alpha = -\frac{R}{2L} \quad e \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$




## Oscillazioni

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \qquad R^2 \leq \frac{4L}{C}$$

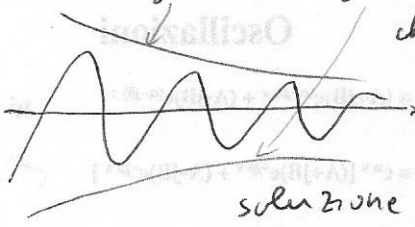
$$v_C(t) = k e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t + \varphi)$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{T}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{T}\right)^2}}$$

**Caso oscillante o sottocritico** perché $R^2 < \frac{4L}{C}$

La somma $y_1 + y_2$ è una oscillazione smorzata ed è contenuta fra due esponenziali, $y = e^{\alpha x}$ e $y = -e^{\alpha x}$, che accompagnano e fermano la soluzione che risolve.




Il decadimento è dato dall'assenza di generatori nel circuito.

## Radici coincidenti

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \qquad R^2 = \frac{4L}{C}$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{T}}$$

$e^{\alpha t}$

$e^{\alpha t} \qquad e^{(\alpha+\Delta\alpha)t}$

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{e^{(\alpha+\Delta\alpha)t} - e^{\alpha t}}{\Delta\alpha} = \frac{d\,e^{\alpha t}}{d\alpha} = t e^{\alpha t}$$

questa è, in sostanza, una nuova soluzione

Il rapporto è il rapporto incrementale

Abbiamo considerato una particolare soluzione, combinazione lineare delle due soluzioni, ovvero la 2ª soluzione meno la 1ª divisa per $\Delta\alpha$. Il limite è una

Nel caso di radici coincidenti possiamo scrivere una soluzione $e^{\alpha t}$ e non possiamo scrivere l'intera famiglia di soluzioni che deve dipendere da due costanti. Supponiamo allora di essere un po' distanti dalla condizione critica e che

## Radici coincidenti

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}=0 \qquad R^2=\frac{4L}{C}$$

$$\alpha=-\frac{R}{2L}=-\frac{1}{T}$$

**Caso critico**

$e^{\alpha t}$ $\quad te^{\alpha t}$ (le due soluzioni)

$v_C(t)=k_1e^{\alpha t}+k_2te^{\alpha t}$ (soluzione generale)

## Posizioni

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}=0$$

$$\alpha^2+\frac{R}{L}\alpha+\frac{1}{LC}=0$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}$$ Le radici

## Posizioni

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}=0$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}$$

ponendo: $T=\frac{2L}{R}$ ed $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

il $\Delta$ diventa: $\Delta=\frac{4}{T^2}(1-\omega_0^2T^2)$

## Posizioni

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}=0$$

$\Delta=\frac{4}{T^2}(1-\omega_0^2T^2)$ $\quad T=\frac{2L}{R}$ ed $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

| | |
|---|---|
| $\omega_0T<1$ | Caso aperiodico o smorzato o sopracritico ($\Delta>0$) |
| $\omega_0T=1$ | Caso critico ($\Delta=0$) |
| $\omega_0T>1$ | Caso periodico o oscillante o subcritico ($\Delta<0$) |

$R^2$ sia un po' distante da $\frac{4L}{C}$.
Allora avremmo due soluzioni, $\alpha_1$ e $\alpha_2$, con $\alpha_2$ poco maggiore di $\alpha_1$.
Le soluzioni sono dunque scrivibili come $e^{\alpha t}$ e $e^{\alpha t+\Delta\alpha t}$
Il caso critico, con le radici coincidenti, ha per $\Delta\alpha\to 0$.
Riusciamo a determinare una seconda soluzione, $t\cdot e^{\alpha t}$, che può essere usata per costruire l'integrale generale nel caso di radici coincidenti.
Il caso critico è fisicamente irrealizzabile a non per approssimazione da una parte, quella delle radici reali e distinte dalla seconda parte, quella delle radici complesse e coniugate. Il caso critico non è di per sé interessante, ma fisica il limite di separazione fra gli altri due casi, quello sopra critico e quello sub critico.

POSIZIONI

Ponendo $T=\frac{2L}{R}$ e $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$,

ossiamo che il determinante diventa

$\Delta=\frac{4}{T^2}(1-\omega_0^2T^2)$ e questo ci consente di studiare i tre con un funzione di questa forma del determinante, come da figura a lato.

# LE CONDIZIONI INIZIALI NELLE EQUAZIONI RLC

SI RICORDA CHE NEL CASO DELLA EQUAZIONE DEL PRIMO ORDINE PER IL CONDENSATORE L'EQUAZIONE ERA IN TERMINI DELLA VARIABILE TENSIONE SUL CONDENSATORE; PER L'INDUTTORE L'EQUAZIONE HA COME VARIABILE LA CORRENTE NELL'INDUTTORE. QUESTO PERCHÉ L'INCOGNITA NEL PRIMO CIRCUITO ERA LA TENSIONE SUL CONDENSATORE E NEL SECONDO CIRCUITO LA CORRENTE NELL'INDUTTORE, CHE SONO LE INCOGNITE PER LE QUALI ABBIAMO I VALORI INIZIALI: PER IL CIRCUITO RC OCCORRE CONOSCERE IL LIVELLO ENERGETICO NEL CONDENSATORE ALL'ISTANTE INIZIALE E QUINDI LA $v_C$ ALL'ISTANTE INIZIALE, MENTRE PER IL CIRCUITO RL OCCORRE CONOSCERE LA CORRENTE ALL'ISTANTE INIZIALE PERCHÉ ESSA DETERMINA IL LIVELLO ENERGETICO NELL'INDUTTORE. AVREMO QUINDI DIRETTAMENTE LE CONDIZIONI INIZIALI SULLE VARIABILI SCELTE.

## Condizioni iniziali

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}=0 \qquad R^2 \le \frac{4L}{C}$$

$v_C(t)=ke^{\alpha t}\,sen(\beta t+\varphi)$ *

$$\alpha=-\frac{R}{2L}=-\frac{1}{T}$$

$$\beta=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{1}{T}\right)^2}$$

$v_C(0)=V_0$

$i(0)=I_0$

* caso subcritico

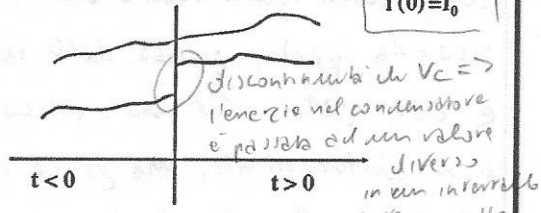
## Condizioni iniziali

deve essere continua a $t=0$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}=0$$

$v_C(0)=V_0$

$i(0)=I_0$




discontinuità di $v_C$ => l'energia nel condensatore è passata da un valore diverso in un intervallo di tempo nullo

NEL CASO RLC LE CONDIZIONI INIZIALI LE ABBIAMO PER LA TENSIONE SUL CONDENSATORE E PER LA CORRENTE NELL'INDUTTORE.
DOBBIAMO RIPORTARE LA CONDIZIONE PER LA CORRENTE NELL'INDUTTORE ALL'ISTANTE 0 SULLA TENSIONE SUL CONDENSATORE, PERCHÉ ABBIAMO RISOLTO PER LA TENSIONE SUL CONDENSATORE.
LÀ $v_C(0)=V_0$, $v_C(0)$ È CONTINUA ALL'ISTANTE ZERO, È UNA IMPOSIZIONE PERCHÉ $v_C$ È IL PARAMETRO DA CUI DIPENDE L'ENERGIA NEL CONDENSATORE. ALL'ISTANTE 0 DEVE ESSERE CONTINUA, PER NON AVERE IL PARADOSSO CHE IN UN INTERVALLO DI TEMPO NULLO L'ENERGIA NEL CONDENSATORE È PASSATA

## Condizioni iniziali

$v_C(t)=ke^{\alpha t}\,sen(\beta t+\varphi)$, per $t=0$ assumo

$$R^2 \le \frac{4L}{C}$$

$v_C(0)=V_0$

$i(0)=I_0$

$v_C(0)=k\,sen(\varphi)=V_0$ → per quanto visto per $\varphi$

$$i(t)=C\frac{dv_C}{dt}=\alpha kCe^{\alpha t}\,sen(\beta t+\varphi)+\beta kCe^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)$$

corrente nel condensatore, $t>0$

$i(0)=\alpha kC\,sen(\varphi)+\beta kC\cos(\varphi)=I_0$ → per $t\to 0^+$

valore in $0^+$ della corrente nel circuito

valore in $0^-$

valore della corrente all'istante 0; la corrente nell'induttore del circuito RLC serie è lo stesso che circola nel condensatore

## Condizioni iniziali

$$R^2 \le \frac{4L}{C}$$

$v_C(t)=ke^{\alpha t}\,sen(\beta t+\varphi)$

$i(t)=\alpha kCe^{\alpha t}\,sen(\beta t+\varphi)+\beta kCe^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)$

$v_C(0)=k\,sen(\varphi)=V_0$

$i(0)=\alpha kC\,sen(\varphi)+\beta kC\cos(\varphi)=I_0$

→ ci consentono di calcolare $\varphi$ e $k$.

Bilancio energetico circuito RLC: caso subcritico, oscillatorio smorzato

**Potenza dissipata ed Energia immagazzinata**

$R^2 \leq \frac{4L}{C}$

$v_C(t) = ke^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t+\varphi)$ soluzione

$i(t) = \alpha kCe^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t+\varphi) + \beta kCe^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)$ (corrente nel circuito nell'induttore)

$W_1 = \int_0^t p(t)\,dt = \int_0^t Ri^2\,dt$ $\quad W_2 = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cv^2$

($W_1$ da 0 a t, potenza dissipata nel resistore fino all'istante t.)

ad un valore diverso.
Quindi il condensatore ha guadagnato una energia finita in un intervallo nullo o ha perso una energia finita. Se pensassimo dissipazione in un tempo nullo, il dissipatore deve avere potenza infinita. In realtà un bipolo ideale siffatto esiste.
Per la corrente nell'induttore si può fare un discorso analogo: essa non può avere una discontinuità.

Quindi per $t \geq 0$ possiamo imporre che la soluzione deve avere in $t=0$ $v_C(0) = V_0$ e $i(0) = I_0$.
I valori della soluzione per le due variabili $v_C$ e $i$ in $t(0^+)$ devono coincidere con i valori in $t(0^-)$, cioè il limite da destra nel regime precedente.
Per questo motivo le variabili $v_C$ per il condensatore e $i$ per l'induttore prendono anche il nome di variabili di stato: esse definiscono lo stato, per ogni istante, energetico del componente.
Ogni altra grandezza nel circuito, ad es. la corrente nel condensatore, può avere una discontinuità alla chiusura dell'interruttore, questo perché la corrente nel condensatore non è una variabile di stato, da essa non dipende il livello energetico del componente.
Discorso analogo per la tensione nell'induttore, o la corrente in un resistore (a meno che un resistore non disse in serie un induttore, poiché allora sarebbe l'induttore a imporre la corrente di essere continua in quanto variabile di stato).

## POTENZA DISSIPATA ed ENERGIA IMMAGAZZINATA

$$W_1 = \int_0^t p(t)\,dt = \int_0^t \underbrace{Ri^2}_{\text{potenza istantanea}}\,dt$$

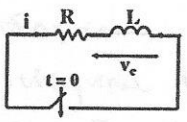
è la potenza ~~istantanea~~ dissipata nel resistore dall'istante 0 all'istante T.

All'istante iniziale, l'energia immagazzinata nel circuito era parte nell'induttore ($\frac{1}{2}Li_0^2$) e parte nel condensatore ($\frac{1}{2}Cv_0^2$), la somma di queste due energie in ogni istante,

$w_2 = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C v^2$ ottengo che la potenza dissipata fino all'istante $t$ dovrà essere uguale a quella che manca all'energia immagazzinata nel condensatore e nell'induttore all'istante $t$ rispetto al valore che avevano inizialmente e che è conosciuto, cioè $\frac{1}{2} L i_0^2 + \frac{1}{2} C v_0^2$.

35'40"

## Esercizi



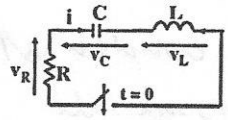

$i(0) = I_0$

$\frac{dv_L}{dt} + \frac{R}{L} v_L = 0$ SOLUZIONE

32'11"

Nel diagramma in videolezione un caso, con tensione e corrente nel circuito e poi con un curva (nera) che rappresenta l'energia immagazzinata nel circuito al generico istante $t$, pari a $\frac{1}{2} L [i(t)]^2 + \frac{1}{2} C [v(t)]^2$. Parte da un certo valore, poiché c'era un certo valore immagazzinato nel circuito, $v_0 = 5\,V$ e $i_0 = 10\,A$. La potenza rende a zero se la potenza dissipata dal resistore. Alla curva viene aggiunta la potenza dissipata, pari al prodotto di $R \cdot i^2$ e integrarlo tra 0 e un istante $t$. Tale curva ha un andamento in crescita poi si assesta. Tale curva è simmetrica all'energia immagazzinata. La loro somma è costante, pari all'energia immagazzinata nel circuito all'istante iniziale. Prova, questa che induttore e condensatore si scambiano: non dissipano, ma possono solo immagazzinare energia e la restituiscono integralmente.

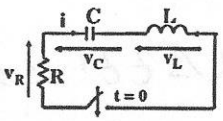
## Esercizi




**Scrivere l'equazione risolvente nella incognita corrente!**

$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0.$ Il risultato non può che essere questo.

## Il circuito R L C




**Determinare le costanti di integrazione in funzione dei valori iniziali nei tre casi: oscillante, critico e sopracritico.**

$k_1$ e $k_2$ nel caso della radice doppia

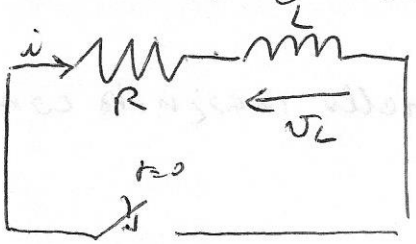
$k$ e $\varphi$ nel caso della radice complessa coniugata

$k_1$ e $k_2$ nel caso delle radici coincidenti.

22.6 Esse si ottengono dalla conoscenza dei valori $v_C(0) = v_0$ e $i_L(0) = i_0$

Esercizio

- Scrivere l'equazione in termini della tensione sull'induttore (che non è una variabile di stato).




$i(0) = I_0$

$$\frac{dv_L}{dt} + \frac{R}{L} v_L = 0$$ (l'eq. caratteristica deve essere la stessa).

Poiché $v_L$ non è una variabile di stato una volta risolta l'equazione non avremo il valore della variabile all'istante iniziale.

Dalla $v_L$ bisognerà calcolare il valore della $i_L$, poiché la tensione sul resistore e la tensione sull'induttore devono essere uguali e opposte, quindi

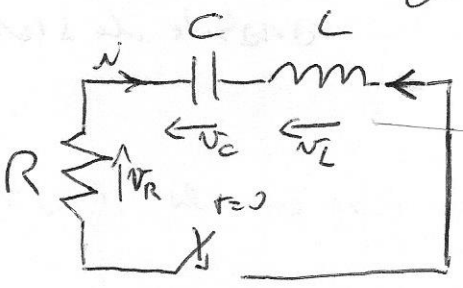
$-v_L = v_R$ e $v_R = Ri$ $\Rightarrow$ $i = \frac{v_R}{R}$ e in questo posso imporre la condizione iniziale all'istante 0.

L'equazione trovata è chiaramente $\frac{dv_L}{dt} + \frac{R}{L} v_L = 0$ e non poteva che essere questa poiché l'equazione caratteristica deve essere la stessa, quindi il coefficiente do dell'equazione ($\frac{R}{L}$) deve essere uguale poiché lo era anche nell'equazione scritta in termini della corrente $i$, che è $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$

In un circuito, una volta determinata l'equazione risolvente per una delle incognite è in pratica determinata l'equazione risolvente per qualsiasi incognita, se il circuito è senza generatore.
Se ci sono generatori devo eseguire qualcosa per una questione dimensionale.
Ma in una evoluzione omogenea l'equazione in una delle variabili è identica all'equazione in qualsiasi altra variabile.

ESERCIZIO

· Scrivere l'equazione risolvente nella incognita corrente



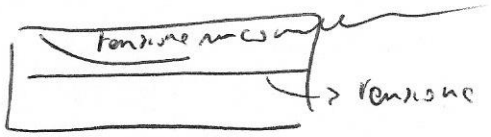

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} = 0$$

Il risultato non può che essere questo, da qualche parte si dovrà derivare, perché i coefficienti $a_1 = \frac{R}{L}$ e $a_2 = \frac{1}{LC}$ devono essere gli stessi della equazione della incognita tensione sul condensatore.

* La caduta $R_N$ passa da un valore e rende a 0.

[Appendice 23.1]

La caduta $R_N$ è la corrente, ricordiamo nello oscilloscopio come differenza fra due andamenti della tensione, essa rende sempre istantaneamente a 0, anche quando la condizione iniziale (08'37") è maggiore della tensione del generatore




L'unica equazione alla maglia è, con la convenzione dell'utilizzatore:

(LKT) $v_R + v_C = E$ — $E$ è la tensione del generatore; spento generatore $= 0$!

e $v_R$ è la d.d.p. nel verso della corrente $N$, in modo da avere sul resistore una convenzione dell'utilizzatore.

Non ci sono nodi, quindi non ci sono equazioni ai nodi, LKC.

Occorre aggiungere la caratteristica dei bipoli; per il condensatore la corrente $N$ è:

$$i = C \frac{d(v_C)}{dt}$$ → tensione sul condensatore

La caratteristica del resistore $v_R$:

$$v_R = RN = RC \frac{dv_C}{dt}$$

Inserendo questo risultato nella equazione alla maglia otteniamo l'equazione

$$v_C + RC \frac{dv_C}{dt} = E$$ , che, ricordando di avere la derivata prima a coefficiente unitario, diventa:

$$\boxed{\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{E}{RC}}$$ → le variabili non sono a potenze

11'40"

si tratta sempre di una equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. La soluzione di una equazione differenziale di questo tipo è come segue: si supponga di cercare l'integrale generale della

Omogenea associata e una sol. particolare dell'equazione non omogenea

omogenea associata

$y' + a_0 y(x) = f(x)$ — non omogenea

$y' + a_0 y(x) = 0$ — omogenea associata

$y_r(x)$ una soluzione della non omogenea

$y_0(x)$ integrale generale dell'omogenea, che dipende da una costante

È evidente che la soluzione

$y(x) = y_r(x) + y_0(x)$ è ancora soluzione della non omogenea, (facendo $y' + a_0 y(x)$ ottengo $f(x)$; facendo $y' + a_0 y(x)$ di cui ottengo $0$) ovvero è una famiglia di soluzioni della non omogenea

$y(x) = y_0(x) + y_r(x)$ dipende da una costante e rappresenta tutte le possibili soluzioni e quindi è l'integrale generale dell'equazione completa.

Abbiamo, nel nostro caso:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Nel nostro caso abbiamo che il termine noto, $f(x)$ = costante, il generatore è in continua.

Quindi

$y' + a_0 y(x) = f(x) = k$ cioè l'equazione ammette come soluzione una costante

Soluzione particolare dell'equazione:

$y_r(x) = \frac{k}{a_0}$ valore costante della $y$, questa soluzione soddisfa l'equazione completa. Questo ponendo $y' = 0$, cioè se la soluzione è costante.

Supponendo $v_c$ costante, la sua derivata è 0, quindi

$v_c = E$

Dunque abbiamo calcolato la soluzione particolare dell'equazione; l'integrale generale dell'omogenea è conosciuto ed è

$v_c(t) = k e^{at} + E$

$k = v_0 - E$, perché $v_0 = k + E$ (18'30")

Il valore di $k$ si determina imponendo che all'istante in cui si chiude la maglia sul condensatore vale il valore imposto dalle condizioni iniziali, cioè $v_0$, quindi $v_0 = k + E \Rightarrow k = v_0 - E$.

Lez 23.1.5

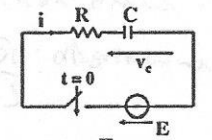
LEZIONE 23

# I bipoli attivi in regime dinamico

Prof. Luciano De Menna
47'19"

Circuito RC con generatore costante
Circuito LRC con generatore costante
Generatori variabili
Forme d'onda periodiche
Esercizi

## RC in evoluzione forzata




$v_c(0) = V_0$

$v_R = Ri = RC\frac{dv_c}{dt}$

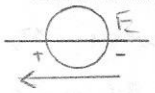
$v_R + v_c = E$

$v_c + RC\frac{dv_c}{dt} = E$

$i = C\frac{dv_c}{dt}$

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{E}{RC}$$

unica causa della inerzia




La tensione del condensatore tende asintoticamente alla tensione del generatore. (>3' Tensione sul generatore di 10 V.

## RC in evoluzione forzata

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{E}{RC}$$

- Differenziali;
- Lineari;
- A coefficienti costanti;
- Non omogenea

$y' + a_0 y(x) = f(x)$ $\quad$ $y' + a_0 y(x) = 0$

$y_r(x)$ una soluz. della non omogenea $\quad$ $y_0(x)$ integrale generale della omogenea

$y(x) = y_0(x) + y_r(x)$

## RC in evoluzione forzata

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{E}{RC}$$

- Differenziali;
- Lineari;
- A coefficienti costanti;
- Non omogenne

$y' + a_0 y(x) = f(x) = k$ $\quad$ l'eq. ammette come soluzione una costante

$y_r(x) = -\frac{k}{a_0}$ } soluz. particolare della equazione

$v_c = E$

$v_c(t) = k\,e^{\alpha t} + E$

Costante di tempo = costante di tempo del circuito quando non deve non Portamento: $\tau = RC$, $\alpha = -\frac{1}{RC}$ (13'40")

23.1

Inseriamo nella evoluzione dinamica dei circuiti dei generatori, dei bipoli attivi: il generatore ideale di tensione costante in continua.

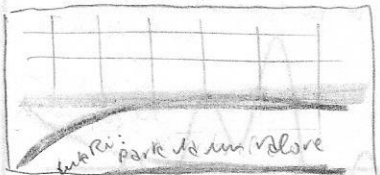
A posto un generatore ideale di tensione in un circuito RC: una serie di un resistore e di un condensatore, con un interruttore che si chiude all'istante $t = 0$.

Il condensatore è inizialmente carico a una tensione $V_0$.

Senza il generatore di tensione il circuito è incapace di sviluppare una dinamica, cioè la corrente nel circuito non è identicamente nulla per effetto della energia inizialmente immagazzinata nel condensatore pari a $\frac{1}{2}CV_0^2$ in questo caso.

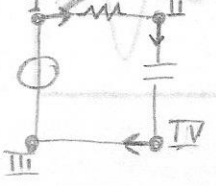
Il motivo per cui questo circuito ha una soluzione non nulla è la presenza del generatore e la presenza della energia immagazzinata nel condensatore.

Dal laboratorio virtuale otteniamo:




10 V = Tensione ai morsetti del generatore (sonda A nodo I)

Andamento della Tensione sul condensatore (sonda B sul nodo II), che parte da 0 e asintoticamente tende a 10 V.




La differenza fra i due segnali è la ddp fra il nodo II e il nodo I che è la caduta di tensione su R, che è proporzionale alla corrente i.

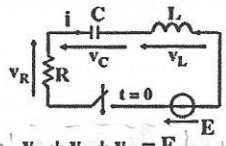
La caduta $R_i$ è, sulla scala prescelta, $\Delta$ = 1 divisione

*

# CIRCUITO RLC in evoluzione forzata, (presenza di un generatore, senza generatore evoluzione libera)

forzata per la presenza di un generatore (libera se il generatore non c'è)

## Circuito R L C in evoluzione forzata




Generatore costante

Eq. alla maglia

$v_R + v_C + v_L = E$

caratteristiche dei bipoli

$v_L = L\frac{di}{dt}$

$i = C\frac{dv_C}{dt}$

$v_R = Ri$

$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + LC\frac{d^2v_C}{dt^2} = E$

$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{E}{LC}$

vd 23.2.a

Dalle equazioni alle maglie e dalle caratteristiche dei tre bipoli abbiamo

$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + LC\frac{d^2v_C}{dt^2}$ da cui

$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{E}{LC}$

in cui compaiono combinazioni dei parametri che abbiamo già incontrato: $\frac{R}{L}$ e $\frac{1}{LC}$.

Se imponiamo che la soluzione particolare sia costante, allora le sue derivate sono nulle, quindi otteniamo $v_C = E$ da cui la soluzione particolare $v_p = E$. come visto nell'esempio RL prima quindi in conclusione la soluzione è del tipo integrale generale della omogenea più una costante E, quella perché la incognita è la tensione sul condensatore.

La tipologia della soluzione può essere diversa a seconda dei parametri R, L, C.

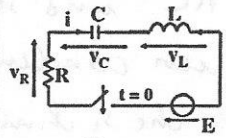
(1) Per $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, avremo caso critico, l'evoluzione è smorzata, con radici dell'equazione caratteristica reali e distinte, entrambe negative

(2) Per $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, le due soluzioni della omogenea sono $e^{\alpha t}$ e $te^{\alpha t}$ dove $\alpha$ è l'unica radice dell'equazione caratteristica

(3) le radici sono complesse e coniugate $\alpha \pm j\beta$ la soluzione, integrale generale della omogenea e quindi della completa ha la forma (3)

(perché i coefficienti dell'eq. di cui sono soluzioni sono reali)

## Circuito R L C in evoluzione forzata




$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{E}{LC}$

$v_p = E$ soluzione particolare imposta costante

$v_C(t) = k_1e^{\alpha_1 t} + k_2e^{\alpha_2 t} + E$ (1)

$v_C(t) = k_1e^{\alpha t} + k_2te^{\alpha t} + E$ (2)

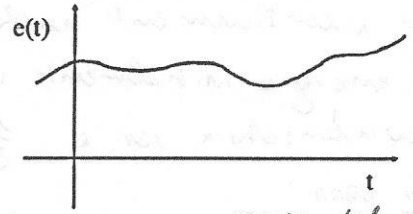
$v_C(t) = ke^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t + \varphi) + E$ (3)

Transitorio

- Le radici complesse devono essere coniugate perché i coefficienti dell'equazione di cui sono soluzione sono reali.

33'09"

## (B, poli) Generatori non costanti

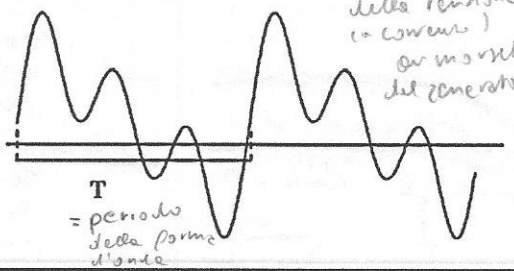



La tensione ai morsetti del generatore non è più costante, ma ha un qualche andamento

quello che vale già la tensione per un generatore di tensione, vale già la corrente per un generatore di corrente

## Generatori non costanti

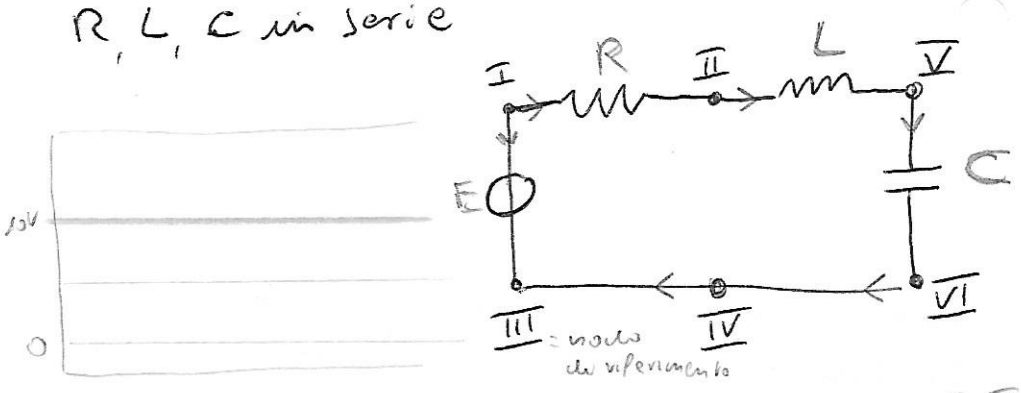
- **Forma d'onda** = andamento temporale della tensione (o corrente) ai morsetti del generatore




23.2

L'oscillazione virtuale del circuito RLC in evidenza nella porta "Wi"

R, L, C in serie




Sonda A su I = DDP tra I e III = = tensione su E.

Sonda B su II = DDP tra nodo II e nodo III, è la tensione sulla serie del bipolo con C e il bipolo resistore.

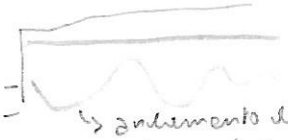
0 → tensione sul condensatore, che rende al suo valore costante pari al valore della tensione del condensatore.

vd (3) e 23.2

La tensione sul condensatore parte da 0, per la condizione iniziale.

Se la sonda B la portiamo sul nodo V vediamo la tensione sul condensatore, che è oscillante smorzata.

Per vedere la corrente occorre portare la sonda B nel nodo II e visionare sul canale 1 la differenza A - B, il che ci fa vedere l'opposto della tensione sul resistore, quindi occorre considerare il segno ed eventualmente amplificare; otteniamo



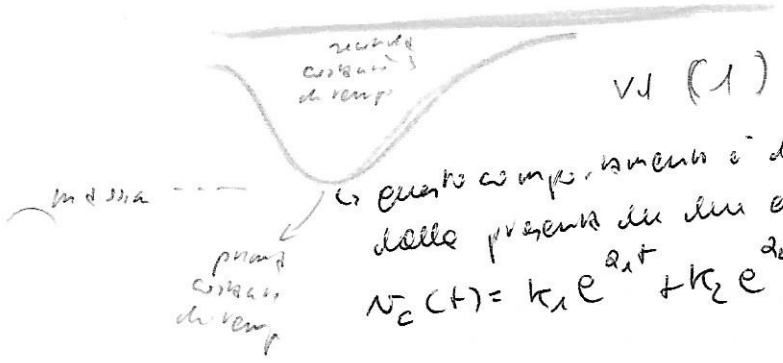
0 → andamento della corrente nel resistore e quindi l'unica corrente presente nell'unica maglia. Essa parte da 0, oscilla e viene a zero.

23.2.d

../..

Imponendo una condizione iniziale $\neq 0$

Con parametri diversi non può non esserci oscillazione e vogliamo un regime sopracritico:




vd (1) e 23.2

Il generico comportamento è dato dalla presenza di due esponenziali, $v_c(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \bar{E}$ 32'

La derivata di $v_c(t)$, che è proporzionale alla corrente nel condensatore, a regime, all'infinito, deve valere zero. La derivata di una costante, $\bar{E}$ è quindi $v_R = 0$, cioè la corrente va a 0 per $t \to \infty$

La derivata di $v_c(t)$ è $i(t)$.

23.2 5

# BIPOLI GENERATORI NON COSTANTI

33'09

La tensione ai morsetti non è costante, ma varia nel tempo.

È importante la forma d'onda e il periodo T per le forme d'onda che si ripetono ogni un tempo T.

Poi occorre distinguere fra generatori con valor medio diverso da zero e generatori con valor medio uguale a zero: il valor medio è calcolato come

$$A_m = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt$$

A volte si definisce un valor medio nel semiperiodo, per onde diverse da 0, parametro da scarsa importanza per caratterizzare la forma d'onda.

È invece molto importante un'altra grandezza calcolata nella forma d'onda, che è il valore efficace che è:

$$A = \frac{1}{T}\sqrt{\int_0^T a^2(t)\,dt}$$ ; permane

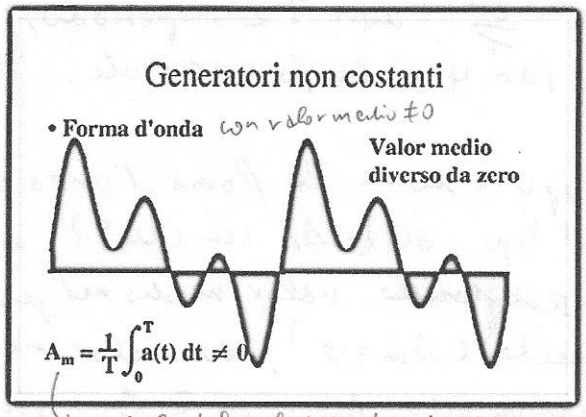
la periodicità, il valore efficace A è in qualche modo il valor medio del quadrato della funzione.

Se la forma d'onda ha valor medio nullo, il suo valore efficace non è nullo.

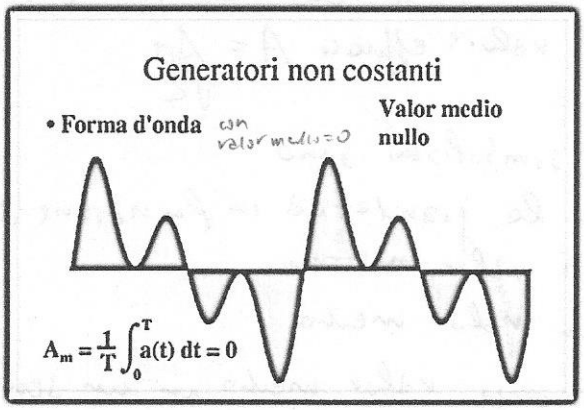
Si ricorda che la potenza dissipata in un resistore è proporzionale al quadrato della corrente.

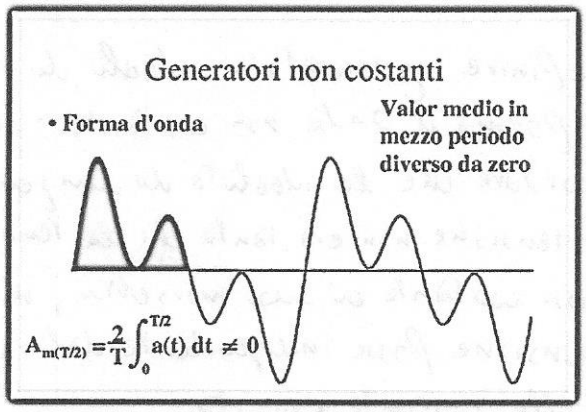
Quando la corrente ha un andamento sinusoidale, il valore efficace è il valore della grandezza alla quale è proporzionale la radice quadrata della potenza.

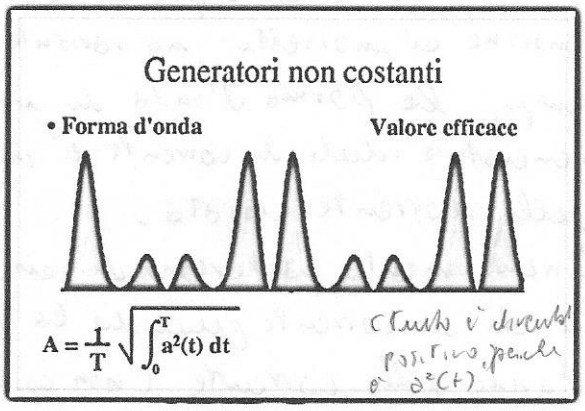
Ecco perché il valore efficace è una grandezza integrale molto importante per definire le grandezze periodiche




calcolo del valor medio, somma algebrica delle aree civili

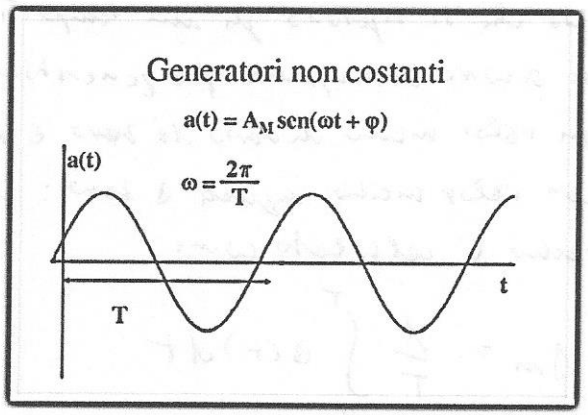


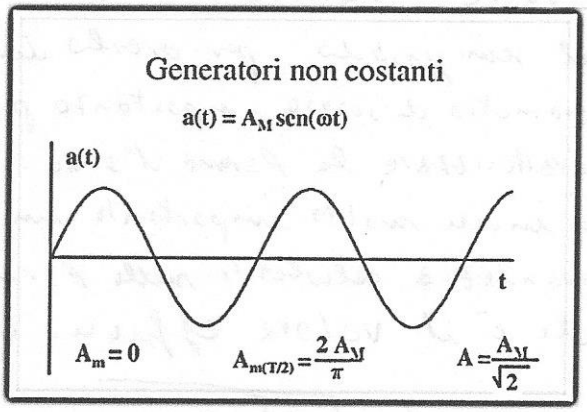




quadrato è diverso positivo, perché è $a^2(t)$

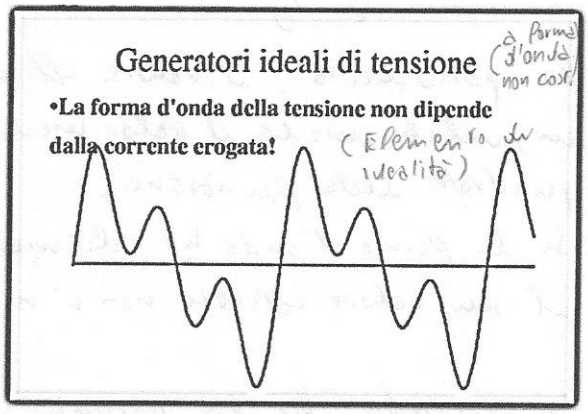
In particolare, tra i generatori a valor medio nullo, e a valor medio nel semiperiodo non nullo, sono di grandissima importanza le forme d'onda sinusoidali, come $a(t) = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, con la frequenza angolare $\omega = \frac{2\pi}{T}$, dove $T$ è il periodo, la fase $\varphi$ è la fase iniziale.



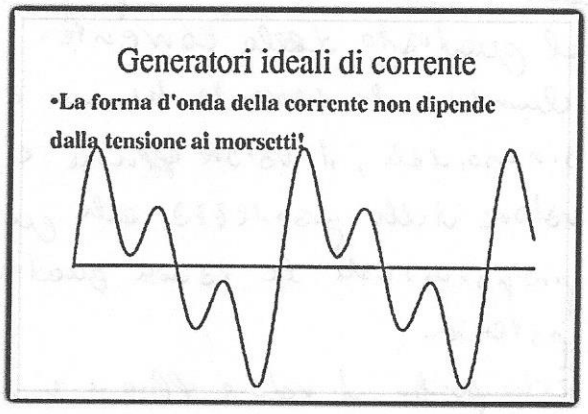

Oppure come la forma d'onda sinusoidale del tipo $a(t) = A_M \operatorname{sen}(\omega t)$, con valor medio nel periodo nullo ($A_m = 0$), con valor medio nel semiperiodo $A_{m(T/2)} = \frac{2 A_M}{\pi}$, ovvero due volte il valor massimo diviso $\pi$, il valore efficace $A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$.




I simboli sono:
- a la grandezza in funzione del tempo
- $A_M$ valor massimo
- $A_m$ valor medio
- $A_{m(T/2)}$ valor medio in un semiperiodo
- $A$ valore efficace

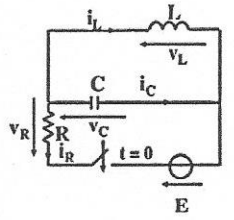



Definire generatore ideale di tensione a forma d'onda non costante: occorre ricordare che la idealità di un generatore di tensione non era tanto che la tensione fosse costante ai suoi morsetti, ma che la tensione fosse indipendente dal valore della corrente erogata.
Quindi, non essendo più costante la tensione ai morsetti, ma variante nel tempo, la forma d'onda di un generatore ideale di tensione è indipendente dalla corrente erogata.
Analogamente parleremo di generatore ideale di corrente quando la forma d'onda della corrente (non costante nel tempo) non dipende dalla tensione ai morsetti.
In entrambi i casi, dal generatore



sono in grado di erogare potenza infinita, perché la corrente e la tensione ricevente sono indipendenti dalla tensione e dalla corrente

## Esercizi




**Per il circuito in figura determinare l'equazione risolvente nella incognita $i_L$.**

Esercizio con induttore e condensatore in parallelo, questo parallelo è in serie al resistore.
Il generatore di tensione $\mathcal{E}$ è costante e all'istante $t=0$ si chiude un interruttore.

È chiesta l'equazione risolvente nella incognita $i_L$.

LEZIONE 24

# Introduzione al metodo simbolico

Prof. Luciano De Menna
44'27"

Perché generatori sinusoidali?
Il circuito LR con un generatore sinusiodale
La soluzione particolare e l'integrale completo
Il metodo simbolico

## Perchè generatori sinusoidali?

**Serie di Fourier**

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t)$$

**J. B. Fourier (1768 - 1830)**

$$\omega = 2\pi/T$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt$$

## Perchè generatori sinusoidali?

**Serie di Fourier**

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t)$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T a(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

## Perchè generatori sinusoidali?

**Serie di Fourier**

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T a(t)\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt$$

La scelta di generatori sinusoidali ha due ragioni:
1) l'esistenza di un teorema dovuto a Fourier, che stabilisce che ogni funzione periodica di periodo T, è sviluppabile in una somma di funzioni di tipo sinusoidale di periodo (o frequenza o pulsazione) diverso.

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t)$$

con $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

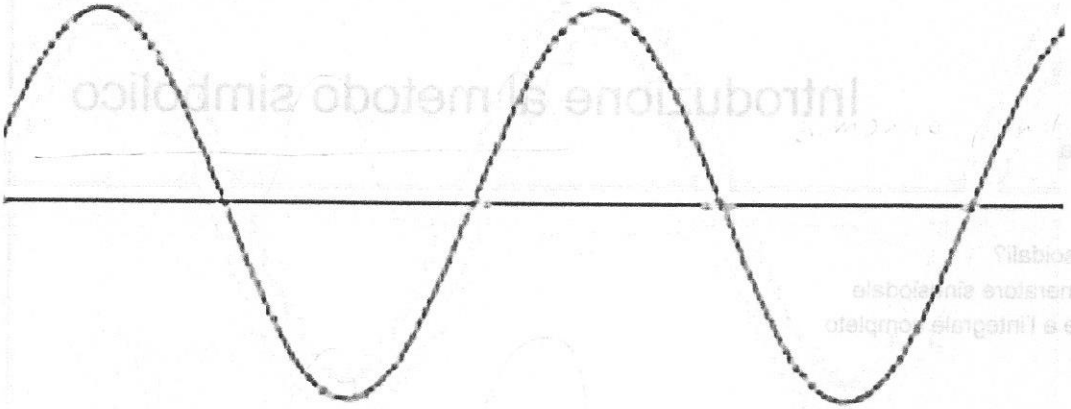
$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt \quad \text{, valor medio}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T a(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

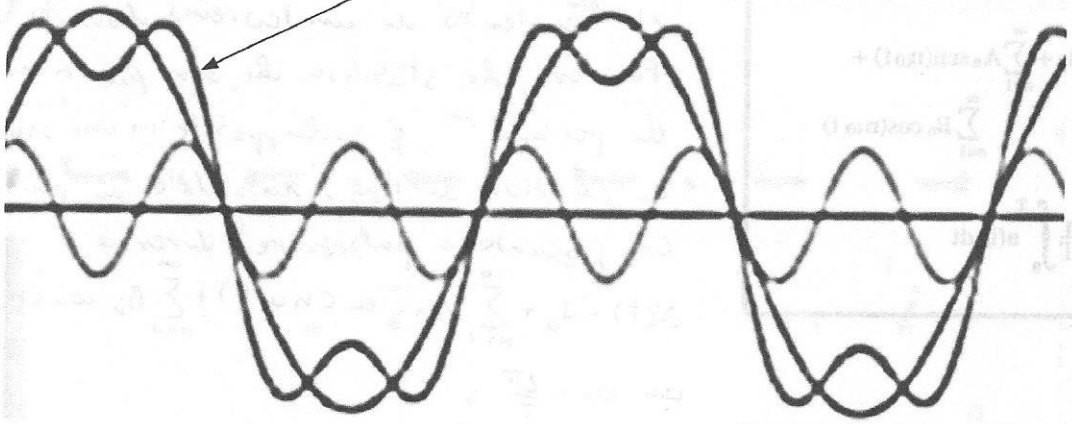
$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T a(t)\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt$$

La serie di Fourier ci consente di sviluppare una funzione periodica di periodo T in una somma di armoniche, così come vengono chiamate le funzioni sinusoidali di frequenza sempre crescente che compongono la somma.

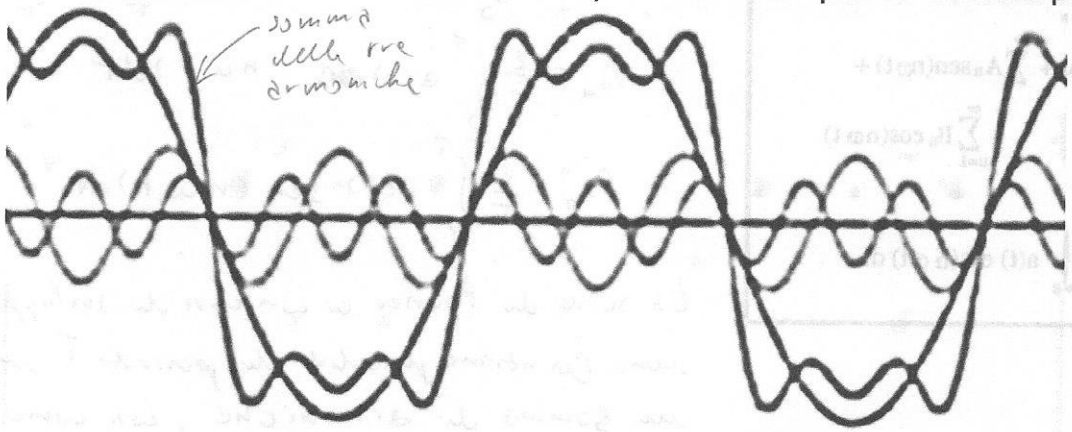
L'armonica fondamentale, di frequenza un certo T:



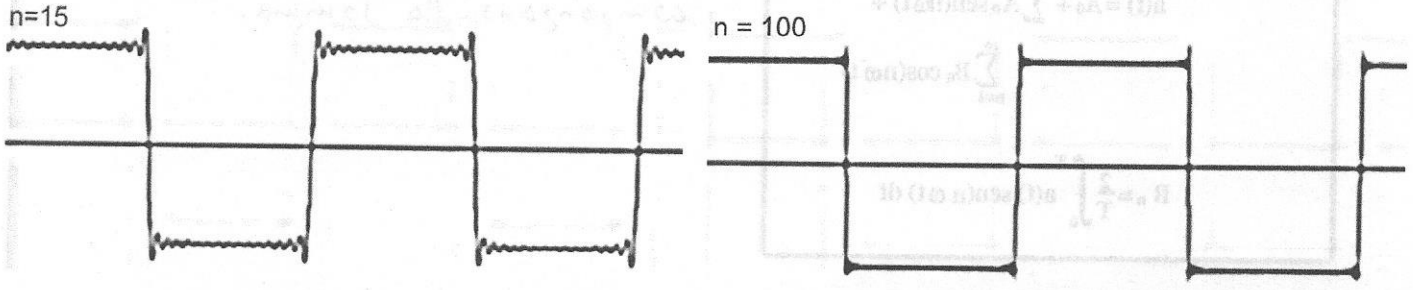
Si aggiunge all'armonica fondamentale una armonica di frequenza 3ω e ampiezza 1/3 della precedente: questa è la somma della fondamentale con la seconda armonica.



Si aggiunge ancora una armonica di frequenza 5ω e ampiezza 1/5 della precedente:




Si noti come la funzione somma tenda ad essere la funzione quadra, che risulta evidente per 15 armoniche e 100 armoniche come da figura sotto:



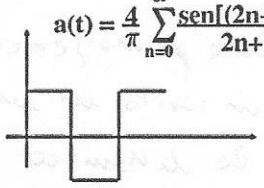

Questo può rappresentare un esperimento di verifica della serie di Fourier.

Questo risultato implica che in un sistema lineare a somma di sollecitazioni corrisponde la somma degli effetti. Quindi avendo un generatore di forma d'onda qualsiasi periodica di periodo T, agente su un circuito con componenti lineari, poiché le equazioni di Kirchhoff sono anch'esse lineari, si può immaginare di applicare al posto del generatore con forma d'onda generica di periodo T, una somma di armoniche, e quindi sinusoidali, di frequenza sempre crescente, in un numero teoricamente infinito, ma nella realtà un numero limitato.
Posso dunque immaginare la forma d'onda originaria scomposta nelle sue armoniche.
Lo studio dei generatori di tipo sinusoidale ci fornisce informazioni sul comportamento dei circuiti in tutti i regimi periodici perché dal comportamento del regime sinusoidale sarà determinato attraverso una serie del tipo di Fourier il comportamento a una sollecitazione periodica di tipo qualsiasi.

## Un esempio

**Serie di Fourier**

$$a(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2n+1)\omega t]}{2n+1}$$



Onda quadra

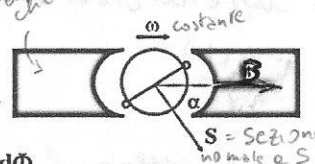
Perché focalizzarci sui 14'00" - 19'50"

## I generatori

Avvolgimento che si muove in un campo magnetico

è sede di una f.e.m.

$\Phi$ flusso di B attraverso una superficie che si appoggia al contorno della spira




o singola spira avvolta sul rotore

Legge di Lenz:

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \Phi = B\,S\cos\alpha \qquad \alpha = \omega t$$

$\Phi$ = flusso di B

costante

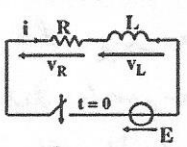
$$e(t) = B\,S\,\omega\,\text{sen}(\omega t) = E_M\,\text{sen}(\omega t)$$

non è funzione del tempo

Legge di Faraday-Neumann-Lenz

Una f.e.m. di tipo sinusoidale, non di tipo sinusoidale se $\omega$ non è costante.
Principio dei generatori elettrici

## RL con forzamento sinusoidale




$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\,i = \frac{e(t)}{L}$$

equazione completa

$$e(t) = E_M\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = k\,e^{-\frac{R}{L}t} + i_r$$

integrale generale della soluzione sul della omogenea

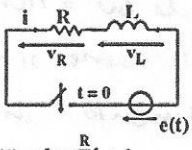
$i_r = ?$ L'sol. particolare della completa

$\alpha \neq 0$ per avere

$i_r$ da definire la chiusura quando $\vec{E}$ è massima, ma chiudere quando $\vec{E}$ ha un valore qualsiasi

30'40"

## RL con forzamento sinusoidale




$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\,i = \frac{e(t)}{L}$$

$$e(t) = E_M\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = k\,e^{-\frac{R}{L}t} + i_r \qquad i_r(t) = I_M\,\text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi)$$

incognita

$$\omega I_M\,\text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi + \pi/2) + \frac{R}{L}\,I_M\,\text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi) = \frac{E_M}{L}\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$\frac{d}{dt}$ con il coseno = $-\text{sen}(\ldots + \frac{\pi}{2})$

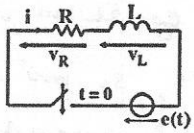
$i$

sfasamento della corrente rispetto alla tensione

In
$\varphi$ = sfasamento della corrente rispetto alla tensione
$\omega t + \alpha$ = fase istantanea della tensione e di $i_r$

1) Da serie di Fourier, se il circuito è lineare allora si hanno informazioni in un regime periodico qualsiasi.

## RL con forzamento sinusoidale




$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L}$$

$$e(t) = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

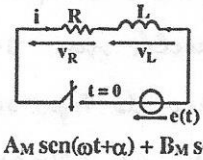
$$\omega I_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha - \varphi + \pi/2) + \frac{R}{L} I_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha - \varphi) = \frac{E_M}{L} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

, del tipo:

$$A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + B_M \operatorname{sen}(\omega t + \beta) = C_M \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)$$

, che è somma di due grandezze sinusoidali omogenea a una grandezza sinusoidale, di stessa pulsazione $\omega$, ma con ampiezze e fasi diverse

## RL con forzamento sinusoidale




$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L}$$

$$e(t) = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

se vale →

$$A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + B_M \operatorname{sen}(\omega t + \beta) = C_M \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)$$

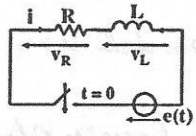
allora →

$$C_M^2 = A_M^2 + B_M^2 + 2 A_M B_M \cos(\alpha - \beta)$$

per $\omega t$ →

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_M \operatorname{sen}\alpha + B_M \operatorname{sen}\beta}{A_M \cos\alpha + B_M \cos\beta}\right)$$

## RL con forzamento sinusoidale



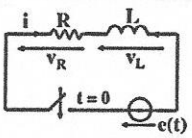

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L}$$

$$e(t) = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$\omega I_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha - \varphi + \pi/2) + \frac{R}{L} I_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha - \varphi) = \frac{E_M}{L} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$I_M = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$$

## RL con forzamento sinusoidale




$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L}$$

$$e(t) = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$I_M = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$i(t) = k\, e^{-\frac{R}{L}t} + I_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha - \varphi) \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$$

$$i(0) = k + I_M \operatorname{sen}(\alpha - \varphi) = I_0$$

**

2) I generatori sinusoidali non sono una astrazione ma sono la maggior parte dei generatori, almeno per quelli di potenza, che si incontrano effettivamente e concretamente 21'22"

Per questo, come primo generatore non costante in senso in un circuito per studiarne la dinamica è un generatore di tipo sinusoidale

---

RL con FORZAMENTO SINUSOIDALE

equazione differenziale completa:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L}$$

Integrale generale della soluzione:

$$i(t) = k\, e^{-\frac{R}{L}t} + i_R$$

1 grado di libertà

con $i_R$ soluzione particolare della completa, $i_R$ da determinare con il generatore costante!

Affermando che la soluzione particolare è costante affermiamo di cercare una soluzione particolare $i_R$ che avesse lo stesso andamento temporale del forzamento, cioè del generatore inserito nella rete.

Possiamo fare lo stesso ragionamento e cercare una soluzione di tipo sinusoidale.

In fasorismo è mostrato l'andamento del circuito (vd.)

La corrente $i_R$, dall'esperienza stessa di laboratorio, risulta essere di tipo sinusoidale così come sinusoidale è il generatore (o forzamento) introdotto nella rete.

La soluzione apparente è del tipo

$$i_r(t) = I_R \operatorname{sen}(\omega t + \alpha - \varphi)$$

fase istantanea della corrente

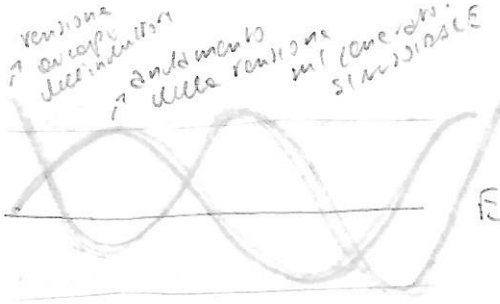
sfasamento della corrente

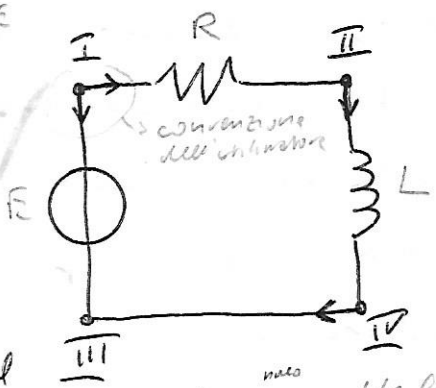
24.4

# RL con forzamento sinusoidale

Appunti 24.4.2

## Andamento in laboratorio virtuale




La tensione ai morsetti del generatore è sinusoidale → sonda A = 1 (nero) => ddp tra I e III (a vuoto)

Tensione ai capi dell'induttore → sonda B = 2 => tensione ai morsetti dell'induttore. Il nodo III e IV sono collegati da un corto circuito e sono allo stesso potenziale

Notare che la tensione ai capi dell'induttore è $L \frac{di}{dt}$, se ne faccio l'integrale, a meno della costante L, avrei l'andamento della corrente all'interno del circuito.

$$i_L = \int L \frac{di}{dt}$$

Gli oscilloscopi hanno in genere una scheda integratrice, che integra il segnale in ingresso, in pratica abbiamo



Vale la curva della tensione verde, che è l'andamento della corrente a meno della costante L data dalla presenza dell'induttore, della corrente all'interno del circuito

L'andamento della tensione ai capi dell'induttore, ad esclusione del punto in cui è avvenuto il transitorio, è una sinusoide.
La stessa cosa avviene per la corrente che circola nel circuito.
Quindi il valore $i_R$ come soluzione sinusoidale, soluzione particolare della equazione completa, è confrontabile da quella generale 28'40"

A REGIME, LA CORRENTE, QUINDI LA TENSIONE NEI RIPOSI PRESENTI NEL CIRCUITO TENDE AD ASSUMERE UN ANDAMENTO DI TIPO SINUSOIDALE, COSÌ COME LO È IL GENERATORE CO FORNENTO INTRODOTTO NELLA RETE

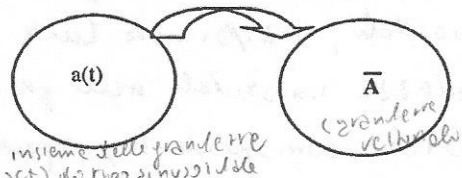
24.4.5

35'50"

Assiamo due insieme di grandezze

## Il metodo simbolico

**Corrispondenza biunivoca**




insieme delle grandezze a(t) del tipo sinusoidale

Devono essere conservate alcune operazioni

## Il metodo simbolico

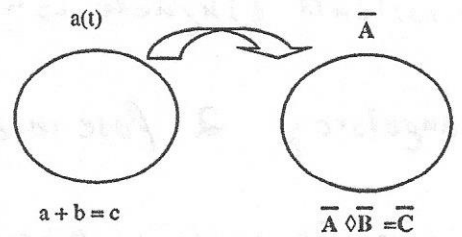
- Moltiplicazione per una costante
- Somma
- Derivazione

→ data della corrente calcolarne la sua tensione ai morsetti ($V = R\,i$)

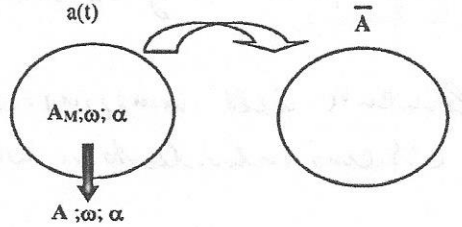
→ somma delle tensioni in una maglia delle rete o la correnti entranti in un nodo

→ Per le caratteristiche dei due bipoli, induttore e condensatore

## Il metodo simbolico




## Il metodo simbolico




Inserirle nelle equazione e vedere se esse fornisce le condizioni che determinano $I_n$ e $\varphi$, che sono le incognite.

Ora seguiamo i conti esplicitati, che saranno sostanzialmente del metodo delle grandezze simboliche, dei passaggi che permetteranno di evitare proprio questi conti.

* Abbiamo $\beta = \arctg\left(\frac{A_n \sin\delta + B_n \sin\beta}{A_n \cos\delta + B_n \cos\beta}\right)$, ..., arriviamo ad avere:

$$I_n = \frac{E_n}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

e questo prima è nota la soluzione particolare:

$$i(t) = k e^{-\frac{R}{L}t} + I_n \sen(\omega t + \delta - \varphi)$$

e abbiamo trovato l'integrale della soluzione completa, che dipende solo dalla costante $k$, la determinare la quale occorre imporre che:

$i(0^+) = i(0^-)$

$i(0) = k + I_n \cdot \sen(\delta - \varphi) = I_0$,

cioè che all'istante ~~0~~ iniziale ~~essa~~ il valore ~~corrente~~ corrente con il livello energetico dell'induttore all'istante iniziale, cioè il valore della corrente all'istante zero.

Questa relazione ci consente di determinare $k$ e di trovare la particolare soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali nel circuito, quindi la soluzione del problema.

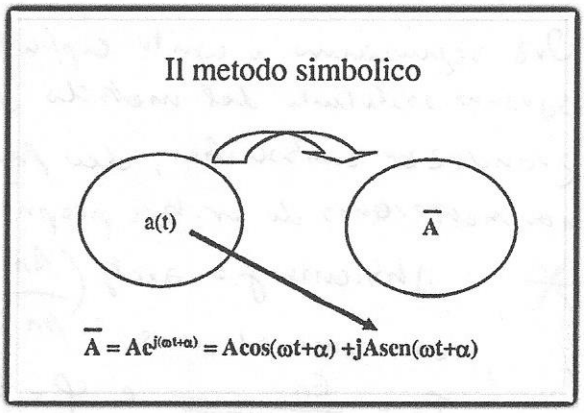
Questa soluzione, per il modo in cui è stata scelta, è anche la soluzione di regime perché sperimentalmente abbiamo visto che a regime, la tensione o la corrente nell'induttore tende ad essere di tipo sinusoidale

**

24.5

# IL METODO SIMBOLICO è un sistema più veloce per effettuare una elaborazione

35'50"




Con il metodo simbolico possiamo, invece di lavorare sulle grandezze sinusoidali, trasformare tutte le grandezze sinusoidali nelle grandezze simboliche corrispondenti, operare sulle grandezze simboliche attraverso gli operatori corrispondenti, ottenere il risultato simbolico e poi tornare al valore nell'insieme delle grandezze sinusoidali.

Questo lavoro è utile se lavorare sull'insieme simbolico è più semplice che operare sull'insieme di partenza.

Una grandezza sinusoidale è individuata da tre parametri:

$A_n$ valore massimo; $\omega$ pulsazione angolare; $\alpha$ fase iniziale

$A_n \sin(\omega t + \alpha)$ è la funzione sinusoidale.

Al posto di $A_n$, verrà usato $A$, il valore efficace, $A = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$

quindi la grandezza sinusoidale è, in notazione abbreviata

**$A$ valore efficace; $\omega$ pulsazione angolare; $\alpha$ fase iniziale**

L'insieme di arrivo dovrà essere anch'esso con tre gradi di libertà, individuato da tre parametri.

L'insieme di arrivo è quello delle funzioni complesse di variabile reale t del tipo

$$\bar{A} = A e^{j(\omega t+\alpha)} \xrightarrow{\text{attraverso la formula di Eulero}} A\cos(\omega t+\alpha) + jA\,\text{sen}(\omega t+\alpha)$$

Se facciamo corrispondere ad $a(t)$ il coefficiente dell'immaginario di $\bar{A}$ possiamo far vedere che le operazioni che eseguiamo individuano si conservano.

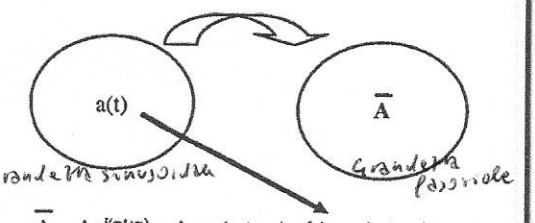
LEZIONE 25

# Vettori Rotanti

Prof. Luciano De Menna
46'31"

Ancora sul metodo simbolico
Impedenza ed ammettenza
Vettori rotanti
Esercizi

## Il metodo simbolico




$$\bar{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jA\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$$

I due insiemi hanno la stessa dimensione

dipendono dalle stesse tre parametri: $A$, $\omega$, $\alpha$

$A$ valore efficace $\quad A = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$ ; $A_m$ valore massimo

## Il metodo simbolico

$$\bar{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jA\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$$

**Moltiplicazione per una costante**

$$R\bar{A} = RAe^{j(\omega t+\alpha)} = RA\cos(\omega t+\alpha) + jRA\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$$

es: $V = R\,i$ → costante, → sinusoidale

## Il metodo simbolico

$$\bar{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jA\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$$

**Somma**

$$Ae^{j(\omega t+\alpha)} + Be^{j(\omega t+\beta)} = A\cos(\omega t+\alpha) + B\cos(\omega t+\beta) + j(A\mathrm{sen}(\omega t+\alpha) + B\mathrm{sen}(\omega t+\beta))$$

Ancora sul metodo simbolico per calcolare la soluzione a regime quando il forzamento è di tipo sinusoidale, con generatori sinusoidali.

Avevamo trovato una relazione biunivoca fra i due insiemi, quello delle grandezze sinusoidali (ampiezza $A_m$, pulsazione $\omega$ e fase iniziale $\alpha$) e quello delle grandezze simboliche $\bar{A}$ (fasori o vettori).

La relazione biunivoca manteneva le operazioni di somma, la moltiplicazione per una grandezza sinusoidale e la grandezza definite fasori.

Quindi si dice di aver determinato un risultato nella forma fasoriale, da riportarlo nella grandezza sinusoidale.

Il candidato per l'insieme dei fasori è

$$\bar{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} \quad \text{(per la formula di Eulero)} \quad = A\cos(\omega t+\alpha) + jA\,\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$$

$A$ valore efficace, $\omega$ pulsazione, $\alpha$ fase iniziale

Le operazioni di moltiplicazione per una costante, la somma e la derivazione sono mantenute.

La moltiplicazione fra due grandezze sinusoidali non si mantiene.

Usando il valore efficace $A$ invece del valor medio $A_m$, per ottenere la funzione sinusoidale effettiva basta moltiplicare per $\sqrt{2}$

## Il metodo simbolico

$$\overline{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jA\,sen(\omega t+\alpha)$$

**Derivazione**

$$\frac{d}{dt}Ae^{j(\omega t+\alpha)} = -\omega A\,sen(\omega t+\alpha) + j\omega A\cos(\omega t+\alpha)$$

La grandezza sinusoidale si ottiene sfasando di $\frac{\pi}{2}$ => di seno a coseno, e moltiplicando per $\omega$.

## Il metodo simbolico

$$\overline{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jA\,sen(\omega t+\alpha)$$

**La moltiplicazione tra due grandezze del tipo a(t) non si conserva!**

$$\begin{aligned} Ae^{j(\omega t+\alpha)}Be^{j(\omega t+\beta)} = {} & A\cos(\omega t+\alpha)\,B\cos(\omega t+\beta) + \\ & -A\,sen(\omega t+\alpha)\,B\,sen(\omega t+\beta) + \\ & + j[A\cos(\omega t+\alpha)B\,sen(\omega t+\beta) + \\ & + B\cos(\omega t+\beta)A\,sen(\omega t+\alpha)] \end{aligned}$$

## In conclusione

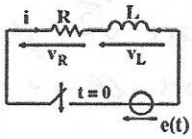
$$\overline{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jA\,sen(\omega t+\alpha)$$

- **Dalle grandezze sinusoidali si passa ai fasori**
- **Si opera nel dominio dei fasori**
- **Si ritorna alle grandezze sinusoidali**

~~A + a(t)~~ Non ha senso sommare un fasore a una grandezza sinusoidale

Si nota che la derivazione si è trasformata nella operazione algebrica di moltiplicazione per $j\omega$.
Si passa quindi da equazioni differenziali a equazioni algebriche in variabile complessa.
L'elaborazione, nonostante ciò, si è semplificata.

## RL con forzamento sinusoidale




$e(t) = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$

$I_M = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$; $\varphi = \arctan\frac{\omega L}{R}$

$i(t) = k e^{-\frac{R}{L}t} + I_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha - \varphi)$

$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I}$ (LKT alla unica maglia)

$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$

$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L}$

(Valore medio)

$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$ (Fase iniziale)

$R\bar{I}$ è la caduta in termini fasoriali sulla resistenza R.

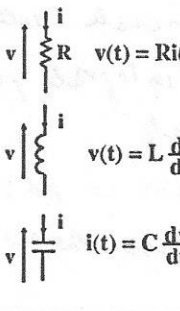
$j\omega L\bar{I}$ è la caduta sull'induttore L in termini fasoriali

Nella RL con forzamento sinusoidale avevamo trovato una soluzione con non pochi calcoli.

Trattando tutto in termini fasoriali abbiamo che deve valere $\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I}$, che è l'equazione in termini fasoriali, data dalla 2ª legge di Kirchhoff alla unica maglia presente.

$R\bar{I}$ è la caduta in termini fasoriali sulla resistenza R; $j\omega L\bar{I}$ è la caduta in termini fasoriali sull'induttore L.

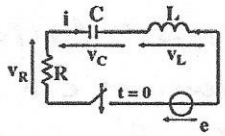
## Corrispondenze




TERMINI FASORIALI

Ricavato in relazione, posso scrivere $\bar{V} = -\frac{j}{\omega C}\cdot\bar{I}$ (è dovuto al fatto che un j al denominatore risale al numeratore con un segno −)

## Circuito R L C in evoluzione forzata




$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{e(t)}{RLC}$

$i_r = ?$

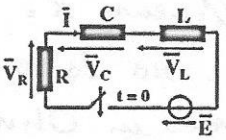
$i(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} + i_r$

$i(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t} + i_r$

$i(t) = k e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \varphi) + i_r$

Circuito RLC in evoluzione forzata, usando i fasori + quindi in termini fasoriali

## Circuito R L C in evoluzione forzata




$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{e(t)}{RLC}$

$i_r = ?$

$e(t) = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0) \rightarrow \bar{E} = E\, e^{j(\omega t + \alpha_0)}$

$i(t) = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0 - \varphi) \rightarrow \bar{I} = I\, e^{j(\omega t + \alpha_0 - \varphi)}$

$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$

valore efficace

$e(t) = E_m \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0) \rightarrow \bar{E} = E\, e^{j(\omega t + \alpha_0)}$

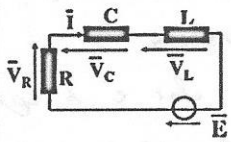
$i(t) = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_0 - \varphi) \rightarrow \bar{I} = I\, e^{j(\omega t + \alpha_0 - \varphi)}$

e quindi in termini fasoriali l'equazione è:

$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$, che (a regime, interruttore chiuso) può essere vista come trasformazione dell'equazione, oppure direttamente sul circuito.

Il fasore di $\bar{E}$ (legge di Kirchhoff alla maglia) è pari alla caduta su R, che è $R\bar{I}$, più la caduta su L che è $j\omega L\bar{I}$, più la caduta su C che è $-j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$.

## Circuito R L C in evoluzione forzata




$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

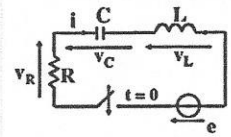
$$i_r(t) = \sqrt{2}\,\frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha_0 - \varphi)$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left[\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right]$$

Da tale relazione fasoriale si ricava $\bar{I}$ e da questo $i_r(t)$.
Si noti il moltiplicatore $\sqrt{2}$ per la relazione tra valore efficace e valore massimo.

$\varphi = \mathrm{arctg}\left[\frac{\text{coefficiente dell'immaginario del denominatore di } \bar{I}}{\text{parte reale del denominatore di } \bar{I}}\right]$

## Circuito R L C in evoluzione forzata




$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{c(t)}{RLC}$$

$$i(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} + i_r$$

$$i(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t} + i_r$$

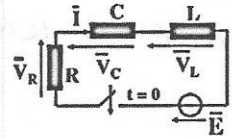
$$i(t) = k e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t + \varphi_0) + i_r$$

$$i_r(t) = \sqrt{2}\,\frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha_0 - \varphi)$$

Possiamo ottenere la soluzione di regime all'integrale generale della omogenea più ottenere l'integrale generale dell'equazione completa.
In 3 casi, $i_r$ è calcolato coi fasori.
Segue la verifica in laboratorio (28')

A questo punto diamo un nome al numero complesso che ha permesso il calcolo.

## Impedenza




$$\bar{E} = Z\bar{I}$$

**Impedenza Z**

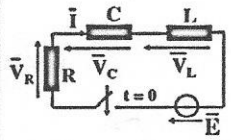
$$\dot{Z} = R + jX$$

**R = resistenza**
**X = reattanza**

$$X = (\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

IMPEDENZA: è il rapporto fra fasore che rappresenta una tensione e il fasore che rappresenta la corrente. È indicata con il simbolo Z ed è un numero complesso; ad indicazione che è un numero complesso si pone un • sopra la Z ottenendo $\dot{Z}$, anche se non necessario. La sua parte reale è detta resistenza e la sua parte immaginaria, il coefficiente $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ è detto reattanza. Sia la resistenza che la reattanza si misurano in Ohm.

## Ammettenza




$$\bar{I} = Y\bar{E}$$

**Ammettenza Y**

$$\dot{Y} = G + jS$$

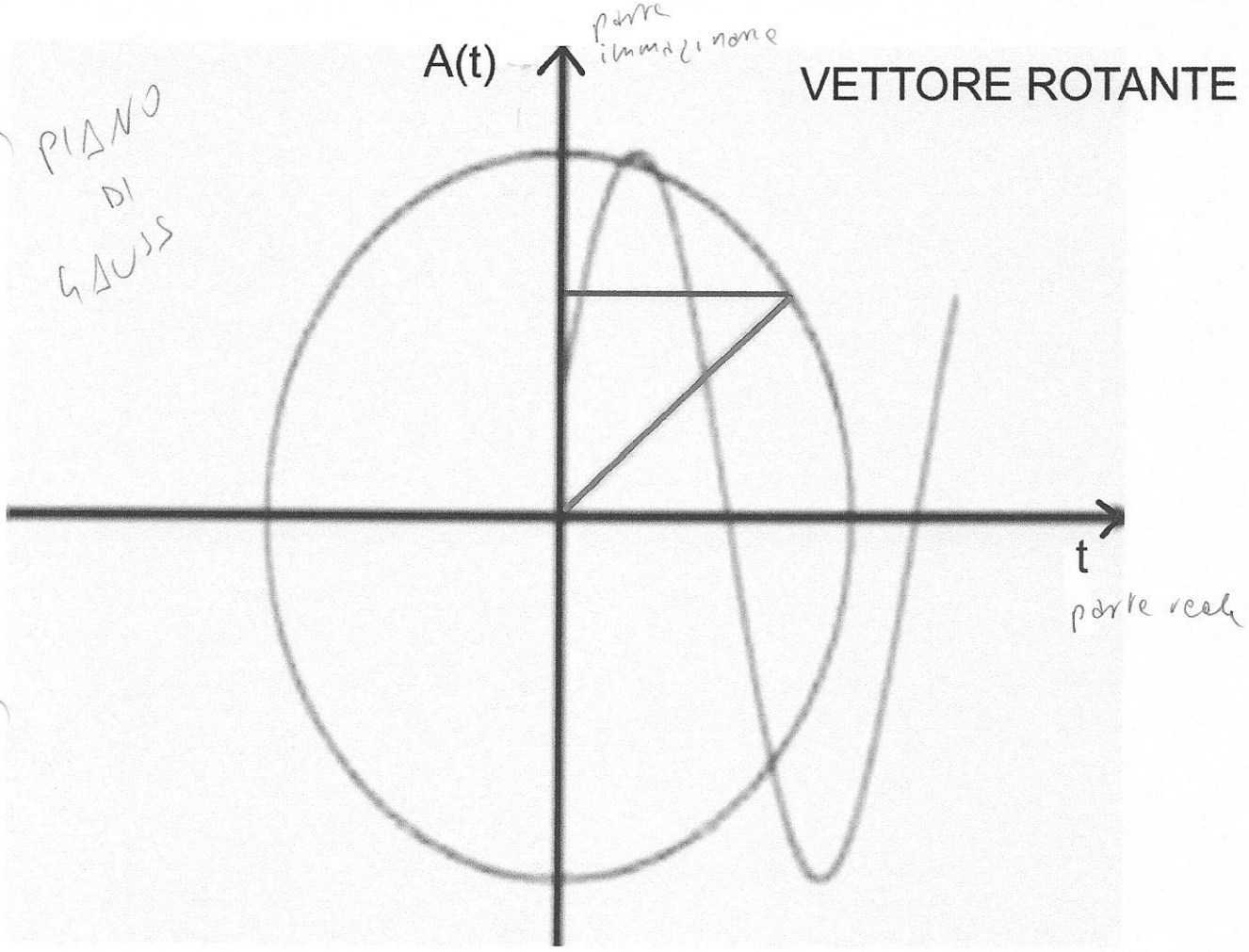
**G = conduttanza**
**S = suscettanza**

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

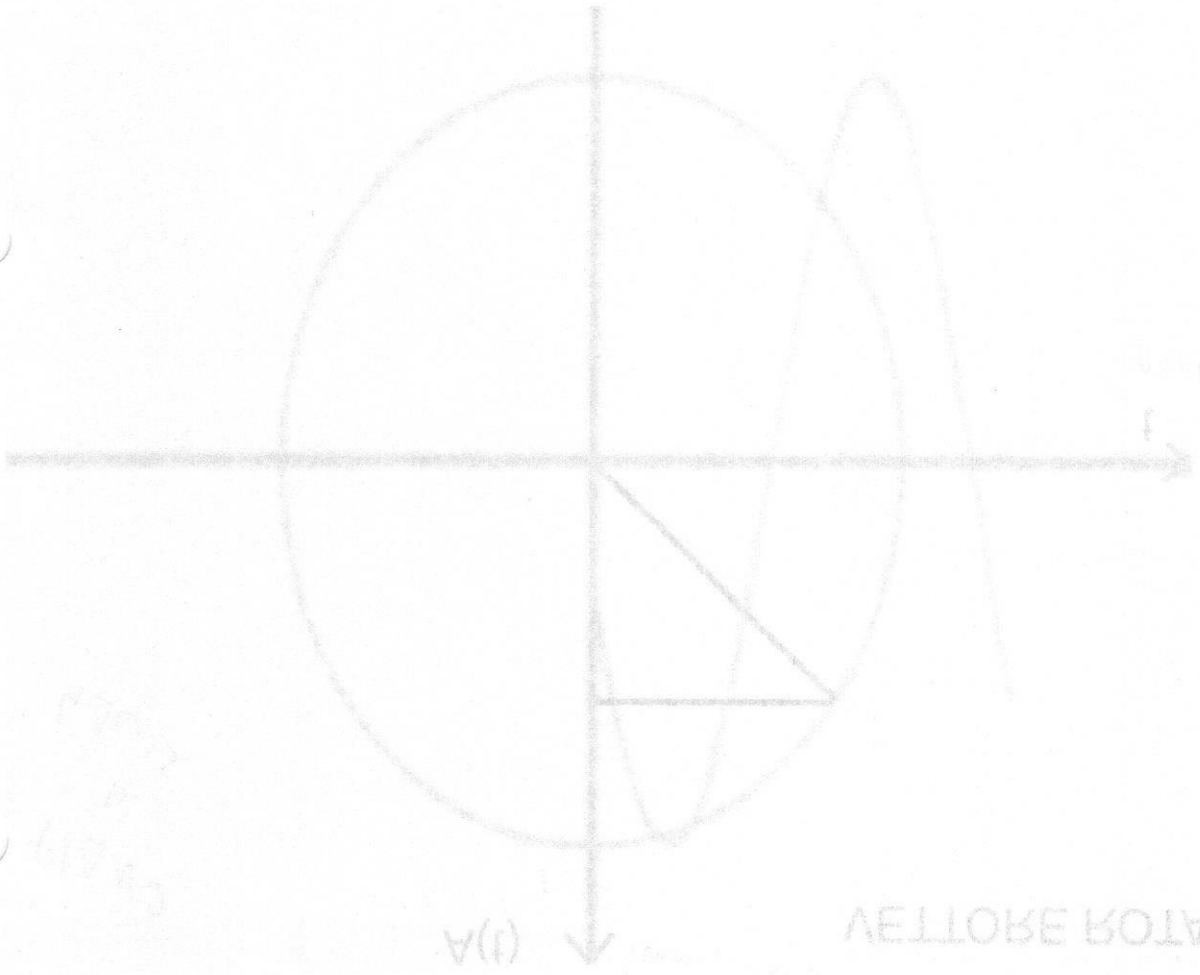
$$S = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

"L'inverso dell'impedenza"

AMMETTENZA: il rapporto fra il fasore della corrente e il fasore della tensione, ha simbolo Y, con parte reale detta conduttanza e coefficiente della parte immaginaria detta suscettanza, misurabili


A(t)
parte immaginaria
VETTORE ROTANTE
PIANO DI GAUSS
t
parte reale

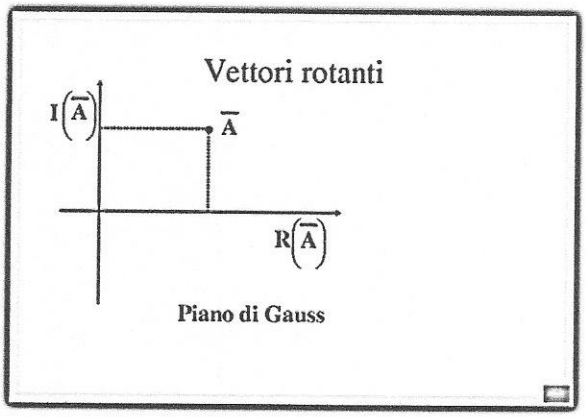
25.5.2


t
A(t)

conduttanza $G = \frac{R}{R^2+X^2}$ (parte reale)

suscettanza $S = \frac{-X}{R^2+X^2}$ (coeff parte immag)

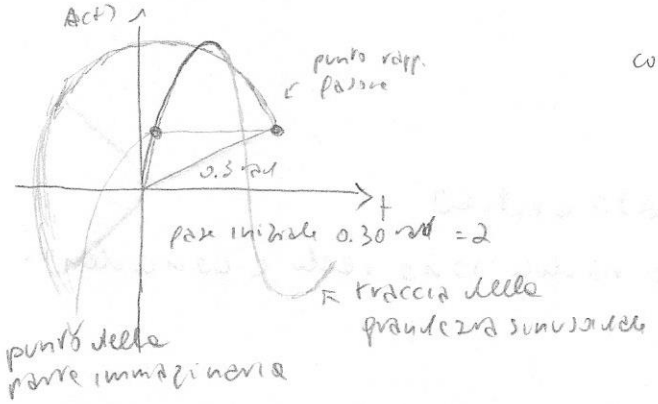
Entrambi si misurano in $Ohm^{-1}$ o Siemens.




## VETTORI ROTANTI

È una rappresentazione visiva dei fasori che facilita il calcolo evitando errori. È utile tracciare il diagramma vettoriale corrispondente al funzionamento di un circuito mentre lo si risolve, in regime sinusoidale perché questo consente di avere una visione chiara delle cose.

Il fasore $\bar{A}$ è in ogni istante un numero complesso perché è una funzione complessa di variabile reale.
Quindi a un determinato istante ha una parte reale e una parte immaginaria e dunque lo posso rappresentare nel piano di Gauss dove in ascissa ci sono la parte reale e in ordinata la parte immaginaria.
Il punto rappresentativo del fasore $\bar{A}$, al passare del tempo si muove perché ω t cambia: il modulo del fasore è sempre lo stesso, è la fase che cambia.
Il modulo è rappresentato dalla congiungente l'origine delle coordinate con il punto rappresentativo, il punto $\bar{A}$ si muove lungo una circonferenza al variare del tempo



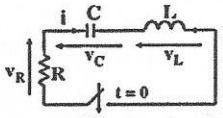

coeff immag = 1 ω · sen t + 1

36'43"

Il diagramma mette in evidenza che una grandezza sinusoidale è rappresentabile con un fasore, è equivalente a un fasore, ma la grandezza fasore stesso può essere rappresentata con un vettore rotante, traccia verde che ruota intorno all'origine delle coordinate.
Tali diagrammi sono utili per valutare la dinamica dei circuiti in regime sinusoidale

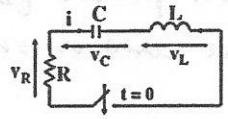
37'52"

## Esercizi:




**Determinare le costanti di integrazione in funzione dei valori iniziali nei tre casi: oscillante, critico e sopracritico.**

## Esercizi: Caso aperiodico




$$v_c(t) = k_1 e^{-t/T_1} + k_2 e^{-t/T_2},$$

Posto $\alpha_1 = -\frac{1}{T_1}$ ed $\alpha_2 = -\frac{1}{T_2}$,

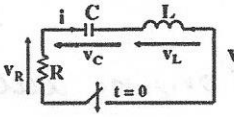
Con

$$T_1 = \frac{T}{1 - \sqrt{1 - (\omega_0 T)^2}} \quad ; \quad T_2 = \frac{T}{1 + \sqrt{1 - (\omega_0 T)^2}}.$$

Caso smorzato, le costanti di tempo sono reali e distinte

con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

## Esercizi: Caso aperiodico

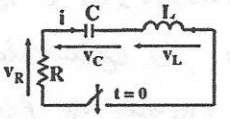



$$v_c(t) = k_1 e^{-t/T_1} + k_2 e^{-t/T_2},$$

$$k_1 = \frac{V_0 T_1}{T_1 - T_2} + \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \frac{I_0}{C}$$

$$k_2 = -\frac{V_0 T_2}{T_1 - T_2} - \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \frac{I_0}{C}$$

## Esercizi: Caso critico




$$v_c(t) = k_1 e^{-t/T} + k_2 t\, e^{-t/T}$$

Posto $\alpha = -\frac{1}{T}$

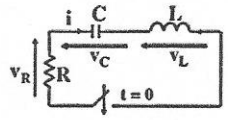
Si ha:

$$k_1 = V_0 \quad ; \quad k_2 = \frac{I_0}{C} + \frac{V_0}{T}$$

Caso critico

Le radici sono reali e coincidenti

## Esercizi: Caso oscillante




$$v_c(t) = K\, e^{\alpha_R} \operatorname{sen}(\beta t + \varphi)$$

**Posto**

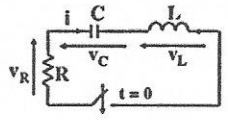
$$\alpha_R = -\frac{1}{T} \quad ; \quad \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0^2 T^2}}$$

parte reale

Caso oscillante

Radici complesse e coniugate

## Esercizi: Caso oscillante




$$v_c(t) = K\, e^{\alpha_R} \operatorname{sen}(\beta t + \varphi)$$

**Si ottiene:**

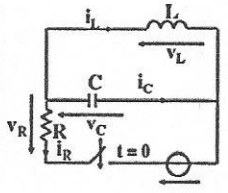
$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta C V_0}{I_0 - \alpha_R C V_0}\right)$$

$$K = \frac{V_0}{\operatorname{sen} \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta C V_0}{I_0 - \alpha_R C V_0}\right)}$$

Le costanti sono $\varphi$ e $K$,
$\varphi$ è la fase iniziale nell'integrale generale

---

## Esercizi




**Per il circuito in figura determinare l'equazione risolvente nella incognita $i_L$.**

maglia grande

$$E = v_L + v_R \; ; \quad v_L = v_c.$$

eq alla 2ª maglia

$$i = i_c + i_L.$$ eq a nodo

$$\frac{E}{RCL} = \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{CL}.$$

generatore in continua

$E = v_L + v_R$

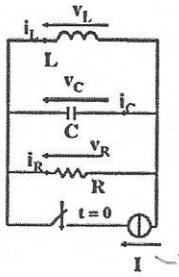
$v_L = v_c$

$i = i_c + i_L$

L'eq risolvente è $\frac{E}{RCL} = \ldots$

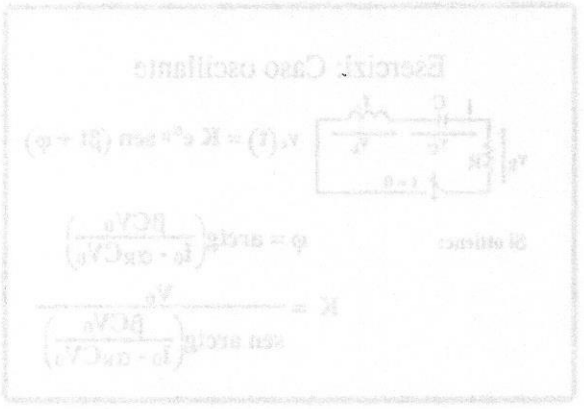
---

## Esercizi




**Per il circuito in figura determinare l'equazione risolvente nella incognita $v_c$**

→ generatore di corrente costante



LEZIONE 26

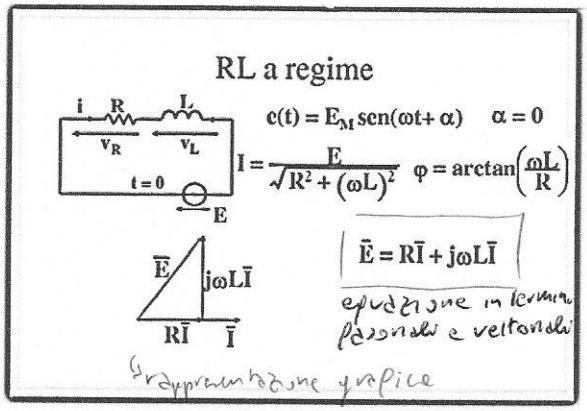
# Diagrammi fasoriali; il circuito RLC al variare dei parametri

Prof. Luciano De Menna
50'33"

Diagrammi fasoriali
Potenza in regime sinusoidale
Il circuito RLC al variare dei parametri
Il circuito RLC al variare della pulsazione
Esercizi

L'uso dei diagrammi fasoriali è utile per capire il funzionamento dei circuiti in regime sinusoidale.

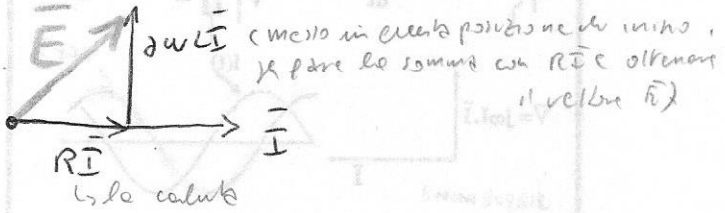
## RL a regime




equazione in termini fasoriali e vettoriali

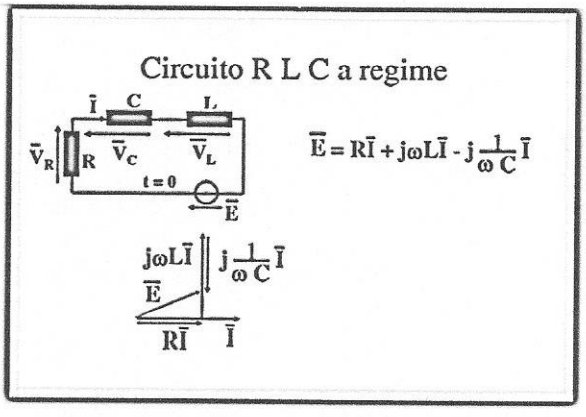
(rappresentazione grafica)

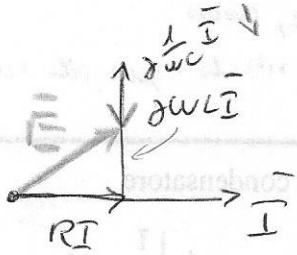
I è il valore efficace
$\varphi$ fase della corrente




Il vettore $R\bar{I}$ è in fase col vettore $\bar{I}$; il vettore $j\omega L\bar{I}$ è sfasato di 90° in anticipo rispetto a $\bar{I}$

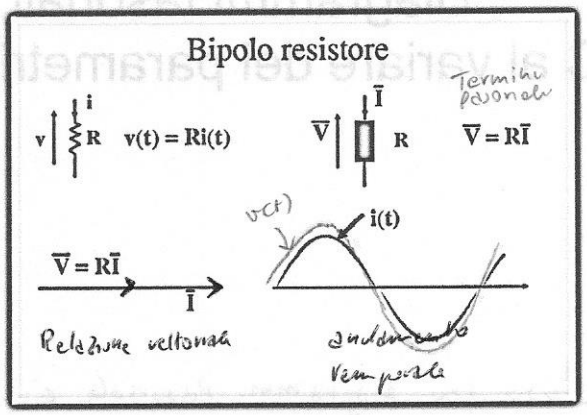
## RLC a Regime



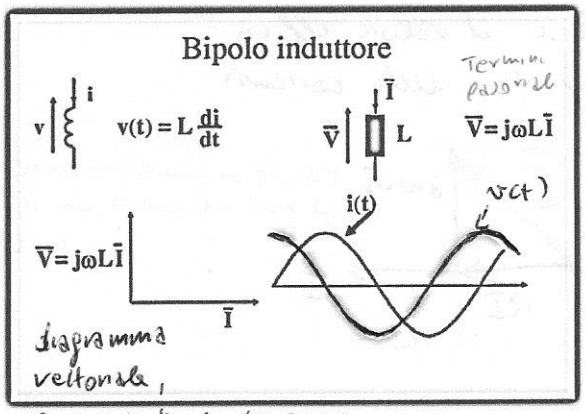




Il vettore $\bar{E}$ è somma delle tre cadute, $R\bar{I}$, $j\omega L\bar{I}$ e $-j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$.

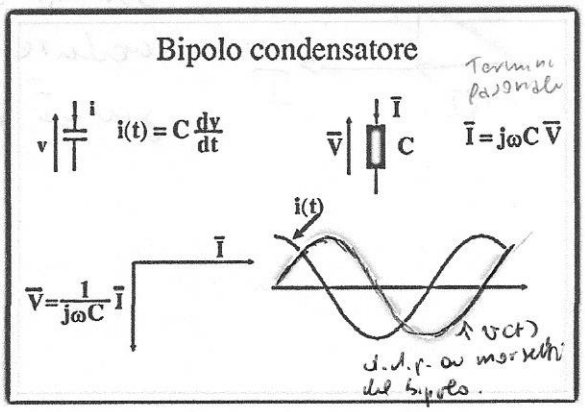
$-j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$ che è sfasata rispetto a $\bar{I}$ di 90° in ritardo, vettore →




Le due sinusoidi sono in fase, v(t) e i(t)




La caduta di tensione è in anticipo rispetto alla corrente, ovvero la corrente è in ritardo rispetto alla tensione di 90°




La caduta di tensione è in ritardo rispetto alla corrente, ovvero la corrente è in anticipo rispetto alla tensione

3'

## Proprietà delle reti in regime sinusoidale

- Le proprietà delle reti dimostrate in regime continuo restano valide purché si usino i concetti di impedenza ed ammettenza al posto di quelli di resistenza e conduttanza.
- Fanno eccezione i teoremi di non amplificazione. (delle tensioni e delle correnti)
- Bisogna ricordare che impedenze ed ammettenze sono numeri complessi.

valide solo in regime continuo

## Operazioni sui numeri complessi

**In forma cartesiana**

$$(a + jb) + (c + jd) = a + c + j\,(b + d),$$

$j^2 = -1$

$$(a + jb)\,(c + jd) = (ac - bd) + j\,(bc + ad),$$

$$\frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)\,(c - jd)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + j\,(bc - ad)}{c^2 + d^2};$$

si moltiplica numeratore e denominatore per $c - jd$

## Operazioni sui numeri complessi

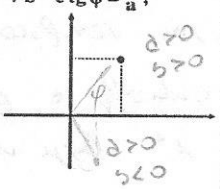
**In forma polare**

$$(a + jb) = A\,e^{j\varphi}, \text{ con } A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } tg\,\varphi = \frac{b}{a},$$

$$A\,e^{j\varphi}\,B\,e^{j\gamma} = A\,B\,e^{j(\varphi + \gamma)},$$

$$\frac{A\,e^{j\varphi}}{B\,e^{j\gamma}} = \frac{A}{B}\,e^{j(\varphi - \gamma)}.$$

$\varphi$ è la fase




$\varphi$ da verificare il quadrante

## Serie e parallelo di impedenze

**Serie**

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2, \qquad \dot{Y} = \frac{\dot{Y}_1 \dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2}.$$

**Parallelo**

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}, \qquad \dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2.$$

## Teorema di Tellegen

$$\sum_k v_k(t)\, i_k(t) = 0,$$

Ipotesi: tensioni soddisfano la LKT alle maglie
correnti soddisfano la LKC ai nodi

In regime sinusoidale è ancora valido il teorema di Tellegen, che possiamo applicare istante per istante, con ottima approssimazione per frequenze non troppo elevate e le dimensioni dei bipoli non troppo piccole

VCM: valori istantanei e la potenza assorbita istante per istante dal bipolo

[13'51"]

## Potenza in regime sinusoidale

angolo di sfasamento tra tensione e corrente

$$p(t) = v(t)\, i(t) = V_M \operatorname{sen}\omega t \; I_M \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) =$$

potenza istantanea

$$= VI[\cos\varphi + \operatorname{sen}(2\omega t - \varphi - \pi/2)]$$

pulsazione doppia

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\, i(t)\, dt = VI\cos\varphi$$

angolo di sfasamento

valori efficaci

valor medio della potenza istantanea

$P = \overline{V} \cdot \overline{I}$ (scalare)

**Potenza attiva** (quella che fa agire i dispositivi elettrici)

Convenzione dell'utilizzatore => potenza e energia sono assorbite

Il valor medio della potenza istantanea prende il nome di potenza attiva. La potenza è la derivata dell'energia, la variazione della energia nell'unità di tempo. Corrente casalinga: valore efficace 230 V, frequenza di 50 Hz, in Europa.

## Teorema di Tellegen

convenzione della corrente (stessa convenzione su tutti i bipoli)

$$\sum_k \overline{V}_k \overline{\overline{I}}_k = \sum_k V_k\, e^{j(\omega t + \alpha_k)}\, I_k\, e^{-j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)} = 0.$$

$$\overline{V}_k \overline{\overline{I}}_k = V_k\, I_k\, (\cos\varphi_k + j \operatorname{sen}\varphi_k).$$

**Potenza complessa**

I fasori e i vettori rappresentativi delle tensioni verificano la 2ª legge di Kirchhoff e quelli delle correnti la 1ª legge di Kirchhoff nei nodi.

## Potenza reattiva

$$\overline{V}_k \overline{I}_k^* = V_k\ I_k\ (\cos\varphi_k + j \operatorname{sen}\varphi_k).$$

$$Q_k = V_k\ I_k\ \operatorname{sen}\varphi_k$$

$$\sum_k V_k I_k \cos\varphi_k = 0$$

$$\sum_k V_k I_k \operatorname{sen}\varphi_k = 0$$

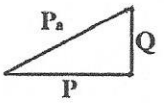
La potenza reattiva è $Q_k = V_k I_k \operatorname{sen}\varphi_k$ e la somma si conserva.
Questo vuol dire che essa, al pari della potenza media (attiva) è un integrale primo del sistema, è una quantità che si conserva. Tanta potenza reattiva viene fornita dai generatori quanta ne viene assorbita dai bipoli presenti nella rete.

## Potenza apparente

$P_a = V I$ (valori efficaci di V e I senza cosφ ↳ fattore di potenza)

$P_a = \sqrt{P^2 + Q^2}$

**Triangolo delle potenze**

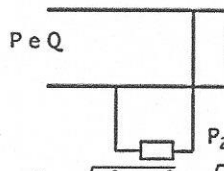



La potenza apparente esprime la potenza che, in regime continuo, si avrebbe con tensione e corrente pari ai valori efficaci.

Potenza attiva è $VI\cos\varphi$
Potenza reattiva è $VI\operatorname{sen}\varphi$

La potenza apparente non si conserva.

## Potenza apparente




→ assorbimento di potenza attiva e reattiva del bipolo

$P_a = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2}$

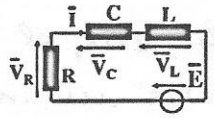
$P_{1a} + P_{2a} = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{P_2^2 + Q_2^2}$

di nessun significato

potenza apparente del complesso

# Il circuito RLC a regime

## Il circuito risonante




$$\bar{E} = \bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I} + R$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

**Al variare dei parametri L, R e !C**

pulsazione angolare del generatore

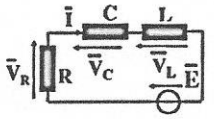
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La corrente aumenta all'aumentare dell'induttanza

c'è un valore per cui $I = L$

28'46"

## Il circuito risonante




$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

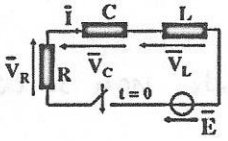
**Al variare della frequenza del generatore**

$$f(\omega/\omega_0) = \frac{R\,I(\omega)}{E}$$

valore massimo per $\omega = \omega_0$ della risonanza

35'05"

## La curva di risonanza

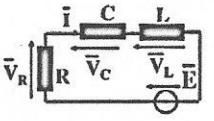



$$\bar{E} = \bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

## Il circuito risonante




$$\bar{E} = \bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

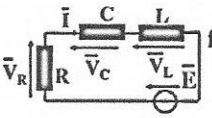
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

$$f(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

ASSEGNATA LA FREQUENZA PER UN CERTO VALORE DELLA INDUTTANZA E DELLA CAPACITÀ SI HA UN MASSIMO DEL VALORE EFFICACE DELLA CORRENTE, QUESTO AVVIENE QUANDO LA CADUTA RESISTIVA È IN FASE CON LA TENSIONE DEL GENERATORE E QUINDI ANCHE LA CORRENTE È IN FASE CON IL GENERATORE DI F.E.M. PER VALORI DI INDUTTANZA INFERIORI A TALE VALORE LA CORRENTE È IN ANTICIPO RISPETTO ALLA TENSIONE. PER VALORI MAGGIORI LA CORRENTE È IN RITARDO. QUESTO VALORE È DETTO VALORE DI RISONANZA.

Per $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ il valore della corrente è massimo.

## Il circuito risonante



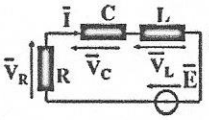

$$f(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Q => ripidità della curva

## Il circuito risonante

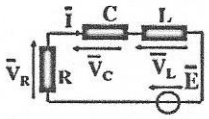



$$f(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}, \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

## Il circuito risonante




$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

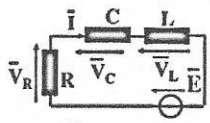
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC},$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{1}{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

perché inverso

il picco della f, che è in relazione con la potenza -

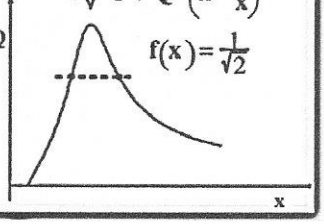
## Il circuito risonante



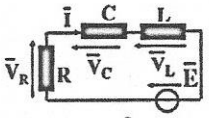

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC},$$

$$\frac{1}{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}$$



## Il circuito risonante




$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC},$$

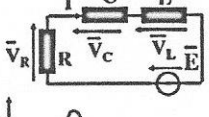
$$Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \qquad \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm\frac{1}{Q} \qquad x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \qquad x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$$

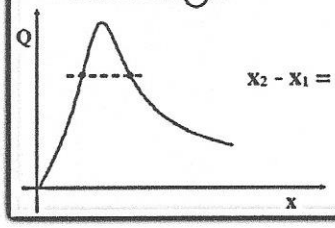
soluzioni, valuto solo per la scelta dei due segni + e quando vedrò - +

più elevato è $Q$ e più stretta è la curva.

## Il circuito risonante

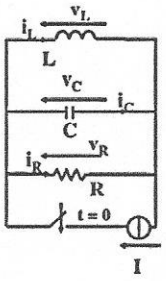



$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC},$$



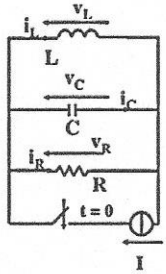

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$$

## Esercizi




**Per il circuito in figura determinare l'equazione risolvente nella incognita $v_c$.**

## Esercizi




$$i_C + i_L + i_R = I$$

$$C\frac{dv_C}{dt} + i_L + \frac{v_C}{R} = I$$

$$C\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0$$

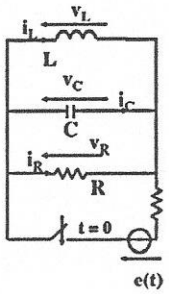
equazione al nodo

utilizzo delle caratteristiche

n.b. $v_C = v_L$

equazione risolvente, che è venuta omogenea, nonostante il circuito essere un parallelo, la corrente costante I.

## Esercizi




**Per il circuito in figura determinare l'equazione risolvente nella incognita $v_c$.**

## Esercizi

$5\sqrt{2}\text{sen}(\omega t + \pi/2)$

$10\sqrt{2}\text{sen}(\omega t + \pi/3)$

$2\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/6)$

Trasformare le seguenti funzioni sinusoidali in fasori

## Esercizi

$(5 + j\,5)\, e^{j\omega t}$

$(5 + j\,10)\, e^{j\omega t}$

$10\, e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}$

$5\, e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j\omega t}$

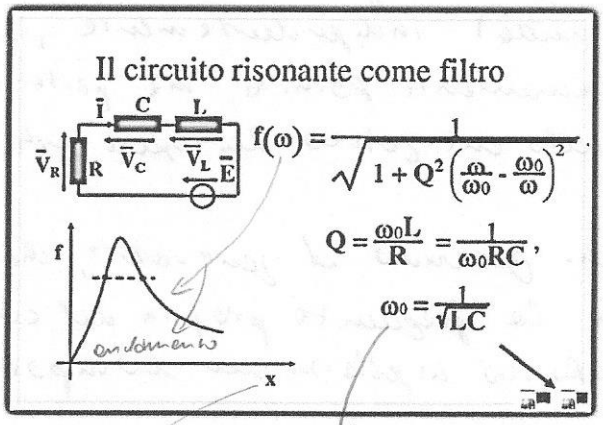
**Trasformare in grandezze sinusoidali.**

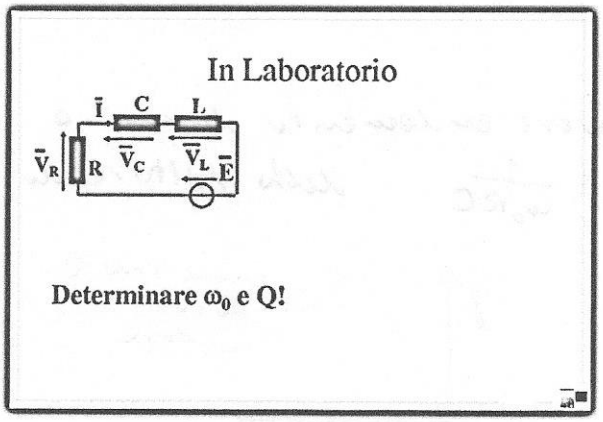
26.10

LEZIONE 27

Prof. Luciano De Menna
43'57"

# Il Circuito RLC come filtro




Il circuito RLC serie, circuito risonante, di estrema importanza, sia teorica che pratica.

Ha una condizione di funzionamento particolare quando la pulsazione angolare del generatore sinusoidale che alimenta la serie dei tre bipoli coincide con il valore $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

In queste condizioni, ricordando i diagrammi fasoriali che descrivono il circuito, la caduta induttiva e la caduta capacitiva sono esattamente a 180°, si compensano esattamente fra loro la tensione del generatore cade interamente sulla resistenza.

La corrente è in fase con la tensione e il valore efficace della corrente raggiunge il suo valor massimo perché l'impedenza del circuito, che ha una parte reale e una parte immaginaria; la parte immaginaria dipende da $\omega$ ($\omega_L - \frac{1}{\omega_C}$)

alla frequenza di risonanza, $\omega_L$ e $\frac{1}{\omega_C}$ sono uguali, quando la parte immaginaria si annulla; il modulo ($\sqrt{\text{parte_reale}^2 + \text{parte_immaginaria}^2}$) raggiunge un minimo al verificarsi della risonanza e fa sì che il valore efficace della corrente raggiunga il suo massimo.

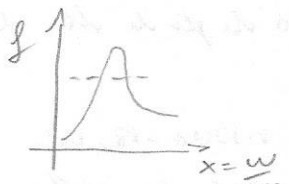
Si ricorda che il circuito RLC non alimentato, in evoluzione libera, fa una resistenza in parole alla resistenza critica ora in grado di dare una evoluzione di tipo oscillatorio smorzato (nel condensatore immagazzinata nei bipoli con memoria). Nel caso limite in cui la resistenza va a zero (caso ideale), le oscillazioni diventano stabili, non più smorzate e in questa condizione la frequenza di

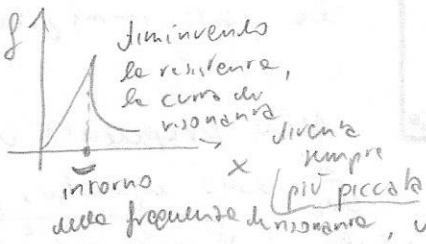
oscillazione del circuito RLC (chiamata frequenza propria di oscillazione dell'evoluzione libera del circuito, non la pulsazione), è pari a $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

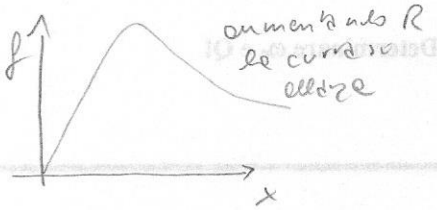
$\omega = 2\pi f$ (freq.) frequenza $f$ e pulsazione angolare $\omega$ non sono legate, sono proporzionali.

La pulsazione di risonanza $\omega_0$ indica, nella quale condizione, con la pulsazione a cui il circuito è in grado di oscillare (x la corrente dissipativa $\Sigma$ resistenza nulla) indipendentemente, anche se l'energia non viene continuamente fornita, ma parte da una condizione non nulla, dal livello energetico dei suoi componenti, il condensatore e l'induttore.
È di norma intuitivo attendersi che quando il generatore, che è la sollecitazione, è sincrono con la frequenza propria del circuito (sincronismo = risonanza) allora è lecito aspettarsi un comportamento particolare.
La corrente che circola nel circuito è dovuta solo alla resistenza perché le due correnti conduttiva e capacitiva si compensano, ma le tensioni nel condensatore e nell'induttore non sono nulle, sono solo uguali e opposte.

L'andamento di $f(\omega)$ può avere andamento diverso a seconda del valore $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$ detto fattore di qualità o di merito del circuito.

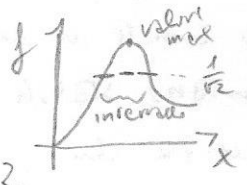



In un intorno della frequenza di risonanza ($\omega = \omega_0$), il valore della corrente, è molto più elevato di quanto si possa avere anche di poco scostarsi dal valore

Il fattore di qualità $Q$ è anche legato in termini di $\frac{\omega}{\omega_0}$ tra i due valori in cui la curva $f$ si riduce di $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tale intervallo è di interesse perché ormai che hanno e che pone non la potenza, che va con il quadrato.



Quando x da f si ottiene un $\frac{1}{\sqrt{2}}$, il suo quadrato si riduce a $\frac{1}{2}$.

Il fattore di qualità Q è anche indice anche di un'altra cosa. Moltiplicando Q per il valore efficace di I al numeratore e al denominatore abbiamo:

$$Q = \frac{\omega_0 L I}{R I}$$

, e RI in condizioni di risonanza è la tensione sul generatore, perché il generatore vede solo il resistore;
$\omega_0 L I$ è il valore efficace della tensione sull'induttore.
Quindi Q rapporto, alla risonanza è il rapporto sulla sovratensione all'induttore rispetto alla tensione del generatore.
Siccome alla risonanza $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, analogo ragionamento si può fare per il condensatore.
Quindi Q è anche la misura della sovratensione sul condensatore e sull'induttore alla risonanza rispetto alla tensione del generatore. [11' 10"]
Si parla di sovratensione perché in genere Q nelle applicazioni deve essere molto maggiore di 1 e quindi abbiamo tensione sul condensatore e sull'induttore molto più grande della tensione (per valori efficaci) del generatore che alimenta il circuito.
Il teorema di sovrapposizione delle tensioni non è applicabile in regime sinusoidale, solo al regime continuo.

Il circuito in laboratorio, 12' 38"
con un oscilloscopio in ingresso e uno in uscita.
All'oscilloscopio in ingresso è mandata la tensione del generatore, ed sarà morsetti.
Alla seconda traccia dell'oscilloscopio (output) è mandata la tensione sulla resistenza, quindi RI e quindi anche una misura della corrente (valore efficace).

e(t) tensione Entrata  u(t) tensione Uscita

perché il circuito è visto come un filtro, cioè come un sistema che ha in ingresso qualcosa e in uscita qualcos'altro che in questo caso è la tensione sul resistore.

Possono essere variati, tramite comando, R, L e C e, per ogni valore di R, L, C ho una visione del valore della risonanza $\omega_0$ in rad/s e del valore di Q, potere di merito del circuito

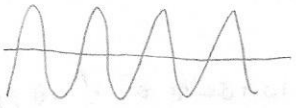
In ingresso la forma d'onda e(t) può essere variabile: sinusoide, quadra, triangolare, dente di sega. [15'05"]

Forma d'onda sinusoide $e(t) = E_m \operatorname{sen} \omega_g t$

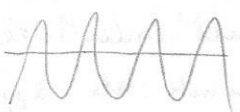
con $\omega_g$ pulsazione angolare del generatore,

$\omega_g = 0.63$ rad/s ; $\omega_0$ (rad/s) = 0.63

| R(Ω) | L(H) | C(F) | Q(rad/s) |
|---|---|---|---|
| 1.00 | 25.00 | 0.10 | 15.71 |




andamento del generatore, la tensione;



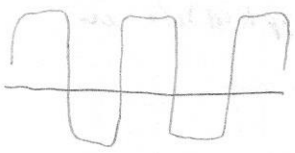

tensione sul resistore, la corrente è sinusoidale

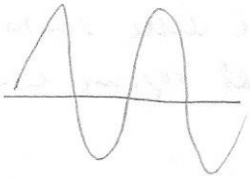
scala arbitraria non essendo di interesse stabilire valori effettivi.

La tensione del generatore è sinusoidale, anche la corrente è sinusoidale, come la caduta sulla resistenza. Inoltre sono in fase.

Forma d'onda quadra (che ha uno sviluppo in serie di Fourier di armoniche dispari, con frequenza principale $\omega_0$, poi $3\omega_0$, $5\omega_0$, ecc.)

$$e(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\omega_0 t}{2n+1}$$




l'uscita è sinusoidale

La forma d'onda in uscita è sinusoidale.
La pulsazione fondamentale della forma d'onda in ingresso ($\omega_g$) coincide con la pulsazione di risonanza del circuito RLC ($\omega_0$):

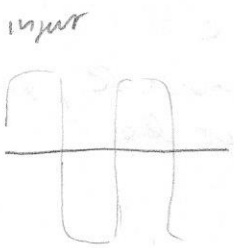
$$\omega_g = \omega_0 = 0.63 \text{ rad/s}$$

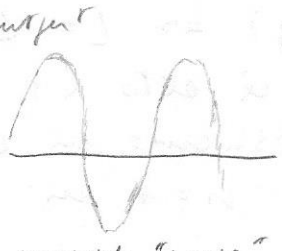
I valori RLC sono tali da dare una pulsazione di risonanza pari a 0.63 rad/s che è proprio la ~~frequenza~~ pulsazione angolare, la frequenza fondamentale dello sviluppo della forma d'onda voltaggio, con $n = 0$.
La forma d'onda d'uscita è quindi sinusoidale; Q è abbastanza elevato (15.71), possiamo allora dire che la curva di risonanza è abbastanza piccola.



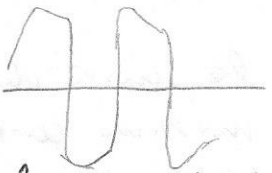

27.2.5

Cioè la curva $|A|$ è abbastanza stretta e questo vuol dire che il comportamento del circuito alla frequenza di risonanza è molto differenziato dal comportamento a frequenze poco discoste dalla risonanza e questo ha come conseguenza che la corrente corrispondente alla armonica e non alla fondamentale è molto basso rispetto alla corrente (valore efficace) per l'armonica fondamentale (quella per $n=0$).
In realtà la forma d'onda in uscita non è una pura sinusoide, è un po' "sporca", ma le altre armoniche sono state attenuate notevolmente a causa del valore di qualità Q del circuito RLC.
Per verificare che questo è vero si peggiora il valore di qualità Q del circuito, aumentando la resistenza a 10.0 Ω (era 1.0




sinusoide "sporca", cambiando di risulta evidente



| R (Ω) | L (H) | C (F) | $\omega_0$ (rad/s) |
|---|---|---|---|
| 10.00 | 25.00 | 0.10 | 0.63 |

Q ω
1.57

per R = 100,
Q = 0.16

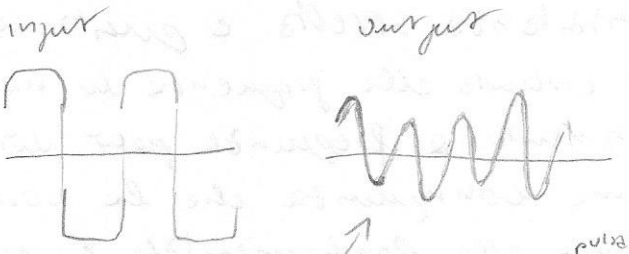
la curva di risonanza è infatti abbastanza piatta, quindi tutte, o quasi, le frequenze sono trattate allo stesso modo, quindi riammandando in uscita nella realtà RI riformano la forma d'onda rettangolare.

per R = 1000 => Q = 0,02 e
la curva in output è quasi piatta

Quando R = 1 Ω => Q = 15.71, si prelevo solo la fondamentale contenuta nella forma d'onda rettangolare.
Se faccio in modo che la pulsazione di risonanza del circuito $\omega_0$ sia 3 volte quella della fondamentale:

poiché $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, per avere $3\omega_0$, devo diminuire l'induttanza di un fattore 9. Quindi modifichiamo L del un valore di 2.7 H.

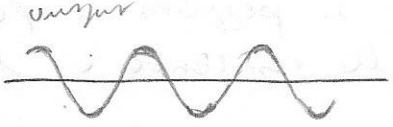
27.2.2




$R(\Omega) = 1.00$
$L(H) = 2.70$ (era 25)
$C(F) = 0.10$
$\omega_0 (rad/s) = 1.92$ (era 0.63)
$Q = 1.70$ → $\omega_0 = 3\omega_f$
$\omega_f = 0.63$ (rad/s)

pulsazione, freq. da risonare

Il segnale in uscita è una sinusoide "sporca", sporca perché $Q$, il fattore di qualità è diventato troppo basso, per aumentarlo si pone la resistenza $R = 0.1\ \Omega$ e abbiamo




L'output è la 3ª armonica [23'] presente nel segnale di ingresso.

Quindi, triplicando $\omega_0$ ($3\omega_f$) => $L = L \cdot \frac{1}{9}$ e facendo in modo di avere un $Q$ alto (si diminuisce $R$, perché l'output non è "sporco"), allora abbiamo in output la terza armonica, ottenibile ponendo $n = 1$ in

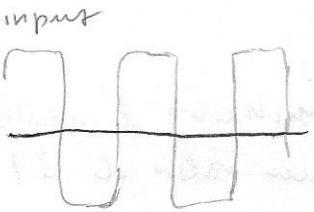
$$e(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega_f t}{2n+1}, \quad 2n+1 \text{ per } n=1 \Rightarrow 3 \Rightarrow \sin 3\omega_f$$

$\omega_0 = 3 \cdot \omega_f$ => la curva di risonanza ha il suo massimo centrato sulla frequenza della 3ª armonica presente nel segnale in ingresso, che è una onda quadra.

La sinusoide in uscita ha una pulsazione $3\omega_f$

Questa caratteristica del circuito di selezionare la frequenza è importante.

Se vogliamo che la frequenza di risonanza $\omega_0$ sia $2\omega_f$ l'induttanza, rispetto a 25 H, deve essere ridotta di $\frac{1}{4}$, cioè un fattore 4 e quindi deve avere un valore di circa 6.25 H.
Si noti che si può variare parimenti la capacità, piuttosto che l'induttanza.



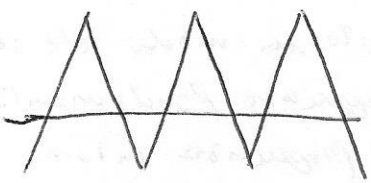

Il segnale in uscita è, in pratica, nullo.
Con $Q = 332.7$ ($R = 0.01$) è nullo!

$R(\Omega) = 0,10$
$L = 6.25$
$C = 0.10$
$\omega_0 = 1.26$ → $\omega_0 = 2\omega_f$
$Q = 39.27$
$\omega_f = 0.63$ [24'35"]

27.2.d

Quindi per $\omega_0 = 2\omega_f$, avendo portato $\alpha$ ad un valore alto ($\alpha = 332{,}7$, in conseguenza di $R = 0{,}01\ \Omega$) abbiamo che in uscita abbiamo un segnale nullo.
Questo perché la seconda armonica, in questo particolare segnale di ingresso che è l'onda quadra, non è presente.
Il circuito è alimentato, ma la tensione ai morsetti della resistenza è nulla perché ha risalto, la resistenza in maniera diversa la frequenza presente nel segnale di ingresso.
È come se il circuito fosse a conoscenza dello sviluppo in serie di Fourier: il circuito riesce a vedere nel segnale di ingresso la sua scomposizione nelle varie armoniche; infatti si comporta in maniera differenziata a seconda della sua frequenza di risonanza nei confronti delle diverse armoniche.

Forma d'onda triangolare: CC615



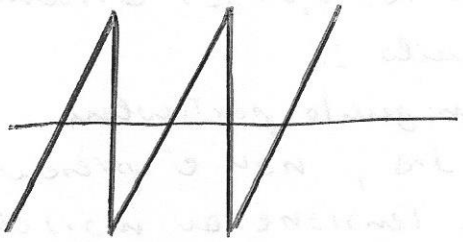
$$\underbrace{e(t)}_{\text{andamento del generatore di ingresso}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\,\omega_f t}{(2n+1)^2}$$

per $n=0$ la prima armonica è $\omega_f$

per $n=1$ la seconda armonica non è presente

per $n=2$ la terza armonica è $3\omega_f$,
con $L = 2.72$ H
e $R = 0.10\ \Omega$

Forma d'onda a dente di sega



$$e(t) = \frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega_f t}{n}$$

ci sono tutte le frequenze.

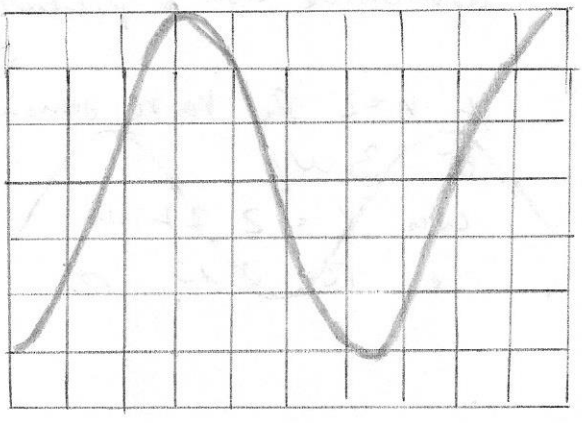
Tale forma d'onda è quella che pilota l'asse dei tempi dell'oscilloscopio.

Ci sono tutte le frequenze, quando vediamo un segnale in uscita anche per la seconda frequenza, $\omega_0 = 2\omega_f$ (con $R = 0.\Omega$, $L = 6.25$ F, $\alpha = 39.2$, $\omega_0 = 1.26$, $\omega_f = 0.63$).

Quando si muove la manopola di un sintonizzatore, ad esempio di una radio o di un televisore si cambia uno dei parametri del circuito, che ovviamente sarà più complesso del semplice circuito RLC, ma che funziona sullo stesso principio di funzionamento.
Si può pensare di cambiare la capacità del circuito in modo tale che il filtro sia in grado di sintonizzarsi sulla frequenza fondamentale desiderata e quindi prendere soltanto la banda di frequenza intorno a quella frequenza fondamentale di interesse.

# IL CIRCUITO RLC VISTO ALL'OSCILLOSCOPIO

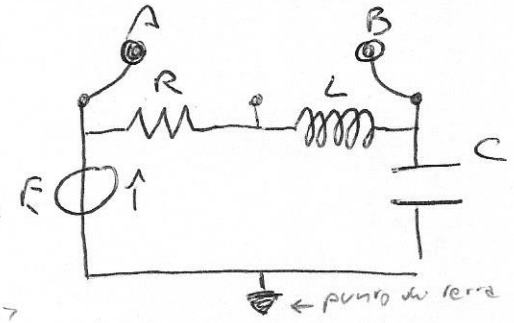
[23'27"]



ch1 = sonda A, rileva la tensione sul generatore

sonda B, rileva la tensione sul condensatore, che è a 90° rispetto a quella sul generatore => siamo vicini alla freq di risonanza

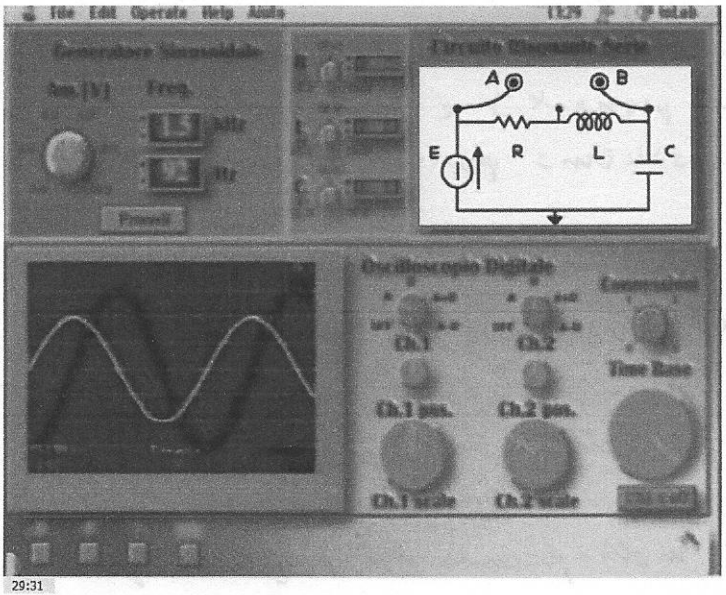
Circuito risonante serie




R =
L =
C =

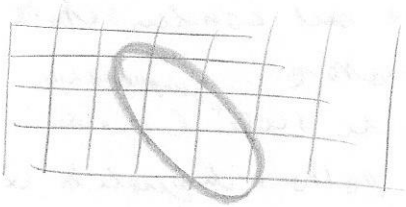
Ampiezza e frequenza del generatore variabili

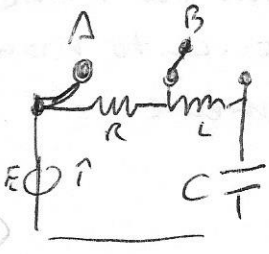
1.5 kHz
92 Hz
} 1592 Hz




Cambiando il valore della induttanza e valori crescenti si nota che la curva della tensione sul condensatore ~~∿~~ varia: diminuisce l'ampiezza (da ~~∿~~ a ~~∿~~) e varia anche lo sfasamento.
In questo momento il segnale può rendere uniforme lo scorrere del tempo sull'oscilloscopio è un dente di sega; è possibile, in alcuni casi, portare sull'asse x un altro segnale.

Se sull'asse y e sull'asse x si portano segnali sinusoidali di diverso, la curva disegnata è un'ellisse. Sarebbe un cerchio se i due segnali possono sfasarsi di $\frac{\pi}{2}$, cioè uno è seno e l'altro è coseno e hanno la stessa ampiezza e se l'ampiezza è 1 allora il raggio è 1.



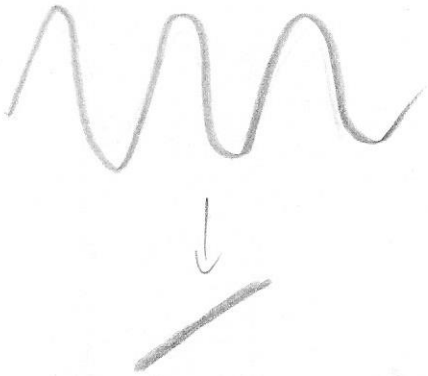



Quando il circuito è in risonanza [33'] la tensione ai morsetti del generatore e la caduta sul resistore devono essere uguali e in fase, per cui un modo di individuare la frequenza di risonanza può essere quello di variare il coefficiente di autoinduzione L fino a quando la curva rappresentativa nel piano x, y non diventa una retta.

ho individuato la freq di risonanza, variando L, diminuendola

27.2.24

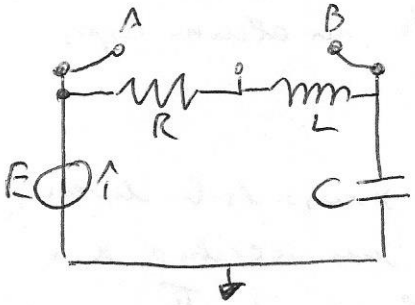
In queste condizioni i due segnali, sull'asse delle X e sull'asse delle Y sono in fase, cioè dal ex sono sovrapposti gli assi e la curva rappresentativa sul piano X Y è una retta.
Amplificando diversamente possiamo posizionare la retta a 45°.



In fase, variando la frequenza; il valore ottenuto 3182 Hz è la frequenza di risonanza del circuito RLC dato.

Quando moltiplicando la frequenza per $2\pi$ otteniamo la pulsazione angolare $\omega_0$, misurata in radianti al secondo, circa uno.

Sullo stesso circuito può essere calcolato Q, il fattore di qualità, che è la sovratensione sul condensatore o sull'induttore rispetto alla tensione sul generatore alla frequenza di risonanza.




Vedendo la tensione sul condensatore (sonda B), se le due tensioni sono uguali allora i due fattori di amplificazione rappresentano grosso modo il rapporto tra la tensione sul condensatore e la tensione sul generatore (amplificazione quindi il rapporto fra le scale (circa 5 in laboratorio) è il fattore di qualità Q del circuito.

Fattore di qualità Q e pulsazione di risonanza $\omega_0$ sono caratteristiche fondamentali del circuito risonante e possono essere determinate sperimentalmente.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \omega_0 \frac{L}{R}$$

## Esercizi

valore efficace

$5\sqrt{2}\,\text{sen}(\omega t + \pi/2) \longrightarrow 5\,e^{j(\omega t+\pi/2)}$

$10\sqrt{2}\,\text{sen}(\omega t + \pi/3) \longrightarrow 10\,e^{j(\omega t+\pi/3)}$

$2\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/6) \longrightarrow 2\,e^{j(\omega t+2\pi/3)}$

Trasformare le seguenti funzioni sinusoidali in fasori

dato il fasore determinare la funzione sinusoidale

## Esercizi

valore

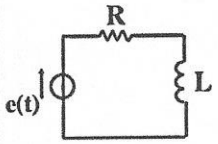
$(5 + j\,5)\,e^{j\omega t}$ — $5\sqrt{2}\,\text{sen}(\omega t + \pi/2)$

$(5 + j\,10)\,e^{j\omega t}$ — $11{,}18\sqrt{2}\,\text{sen}(\omega t + 1{,}1)$

$10\,e^{j\frac{\pi}{2}}\,e^{j\omega t}$ — $10\sqrt{2}\,\text{sen}(\omega t + \pi/2)$

$5\,e^{j\frac{\pi}{3}}\,e^{j\omega t}$ — $5\sqrt{2}\,\text{sen}(\omega t + \pi/3)$

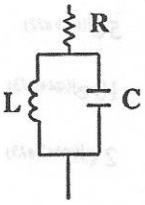
## Esercizi




R = 3 Ω;
L = 40 mH
e(t) = 10√2 sen(100 t)

**Per la rete in figura, verificare i teoremi di conservazione per le potenze attive, reattive e complesse; verificare inoltre che le potenze apparenti non si conservano.**

## Esercizi



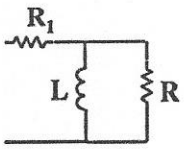

R = 100 Ω;
L = 100 mH;
C = 100 μF

**Calcolare l'impedenza equivalente del bipolo ( ω = 100 rad/s).**

## Esercizi

**Tracciare gli andamenti delle impedenze dei bipoli fondamentali (resistore, induttore e condensatore) in funzione di ω.**

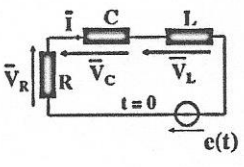
## Esercizi




R = 100 Ω;
L = 100 mH;
R1 = 5 Ω

**Calcolare l'impedenza equivalente del bipolo ( ω = 100 rad/s).**

## Esercizi




R = 10 Ω;
$X_c$ = 10Ω;
$X_L$ = 20 Ω.
e(t) = 10 √2 sen(100 t) V.

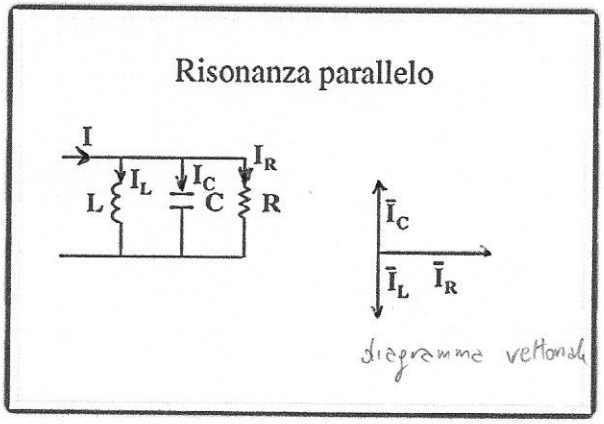
Calcolare potenza attiva, reattiva ed apparente assorbite dai singoli bipoli.

LEZIONE 28

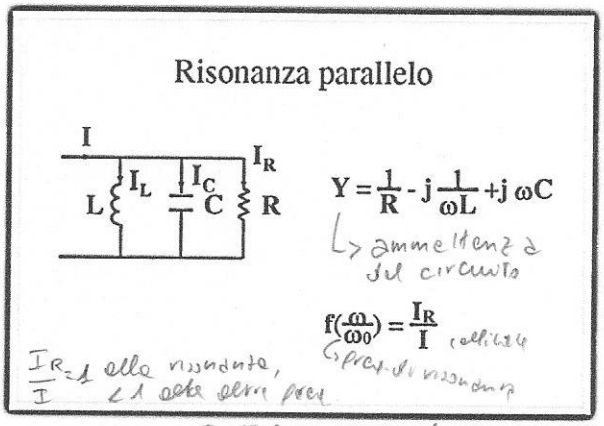
# Strumenti di misura in C.A.

Prof. Luciano De Menna
45'03"

RLC parallelo
La risonanza in generale
Un esempio di circuti in AC
Strumenti di misura in AC
Il multimetro in AC
Esercizi

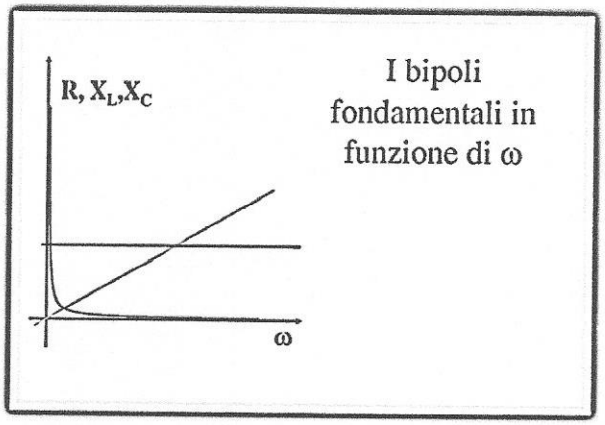



QUANDO LA FREQUENZA CON CUI VIENE SOLLECITATO UN SISTEMA COINCIDE CON LA FREQUENZA PROPRIA IN CUI IL SISTEMA STESSO È IN GRADO DI OSCILLARE SE SONO ANNULLATE LE CAUSE DISSIPATIVE SEMPRE PRESENTI IN FISSO SI HANNO COMPORTAMENTI PARTICOLARI, GLI EFFETTI SONO ESALTATI. NEL CIRCUITO RLC LA CAUSA DISSIPATIVA È LA RESISTENZA R.



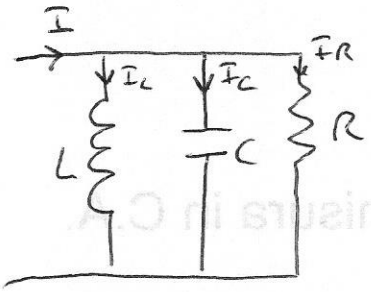

I è la corrente che assorbe l'intero parallelo.

Nell'RLC parallelo c'è una frequenza a cui la reattanza induttiva $\omega L$ è uguale alla reattanza capacitiva $\frac{1}{\omega C}$; dato che le correnti $I_L$ e $I_C$ si ottengono dalla tensione che è comune ai due bipoli L e C perché in parallelo, tendendo per cui nel primo caso a $+\infty$ e $-\frac{\partial}{\omega C}$ nel secondo, in queste condizioni le correnti sono uguali in modulo e opposte in fase.
Il generatore vede solo la corrente in R.



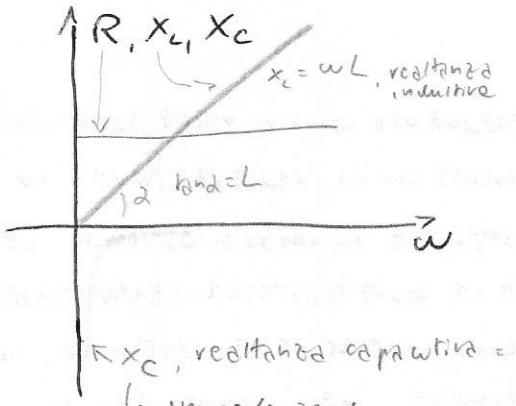

La curva di risonanza dipende dal Q del circuito, dunque dalla variabile $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

La ammettenza Y del circuito è pari alla somma delle tre ammettenze
$Y = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C$
quando la parte induttiva e la parte capacitiva dell'ammettenza si compensano fra di loro, $Y = \frac{1}{R}$
Se R è nulla (non ci è due persone) allo Y, l'ammettenza, va all'infinito




Cioè, il circuito, anche se alimentato, non assorbe corrente.
Questo non vuol dire che la corrente nell'induttore e nel conduttore siano separatamente nulle: la loro somma è uguale a zero

Comportamenti che prevedono una risonanza si possono avere anche in circuiti più complessi

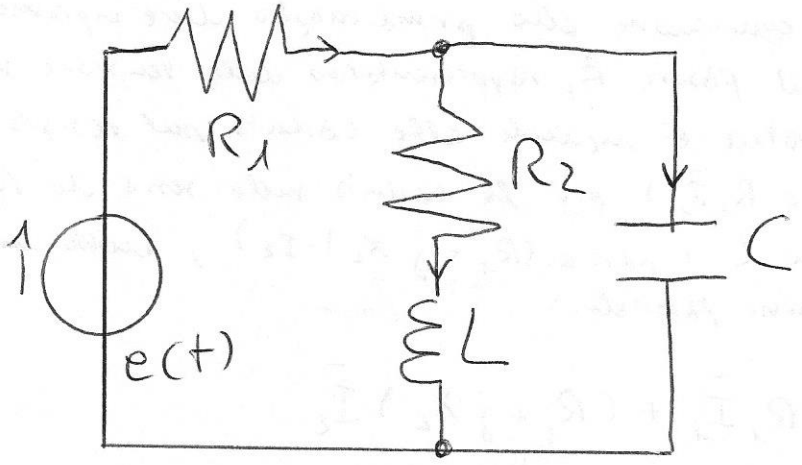



Le reattanze in funzione di $\omega$ [7'20"]

$X_C$, reattanza capacitiva $= \frac{1}{\omega C}$, per $\omega = 0$ è $-\frac{1}{\omega C}$
↳ impedenza di un condensatore $= -\frac{j}{\omega C}$

per sottolineare che il modulo dell'impedenza $\to \infty$ per $\omega \to 0$

# ESEMPIO DI RISOLUZIONE DI UNA RETE IN REGIME SINUSOIDALE




$C = 1\,mF$ $\quad 1\,mF = 10^{-3}\,F$

$L = 50\,mH$

$R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 5\,\Omega$

$e(t) = 20\sqrt{2}\,\sin(100t)$

$e(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

A: ampiezza; $\omega$: pulsazione in rad/s; $\varphi$: angolo di fase in rad, spostamento di fase

Il generatore di tensione ha valore massimo $20\sqrt{2}$ = ampiezza, cioè di valore efficace 20; pulsazione $\omega$ 100 radianti/sec

1. Trasformare il tutto in termini fasoriali

Il fasore che corrisponde alla tensione $e(t)$ è $\bar{E} = 20$, a fase zero perché la tensione del generatore è $20\sqrt{2}\sin(100t)$, $\varphi = 0$.

$$\bar{E} = 20$$

$$X_L = \omega L = 5\,\Omega$$

($\omega$: 100 rad/s; $L$: $50 \cdot 10^{-3}$ H)

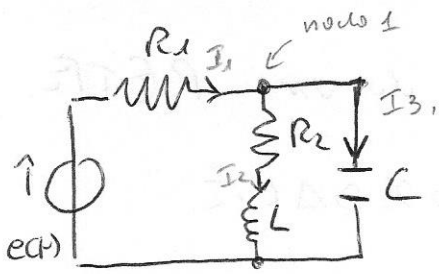
Reattanza induttiva

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 10\,\Omega$$

Reattanza capacitiva

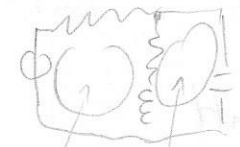
Nella rete ci sono due maglie indipendenti → due equazioni alle maglie (LKT); ci sono due nodi, quindi dobbiamo scrivere una sola equazione ai nodi (LKC).

Le equazioni da scrivere, in termini di fasori sono:




$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

1ª legge di Kirchhoff al nodo 1 in termini di fasori.




La equazione alla prima maglia deve esprimere che il fasore $\bar{E}$, rappresentativo della tensione del generatore è uguale alla caduta sul resistore (pari a $R_1 \bar{I}_1$) più la caduta sulla serie di $R_2$ e di L (pari a $(R_2 + j X_L) \cdot \bar{I}_2$), tutto in termini fasoriali:

$$\bar{E} = R_1 \bar{I}_1 + (R_2 + j X_L) \bar{I}_2$$

LKT

Per l'equazione alla seconda maglia, la caduta sulla serie $R_2$ e L (pari a $(R_2 + j X_L) \bar{I}_2$) è uguale alla caduta sul condensatore (pari a $-j X_C \bar{I}_3$, ovvero a $\frac{1}{j\omega C}$).

$$(R_2 + j X_L) \bar{I}_2 = -j X_C \bar{I}_3$$

Abbiamo un sistema a tre equazioni in 3 incognite, le correnti. Si risolve per sostituzione, in questo caso si sostituisce $\bar{I}_1$ nella seconda equazione; dalla 3ª equazione si ricava $\bar{I}_3$:

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \\ \bar{E} = R_1 \bar{I}_1 + (R_1 + j X_L) \bar{I}_2 \Rightarrow \bar{E} = R_1 (\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + (R_1 + j X_L) \bar{I}_2 \\ (R_2 + j X_L) \bar{I}_2 = -j X_C \bar{I}_3 \Rightarrow \bar{I}_3 = \dfrac{(R_2 + j X_L) \bar{I}_2}{-j X_C} \end{cases}$$

e sostituendo $\bar{I}_3$ sopra, otteniamo una equazione nella sola incognita $\bar{I}_2$.

$$\bar{E} = \left( R_1 + R_2 \frac{R_1 X_L}{X_C} + j \left( X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C} \right) \right) \bar{I}_2$$

$\rightarrow$ è una impedenza complessiva $= 10 + j10$

da cui $\bar{I}_2 = \dfrac{\bar{E}}{\quad}$

e, inserendo i valori dati, troviamo:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{10 + j10} = \frac{\bar{E}=\omega}{10\sqrt{2} \cdot C_j} \; j\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

trasf. in forma polare

in forma polare $\rightarrow \sqrt{10^2 + 10^2}$

fase è $45° = \frac{\pi}{4}$, perché parte reale e parte immaginaria sono uguali

28.3.5

Da questo risultato: $\bar{I}_2 = \sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}$ si può scrivere la grandezza in funzione del tempo $i_2(t)$:

valore massimo = $\sqrt{2}$ * valore efficace = $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

$\text{sen}(\omega t + \varphi) = \text{sen}(100 t - \frac{\pi}{4})$

Quindi $i_2(t) = 2 \cdot \text{sen}(100 t - \frac{\pi}{4})$

Un ALTRO MODO, più semplice:
considerando che il risultato è un numero (E) diviso una impedenza, calcoliamo direttamente la impedenza ragionando in questi termini:
IL GENERATORE VEDE LA SERIE DI $R_1$ PIÙ IL PARALLELO DI C CIOÈ R IN PARALLELO ALLA SERIE DI $R_2$ e L.
Della Z l'impedenza che il generatore vede ha la seguente espressione

$$Z = R_1 + \frac{-jX_C(R_2 + jX_L)}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

Si ricava che

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{Z},$$

da cui la corrente $I_2$ si applica il partitore, da cui la corrente $I_2$ è pari alla corrente $I_1$ che entra nel parallelo moltiplicato per l'impedenza del ramo opposto $(-jX_C)$ e diviso la somma, cioè $R_2 + jX_L - jX_C$, ovvero

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{Z} \cdot \frac{-jX_C}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

che, sviluppando i conti sostituendo Z, diventa

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{R_1 + R_2\frac{R_1 X_L}{X_C} + j\left(X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C}\right)}$$

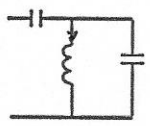
come prima.

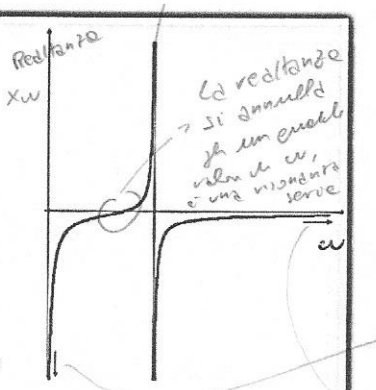
28.3.-e

28.3.d

frequenza $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, di antirisonanza

## Risonanza






**Teorema di Foster**

Solo condensatori e induttori;

la reattanza è funzione crescente di $\omega$.

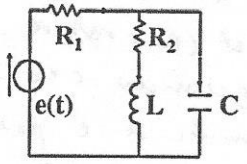
Circuito in assenza di componenti dissipative, si tratta di una pura reattanza.
In funzione di $\omega$ cresce sempre (teorema di Foster), la sua derivata è sempre positiva o nulla, mai negative.

$\omega \to 0 \Rightarrow$ La reattanza complessiva $\to \infty$

$\omega \to \infty \Rightarrow$ Reattanza del condensatore $\to 0$, quella dell'induttore $\to \infty$, il tutto rende a una reattanza nulla.
Col condensatore in serie la reattanza complessiva $\to 0$.

## Un esempio

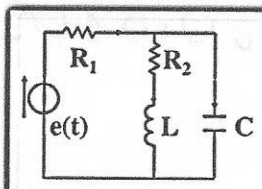
Risoluzione rete in regime sinusoidale.




$C = 1\text{mF}$;
$L = 50\text{ mH}$;
$R_1 = 10\ \Omega$;
$R_2 = 5\Omega$;
$e(t) = 20\sqrt{2}\ \text{sen}(100t)$.

Reattanza parallelo $\to \infty$, alla pulsazione $\omega_0$ di valore $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

In questo grafico c'è un valore di $\omega$ in cui la reattanza si annulla, è una risonanza serie.
La reattanza capacitiva è maggiore di quella induttiva quindi la corrente nel condensatore è più piccola in modulo di quella assorbita dall'induttore.
La corrente complessiva assorbita dal parallelo LC è una corrente prevalentemente induttiva, è sfasata in ritardo di 90° rispetto alla tensione.
A sinistra di questo ~~parallelo~~ valore, il parallelo si comporta come se fosse un unico induttore che può entrare in risonanza col condensatore in serie
A destra come un unico condensatore



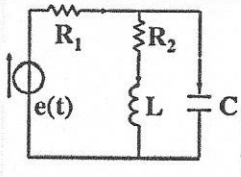

## Un esempio

$E = 20$

$X_L = \omega L = 5\ \Omega$

$X_C = \frac{1}{\omega C} = 10\ \Omega$

- Due equazioni alle maglie;
- Una equazione ai nodi.




## Un esempio

$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$;

$\bar{E} = R_1\bar{I}_1 + (R_1 + jX_L)\bar{I}_2$

$(R_2 + jX_L)\bar{I}_2 = -jX_C\bar{I}_3$

$\bar{E} = R_1(\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + (R_2 + jX_L)\bar{I}_2$

$\bar{I}_3 = \frac{R_2 + jX_L}{-jX_C}\bar{I}_2$

Un esempio di risoluzione rete in regime sinusoidale. → vd 28.3 a e n/t

## Un esempio

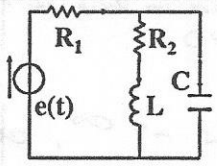
$$\bar{E} = \left(R_1 + R_2 \frac{R_1 X_L}{X_C} + j\left(X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C}\right)\right)\bar{I}_2$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{R_1 + R_2 \frac{R_1 X_L}{X_C} + j\left(X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C}\right)}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{10 + j10} = \frac{\bar{E}}{10\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$i_2(t) = 2 \operatorname{sen}\left(100\, t - \frac{\pi}{4}\right)$$

## Un diverso modo




$$Z = R_1 + \frac{-jX_C(R_2 + jX_L)}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{Z} \qquad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{Z} \frac{-jX_C}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{R_1 + R_2 \frac{R_1 X_L}{X_C} + j\left(X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C}\right)}$$

Questo metodo consente direttamente di calcolare l'impedenza equivalente vista dal generatore. Questo è possibile quando c'è un solo generatore, anche se è possibile ricondurre a questo applicando la sovrapposizione degli effetti.

---

IL PROBLEMA della MISURA IN REGIME SINUSOIDALE [08'48"]

## Strumenti di misura in regime sinusoidale

**Oscillografo o Oscilloscopio**

## Strumenti di misura in regime sinusoidale

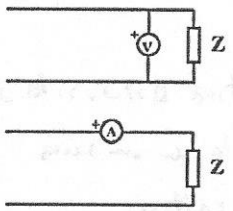
- **A valor massimo;**
- **A valor medio;**
- **A valor efficace.**

Grandezze di interesse: frequenza, fase

→ Grandezze che variano in modo sinusoidale.

Dal valore efficace dipende la potenza, per questo decidiamo scelto di rappresentare il valore efficace e non il valore massimo per esempio.

## Strumenti di misura in regime sinusoidale



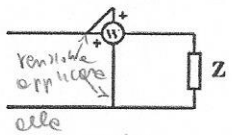

**Voltmetro** (a valore efficace, della tensione ai suoi morsetti)

**Amperometro** (a valore efficace)

Il voltmetro deve avere una impedenza molto elevata per non disturbare il circuito, altrimenti il generatore che alimenta il circuito non vede solo $\underline{Z}$, ma vede il parallelo dell'impedenza $\underline{Z}$ e dell'impedenza interna del voltmetro e quindi le correnti che essi erogano è diverse

L'amperometro, analogamente, deve avere una sua impedenza nulla, quanto più vicino ad un corto circuito.

## Strumenti di misura in regime sinusoidale



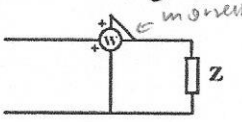

**Wattmetro**, misura la potenza attiva

**Varmetro** misura la potenza reattiva

MORSETTI AMPEROMETRICI MASSICCI, per non introdurre resistenze di contatto.

Il wattmetro misura la potenza attiva $V_i \cos\varphi$
In continua è uno strumento non necessario
Deve essere un doppio bipolo, con 4 morsetti: due in contatto con la tensione, in parallelo al carico e due morsetti devono essere attraversati dalla corrente, quindi sono in serie al carico.
I morsetti in serie prendono il nome di amperometrici ed è detto amperometrico il percorso che fa la corrente in essi.
Sono detti morsetti voltmetrici quelli che si mettono in parallelo all'impedenza e si parla della voltmetrica del wattmetro.
Il voltmetro deve presentare una impedenza molto elevata ($\to \infty$) altrimenti la tensione applicata alla voltmetrica è la somma della caduta sulla amperometrica e l'impedenza $\underline{Z}$.
Alla voltmetrica del wattmetro deve andare la tensione sulla impedenza.

## Strumenti di misura in regime sinusoidale



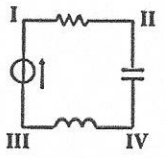

morsetti della voltmetrica

**Wattmetro**

**Varmetro**

Il varmetro misura la potenza reattiva $V_i \sin\varphi$

## Multimetro




$V_{13} = 1{,}00E{+}1V$
$R_{12} = 1{,}00E{+}1\Omega$
$C_{24} = 1{,}00E{-}3F$
$L_{43} = 1{,}00E{-}1H$

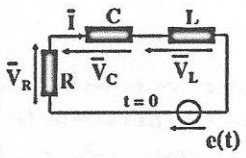
Il multimetro lavorando anche in regimi sinusoidali, esso darà valori efficaci e non valori istantanei.

ACV = Alternate Current Voltage

$V\sim$ = Tensioni sinusoidali

→ L e C invertite rispetto all'immagine sui -

## Esercizi (Soluzione)




$R = 10\ \Omega$;
$X_c = 10\Omega$;
$X_L = 20\ \Omega$.
$e(t) = 10\sqrt{2}\ \text{sen}(100\ t)$ V.

**$P = 5$ W; $Q_L = 10$ VAr; $Q_C = -5$VAr**

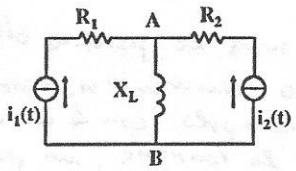
Calcolare potenza attiva, reattiva ed apparente assorbite dai singoli bipoli.

P = potenza attiva assorbita dal resistore

$Q_L$ = potenza reattiva assorbita dall'induttore, notare l'unità di misura VAr, con Ar = Ampere reattivi

$Q_C$ = potenza reattiva erogata dal condensatore, potenza apparente

## Esercizi (Nuovo)

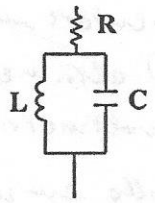



$R_1 = 5\Omega$;
$R_2 = 20\Omega$;
$X_L = 10\Omega$;
$i_1(t) = 10\sqrt{2}\ \text{sen}\ \omega t$;
$i_2(t) = 10\sqrt{2}\ \cos\ \omega t$.

Utilizzando il teorema di Norton, calcolare la tensione tra A e B.

Dominio delle pulsazioni.

## Esercizi (Soluzione)




$R = 100\ \Omega$;
$L = 100$ mH;
$C = 100\ \mu$F

**Calcolare l'impedenza equivalente del bipolo ($\omega = 100$ rad/s).**

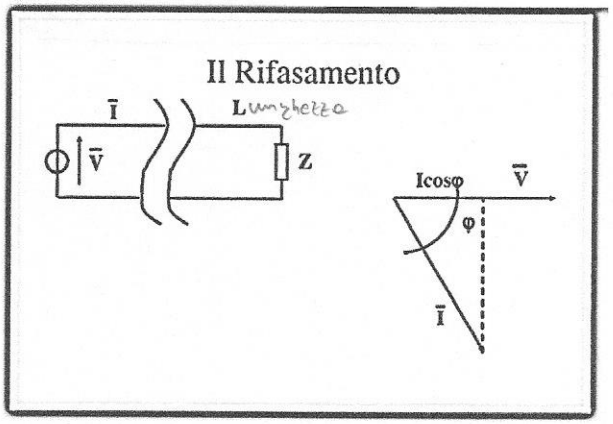
**$Z = 100 - j\,90$**

LEZIONE 29

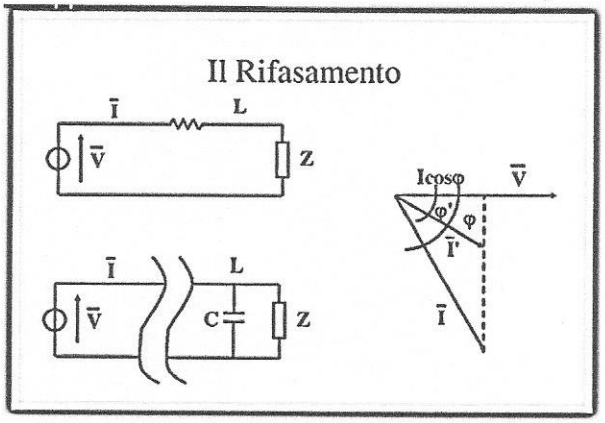
# Il rifasamento; l'accoppiamento mutuo

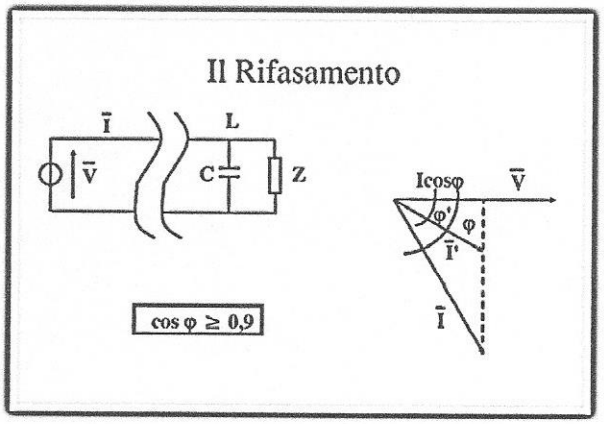
Prof. Luciano De Menna
47'54"

Il rifasamento
L'accoppiamento mutuo
Reciprocità
Esercizi



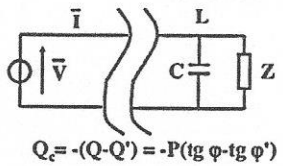

6'



12'

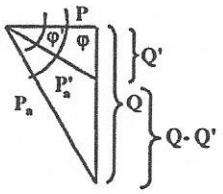
## Il Rifasamento




$$Q_c = -(Q-Q') = -P(tg\,\varphi - tg\,\varphi')$$

$$Q_c = -\frac{V^2}{X_c} = -\omega C V^2$$

$$C = \frac{P(tg\,\varphi - tg\,\varphi')}{\omega V^2}$$




16'30"

## Le reti in c.a.

**Tutte le proprietà delle reti valide per il regime continuo (o c.c.) restano valide anche nel regime sinusoidale (o c. a.)**

perché si parla di fasori e di un potente e ammettenze
↳ numero complesso

## Le reti in c. a. , proprietà

- **Metodo dei potenziali ai nodi;**
- **Metodo delle correnti di maglia;**
- **Sovrapponibilità degli effetti;** (bipoli lineari)
- **Teoremi del generatore equivalente di tensione e di corrente;**
- **Teorema di reciprocità**

## Le reti in a.c. , alternate current

- **Non valgono i teoremi di non amplificazione;**

## Le proprietà di non amplificazione!

- **Principio di non amplificazione delle tensioni: Se in una rete di bipoli esiste un solo ramo attivo, allora il potenziale dei due nodi a cui il lato attivo si appoggia sono l'uno il massimo e l'altro il minimo tra tutti i potenziali dei nodi della rete.**

20'40"

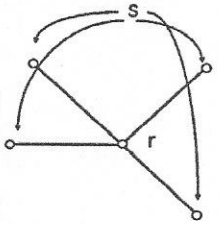
## Non amplificazione delle tensioni

- **Se per un nodo r tutti i prodotti $V_{rs}$ $I_{rs}$ delle tensioni e delle correnti che convergono nel nodo stesso - con le convenzioni implicite nell'ordine dei pedici - sono maggiori od eguali a zero, il potenziale di tale nodo non può essere né quello massimo né quello minimo tra i potenziali di tutti i nodi della rete.**

↳ utilizzatore

## Non amplificazione delle tensioni

$\Sigma_s I_{rs} = 0.$




**Ma in c.a., anche se tutti i bipoli sono passivi, non si può affermare che $v_{rs}(t)\, i_{rs}(t) \geq 0$ per ogni t!**

Vero per il regime continuo.

## Le reti in a.c.

- **N-poli ed n-bipoli di impedenze.**

## Due porte

$$\overline{V}_1 = Z_{11}\overline{I}_1 + Z_{12}\overline{I}_2$$
$$\overline{V}_2 = Z_{21}\overline{I}_1 + Z_{22}\overline{I}_2$$

**Matrice delle impedenze**

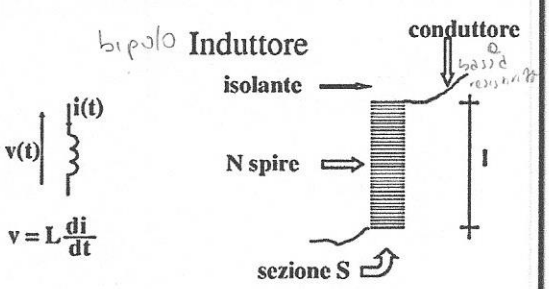
## Due porte

$$\overline{I}_1 = Y_{11}\overline{V}_1 + Y_{12}\overline{V}_2$$
$$\overline{I}_2 = Y_{21}\overline{V}_1 + Y_{22}\overline{V}_2$$

**Matrice delle ammettenze**

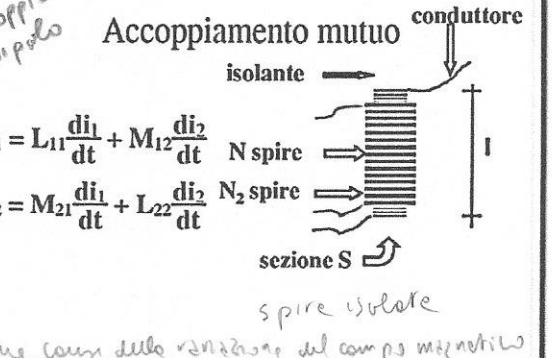
25'40"

bipolo **Induttore**




$$v = L\frac{di}{dt}$$

Doppio bipolo **Accoppiamento mutuo**




$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$

spire isolate

due cause della variazione del campo magnetico

$L_{11} > 0$ M può essere $> 0$ o $< 0$

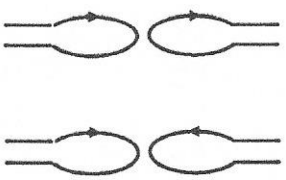
$L_{22} > 0$

32'00"

## Accoppiamento mutuo

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$

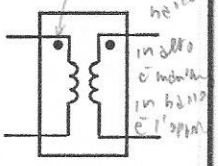


32'52"

## Accoppiamento mutuo

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$



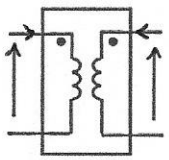

M è una induttanza, si misura in Henry

Simbolo di accoppiamento mutuo

## Accoppiamento mutuo

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$

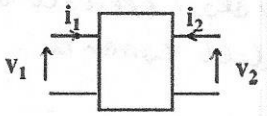


34'00"

## Potenza assorbita (istantanea)

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$




$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_{11} i_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} + L_{22} i_2 \frac{di_2}{dt}$$

35'57"

## Energia assorbita

(Potenza istantanea per un intervallo di tempo dt)

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_{11} i_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} + L_{22} i_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$dW = p\,dt = L_{11} i_1 di_1 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + L_{22} i_2 di_2 =$$
$$= \frac{1}{2} L_{11} di_1^2 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + \frac{1}{2} L_{22} di_2^2$$

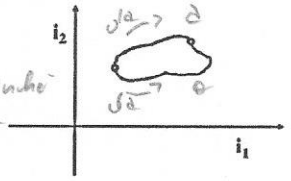
dW = quantità di energia assorbita nell'intervallo dt del doppio bipolo

36'00"

Il differenziale dW della energia assorbita è un differenziale esatto

## Reciprocità

$$dW = p\,dt = L_{11} i_1 di_1 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + L_{22} i_2 di_2 =$$
$$= \frac{1}{2} L_{11} di_1^2 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + \frac{1}{2} L_{22} di_2^2$$




$M_{12} = M_{21}$ condizione affinché il differenziale sia esatto.

## Energia immagazzinata

$$dW = p\,dt = L_{11} i_1 di_1 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + L_{22} i_2 di_2 =$$
$$= \frac{1}{2} L_{11} di_1^2 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + \frac{1}{2} L_{22} di_2^2$$

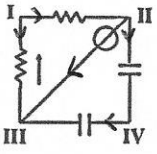
$M_{12} = M_{21}$

$$W = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M\, i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

38'53"

38'00"

## Multimetro: un ponte in A.C.

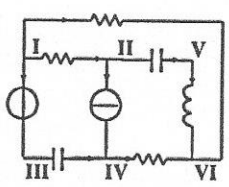



$R_{12}$ = 1,00E+1 Ω
$C_{24}$ = 1,00E-3 F
$C_{34}$ = 5,00E-3 F
$R_{13}$ = 2,00E+0 Ω
$V_{23}$ = 5,00E+1 V
$R_{13}$ = 2,00E+0 Ω
f = 50 Hz

Il multimetro permette anche la corrente alternata, fornisce valori efficaci delle tensioni e delle correnti.

Tensione fra morsetto I e morsetto III : 0,83 V, valore efficace
I IV : 0,00 V perché si è realizzata la condizione di equilibrio del ponte. [40'30"]

## Multimetro: un circuito con due generatori



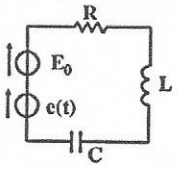

$R_{12} = 1{,}00E+1\ \Omega$; $C_{34} = 3{,}00E-3$ F;
$C_{25} = 1{,}00E-3$ F; $R_{16} = 1{,}00E+1\ \Omega$;
$L_{56} = 1{,}00E-1$ H; $R_{46} = 1{,}00E+1\ \Omega$;

$V_{13} = 1{,}00E+1$ V
$I_{24} = 1{,}00E+0$ A } effica

$f = 50$ Hz

Provare a calcolare qualche grandezza

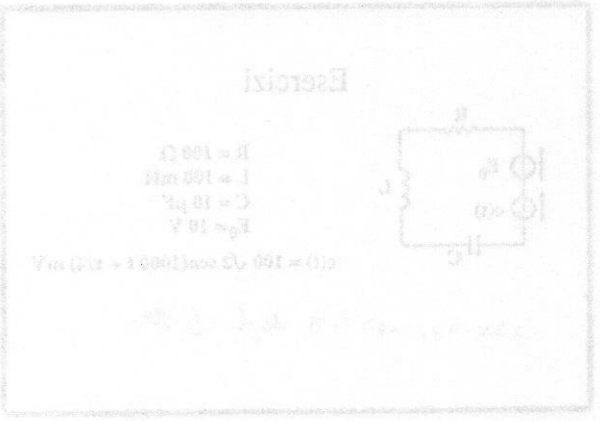
## Esercizi




$R = 100\ \Omega$
$L = 100$ mH
$C = 10\ \mu$F
$E_0 = 10$ V

$e(t) = 100\sqrt{2}\ \mathrm{sen}(1000\,t + \pi/4)$ mV

Sovrapponibilità degli effetti



LEZIONE 30

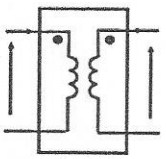
# Circuiti equivalenti dell'accoppiamento mutuo

Prof. Luciano De Menna
48'38"

L'accoppiamento mutuo in AC
L'accoppiamento perfetto
Circuito equivalente
L'accoppiamento non perfetto
Circuito equivalente
Esercizi

## Energia immagazzinata

$$W = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M\, i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$



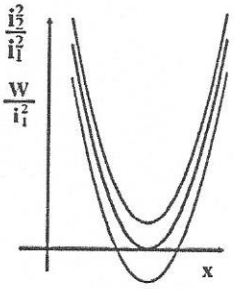
$$\frac{W}{i_1^2} = \frac{1}{2} L_{11} + M_{12} \frac{i_2}{i_1} + \frac{1}{2} L_{22} \frac{i_2^2}{i_1^2}$$

## Accoppiamento perfetto

$$\frac{W}{i_1^2} = \frac{1}{2} L_1 + M_{12} \frac{i_2}{i_1} + \frac{1}{2} L_2 \frac{i_2^2}{i_1^2}$$

$$x = \frac{i_2}{i_1} \qquad \boxed{M \le \sqrt{L_1 L_2}}$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$




## Coefficiente k

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$ **Coefficiente di accoppiamento**

$$k = \pm 1$$ **Accoppiamento perfetto**

## L'accoppiamento mutuo in A.C.

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt} \qquad \bar{V}_1 = Z_{11}\bar{I}_1 + Z_{12}\bar{I}_2$$

$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} \qquad \bar{V}_2 = Z_{21}\bar{I}_1 + Z_{22}\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1\bar{I}_1 + j\omega M\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2 = j\omega M\bar{I}_1 + j\omega L_2\bar{I}_2$$

$$\boxed{M^2 = L_1 L_2}$$

## L'accoppiamento mutuo in A.C.

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1\bar{I}_1 + j\omega M\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2 = j\omega M\bar{I}_1 + j\omega L_2\bar{I}_2$$

$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = a$$

$$\frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} = \bar{I}_1 + \frac{M}{L_1}\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$

$$\frac{\bar{V}_2}{j\omega M} = \bar{I}_1 + \frac{L_2}{M}\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$

## L'accoppiamento mutuo in A.C.

$$\frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} = \bar{I}_1 + \frac{M}{L_1}\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$

$$\frac{\bar{V}_2}{j\omega M} = \bar{I}_1 + \frac{L_2}{M}\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \qquad \bar{I}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{a} + \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1}$$

$$\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\frac{1}{a}$$

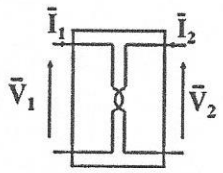
## L'accoppiamento mutuo in A.C.

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \qquad \bar{I}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{a} + \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \\ \dfrac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\dfrac{1}{a} \end{cases}$$

## Trasformatore ideale

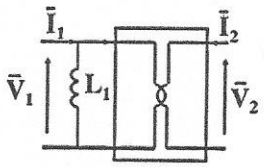
$$\begin{cases} \dfrac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \\ \dfrac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\dfrac{1}{a} \end{cases}$$




$$\bar{I}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{a} + \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1}$$

## Circuito equivalente dell'accoppiamento perfetto

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \\ \bar{I}_1 = -\dfrac{\bar{I}_2}{a} + \dfrac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} \end{cases}$$




## L'accoppiamento mutuo in A.C.

$M^2 < L_1 L_2$

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2$$
$$\bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2$$

$$L_1' + L_1'' = L_1$$
$$L_2' + L_2'' = L_2$$

$$M^2 = L_1'' L_2''$$

## L'accoppiamento mutuo in A.C.

$$L_1' + L_1'' = L_1 \qquad \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2$$
$$L_2' + L_2'' = L_2$$
$$M^2 = L_1'' L_2'' \qquad \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2$$

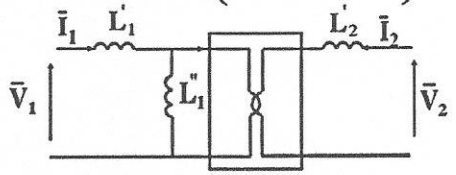
$$\bar{V}_1 = j\omega L_1' \bar{I}_1 + \left(j\omega L_1'' \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2\right)$$

$$\bar{V}_2 = j\omega L_2' \bar{I}_2 + \left(j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2'' \bar{I}_2\right)$$

## Circuito equivalente

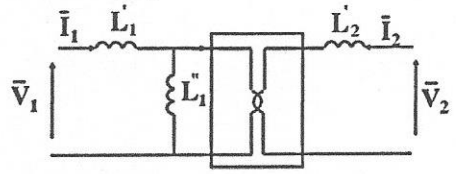
$$\bar{V}_1 = j\omega L_1'\bar{I}_1 + \left(j\omega L_1''\bar{I}_1 + j\omega M\bar{I}_2\right)$$

$$\bar{V}_2 = j\omega L_2'\bar{I}_2 + \left(j\omega M\bar{I}_1 + j\omega L_2''\bar{I}_2\right)$$



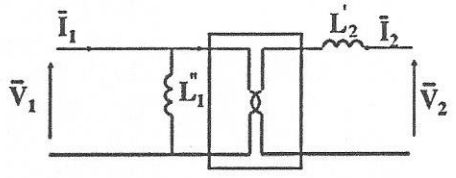

## Circuito equivalente

$$L_1' + L_1'' = L_1$$
$$L_2' + L_2'' = L_2$$
$$M^2 = L_1'' L_2''$$



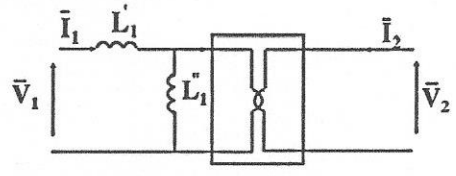

## Circuito equivalente

$$L_1' + L_1'' = L_1$$
$$L_2' + L_2'' = L_2$$
$$M^2 = L_1'' L_2''$$



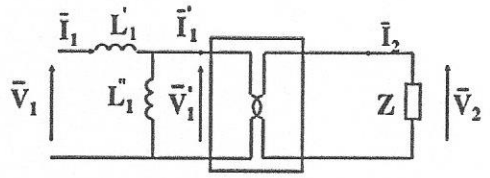

## Circuito equivalente

$$L_1' + L_1'' = L_1$$
$$L_2' + L_2'' = L_2$$
$$M^2 = L_1'' L_2''$$



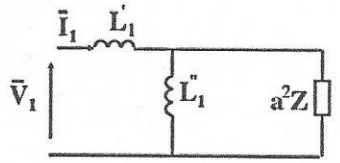
## Circuito equivalente

$$\frac{\bar{V}_1'}{\bar{V}_2} = a; \quad \frac{\bar{I}_1'}{\bar{I}_2} = -\frac{1}{a} \qquad \frac{\bar{V}_1'}{\bar{I}_1'} = -a^2 \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = a^2 Z$$




## Circuito equivalente

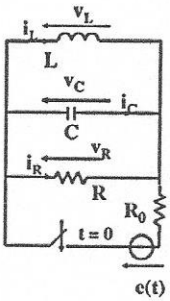
$$\frac{\bar{V}_1'}{\bar{V}_2} = a; \quad \frac{\bar{I}_1'}{\bar{I}_2} = -\frac{1}{a} \qquad \frac{\bar{V}_1'}{\bar{I}_1'} = -a^2 \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = a^2 Z$$




## Osservazioni

- **L'accoppiamento mutuo è trasparente per la potenza attiva.**
- **Il trasformatore ideale è trasparente per la potenza attiva e reattiva.**

## Esercizi

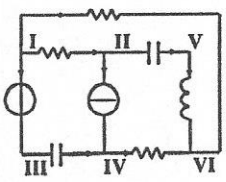



**Per il circuito in figura determinare l'equazione risolvente nella incognita $v_c$**

$$\frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{1}{R_eC}\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{LC} = \frac{1}{R_0C}\frac{de}{dt}$$

$$R_e = \frac{R_0 R}{R_0 + R}$$

## Multimetro: un circuito con due generatori



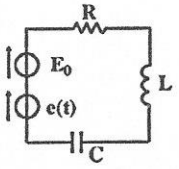

$R_{12}$ = 1,00E+1 Ω; $C_{34}$ = 3,00E-3 F;
$C_{25}$ = 1,00E-3 F; $R_{16}$ = 1,00E+1 Ω;
$L_{56}$ = 1,00E-1 H; $R_{46}$ = 1,00E+1 Ω;

$V_{13}$ = 1,00E+1 V

$I_{24}$ = 1,00E+0 A

f = 50 Hz

## Esercizi

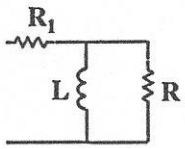



R = 100 Ω
L = 100 mH
C = 10 μF
$E_0$ = 10 V

$e(t) = 100\sqrt{2}\,\text{sen}(1000\,t + \pi/4)$ mV

$i(t) = 2\sqrt{2}\,\text{sen}(1000\,t + \pi/4)$ mV

## Esercizi

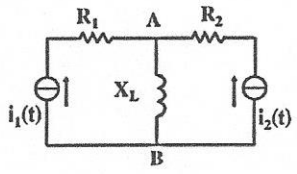



R = 100 Ω;
L = 100 mH;
R1 = 5 Ω

**Calcolare l'impedenza equivalente del bipolo ( ω = 100 rad/s).**

**Z = 10 - j 5**

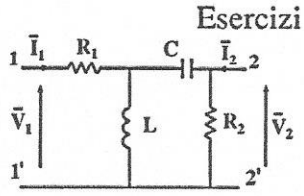
## Esercizi




$R_1$= 5Ω;
$R_2$= 20Ω;
$X_L$= 10Ω;
$i_1(t) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}\,\omega t$;
$i_2(t) = 10\sqrt{2}\,\cos\omega t$.

$V_{AB}$ = j10 (10+j10)

## Esercizi




$R_1 = 200\,\Omega$
$R_2 = 100\,\Omega$
$L = 100$ mH
$C = 10\,\mu$F

**Determinare i parametri Y del doppio bipolo**

30.7

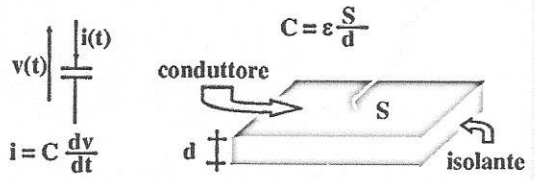
LEZIONE 31

# Circuiti equivalenti dei componenti; il trasformatore

Prof. Luciano De Menna
43'11"

Condensatori e induttori reali
Circuiti equivalenti
Il trasformatore senza perdite
Cenni di distribuzione dell'energia elettrica
Esercizi

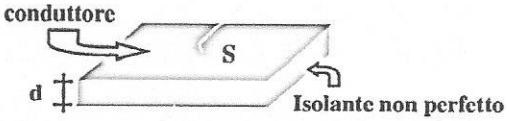
## Condensatore




## Condensatore reale

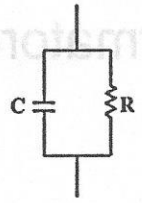
- **Bande colorate;**
- **Dimensioni e costi diversi;**
- **Precisione;**
- **Tensione di lavoro;**
- **Dissipazione;**

## Condensatore reale




$i = C\frac{dv}{dt}$ $\qquad$ $i_r = GV$

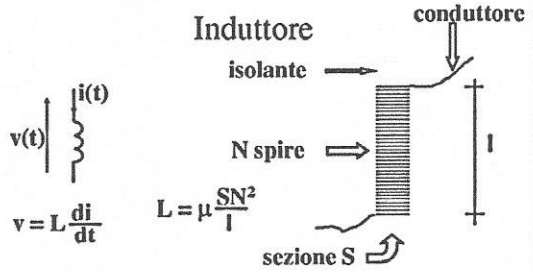
## Condensatore reale




Circuito equivalente

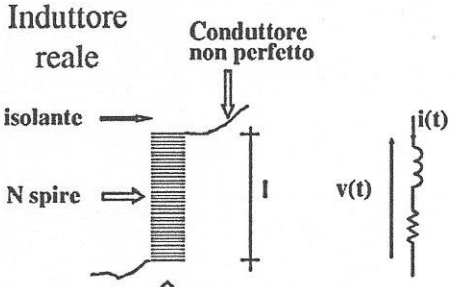
$i = C\frac{dv}{dt}$ $\qquad$ $i_r = GV$

## Induttore

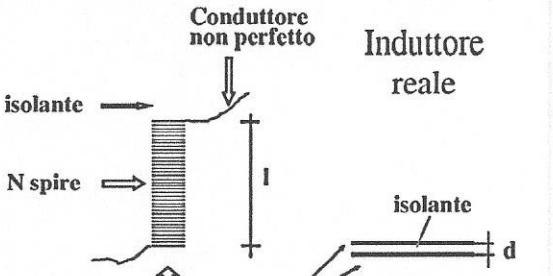



$v = L\frac{di}{dt}$ $\qquad$ $L = \mu\frac{SN^2}{l}$

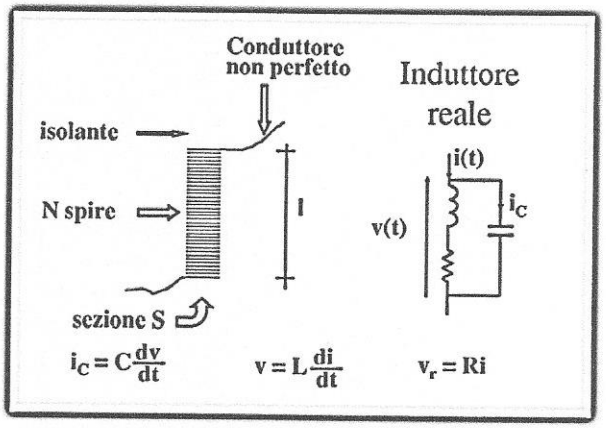
## Induttore reale

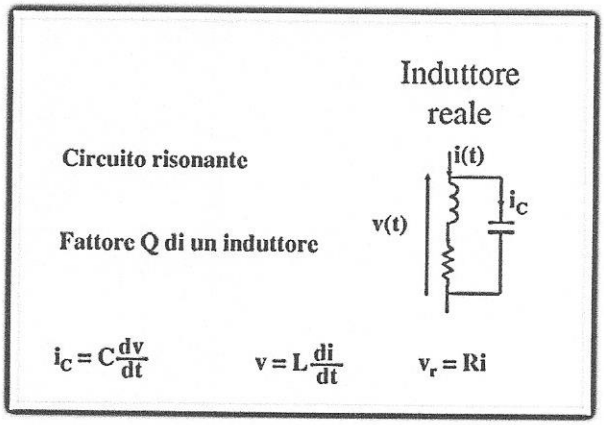


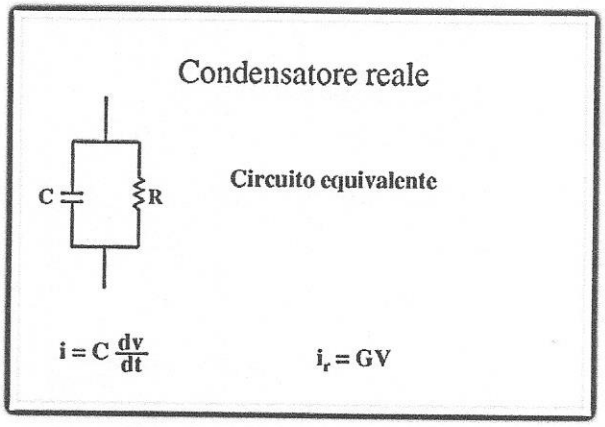

$v = L\frac{di}{dt}$ $\qquad$ $v_r = Ri$

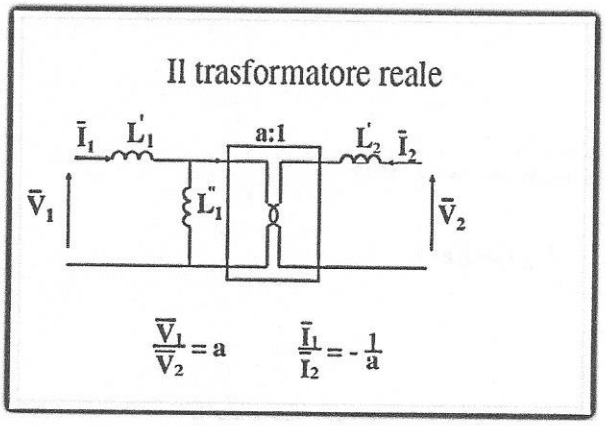



Differenza di potenziale

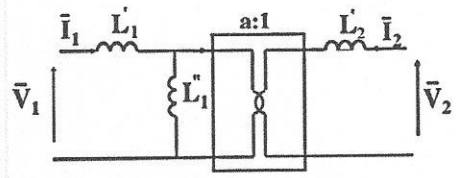

Conduttore
non perfetto
Induttore
reale
isolante
N spire
l
sezione S
i(t)
v(t)
$i_C$
$i_C = C\frac{dv}{dt}$
$v = L\frac{di}{dt}$
$v_r = Ri$


Induttore
reale
Circuito risonante
Fattore Q di un induttore
i(t)
v(t)
$i_C$
$i_C = C\frac{dv}{dt}$
$v = L\frac{di}{dt}$
$v_r = Ri$


Condensatore reale
C
R
Circuito equivalente
$i = C\frac{dv}{dt}$
$i_r = GV$

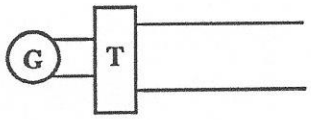

Il trasformatore reale
$\bar{I}_1$
$L'_1$
a:1
$L'_2$
$\bar{I}_2$
$\bar{V}_1$
$L''_1$
$\bar{V}_2$
$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a$
$\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\frac{1}{a}$

## Il trasformatore reale




$$\bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1 = -\bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2$$

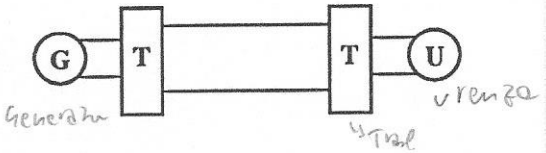
## Il trasformatore reale




$$\bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1 = -\bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2$$

29'20"

## Il trasformatore reale




$$\bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1 = -\bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2$$

## Il trasformatore reale

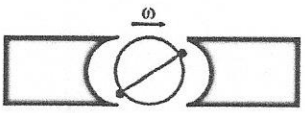
**Alta tensione** (100 kV e più) (trasmissione su grandi linee)

**Media tensione** (da 10 a 30 kV) (

**Bassa tensione** (a. 100 V ) (per l'utenza)

31'30"

## I generatori




Spira su un supporto rotante in un campo magnetico

$e_1(t) = E_{M1} \operatorname{sen}(\omega t)$

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

una spira su un supporto che ruota in un campo magnetico.

## I generatori polifasi o polifasici



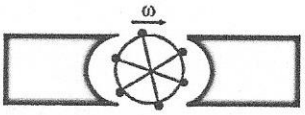

$e_1(t) = E_{M1} \operatorname{sen}(\omega t)$
$e_2(t) = E_{M2} \operatorname{sen}(\omega t - 2\pi/3)$
$e_3(t) = E_{M3} \operatorname{sen}(\omega t - 4\pi/3)$

} Hanno un angolo di $\frac{1}{3} \cdot 2\pi$

↑ valore efficace della tensione, dato dal numero di spire.

Abbiamo un gruppo di più gruppi di spire, più avvolgimenti sullo stesso rotore.
Si sfrutta la stessa macchina per produrre non una tensione, ma più tensioni, ad esempio tre tensioni.
Pur potendo essere n avvolgimenti, ci si limita a 3, che saranno sede di 3 forze elettromotrici, di 3 tensioni ai morsetti, del tipo come in figura.

## I generatori trifasi




$e_1(t) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t)$
$e_2(t) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t - 2\pi/3)$
$e_3(t) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t - 4\pi/3)$

tre gruppi di avvolgimenti con lo stesso n° di spire

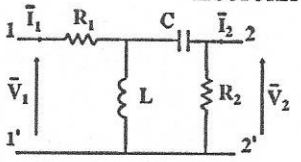
sfasati lungo la periferia del rotore di $2\pi/3$

Questo generatore trifase fornisce 3 coppie di morsetti (6 morsetti) ai quali troviamo le tensioni $e_1, e_2, e_3$.

(Distribuzione a 3 o 4 fili invece di una)

37'

## Esercizi

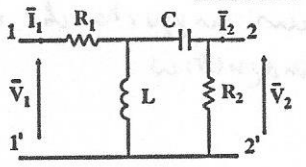



$R_1 = 200\ \Omega$
$R_2 = 100\ \Omega$
$L = 100\ \text{mH}$
$C = 10\ \mu\text{F}$

**Determinare i parametri Y del doppio bipolo**



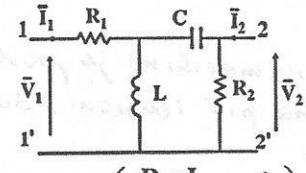
## Esercizi




$R_1 = 200\ \Omega$
$R_2 = 100\ \Omega$
$L = 100$ mH
$C = 10\ \mu F$
$\omega = 100$ rad/s

$$Y_{11} = \frac{1}{\frac{-L/C}{j\left(\omega L - 1/\omega C\right)} + R_1} = 4.99\ 10^{-3} - j2.52\ 10^{-4}$$

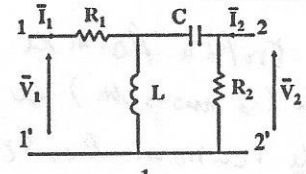
## Esercizi




$R_1 = 200\ \Omega$
$R_2 = 100\ \Omega$
$L = 100$ mH
$C = 10\ \mu F$
$\omega = 100$ rad/s

$$Y_{22} = \frac{R_2 + j\left(\frac{R_1 \omega L}{R_1 + j\omega L} - \frac{1}{\omega C}\right)}{j\left(\frac{R_1 \omega L}{R_1 + j\omega L} - \frac{1}{\omega C}\right) R_2} = 1.00\ 10^{-2} + j2.02\ 10^{-3}$$

## Esercizi

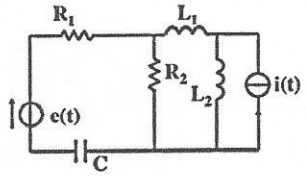



$R_1 = 200\ \Omega$
$R_2 = 100\ \Omega$
$L = 100$ mH
$C = 10\ \mu F$
$\omega = 100$ rad/s

$$Y_{21} = \frac{1}{R_1 + \frac{L/C}{j(\omega L - 1/\omega C)}} \frac{\omega L}{\omega L - 1/\omega C} =$$

$$= 2.02\ 10^{-4} + j4.99\ 10^{-3}$$

## Esercizi



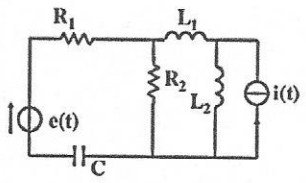

$e(t) = 2\sqrt{2}\ \text{sen}(100\ t)$ V
$i(t) = 3\sqrt{2}\ \text{sen}(100\ t)$ A

$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$L_1 = 10$ mH
$L_2 = 1$ mH
$C = 1$mF.

$\bar{V}_{R2} = 0.53 + j\ 0.76$

$\bar{I}_{R2} = 0.35 + j\ 0.35$

## Esercizi




$e(t) = 2\sqrt{2}\,\text{sen}(100\,t)$ V

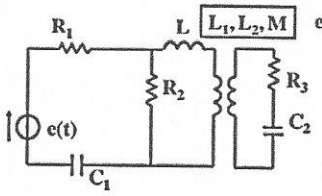
$i(t) = 3\sqrt{2}\,\text{sen}(100\,t)$ A

$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$
$L_1 = 10$ mH
$L_2 = 1$ mH
$C = 1$mF.

$v_{R2} = 0.92\sqrt{2}\,\text{sen}(100\,t + 0.962)$

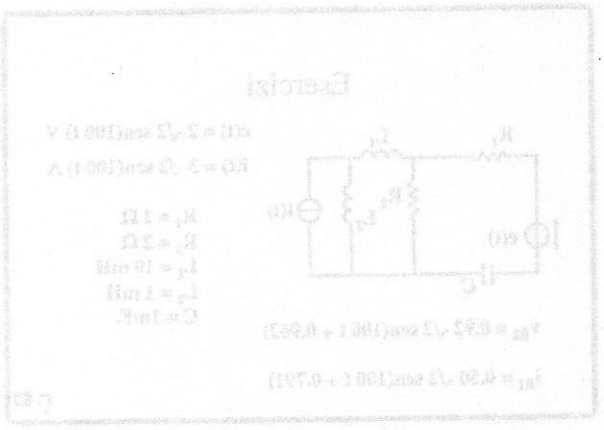
$i_{R1} = 0.50\sqrt{2}\,\text{sen}(100\,t + 0.791)$

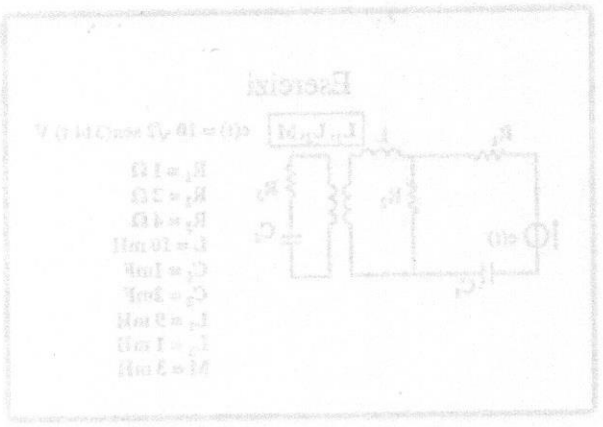
## Esercizi




$e(t) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}(314\,t)$ V

$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$L = 10$ mH
$C_1 = 1$mF
$C_2 = 2$mF
$L_1 = 9$ mH
$L_2 = 1$ mH
$M = 3$ mH





LEZIONE 32

# Sistemi trifasi simmetrici ed equilibrati

Prof. Luciano De Menna

42'15"

## I generatori trifasi



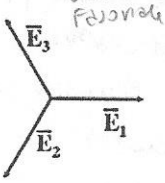

$e_1(t) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t)$
$e_2(t) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t - 2\pi/3)$
$e_3(t) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t - 4\pi/3)$

Spira che gira in un campo magnetico:
Triplex => 3 gruppi di spire, 3 avvolgimenti
si ha produzione di una f.e.m. sinusoidale, per la legge di Faraday - Neumann, per ogni spira.
Le tre tensioni sono sfasate di $\frac{2\pi}{3}$, anche girando insieme, sfasate fisse delle spire.

## Terna simmetrica

Termini vettoriali Fasoriali

$e_1(t) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t)$
$e_2(t) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t - 2\pi/3)$
$e_3(t) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t - 4\pi/3)$




**Terna simmetrica e diretta**

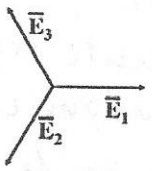
TERNA SIMMETRICA e DIRETTA
perché possiamo cambiare la sequenza delle tre avvolgimenti ed avere una nuova terna

## Terna simmetrica, Fasori

$\overline{E}_1 = E\, e^{j\omega t}$

$\overline{E}_2 = E\, e^{j(\omega t - 2\pi/3)}$

$\overline{E}_3 = E\, e^{j(\omega t - 4\pi/3)}$



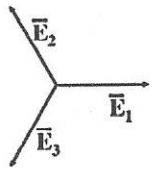

**Terna simmetrica e diretta**

## Terna simmetrica

$\bar{E}_1 = E\, e^{j\omega t}$

$\bar{E}_2 = E\, e^{j(\omega t - 4\pi/3)} = E\, e^{j(\omega t + 2\pi/3)}$

$\bar{E}_3 = E\, e^{j(\omega t - 2\pi/3)} = E\, e^{j(\omega t + 4\pi/3)}$

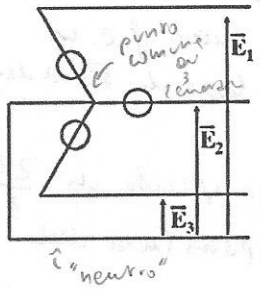


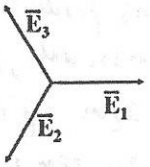

**Terna simmetrica e inversa**

La nuova terna deriva da una nuova equazione

$\bar{E}_2$ ritarda rispetto a $\bar{E}_1$ di $\frac{2\pi}{3}$

## I generatori trifasi




Un modello di ogni generatore è collegato in modo da avere una corrente di medesimo valore in tre generatori.

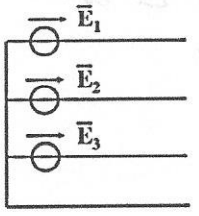
I quali conduttori dal generatore trifase escono 4 fili: i 3 fili di linea e il filo conduttore, detto neutro, collegato col punto comune dei tre generatori.

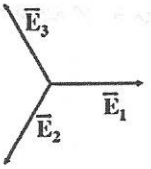
In queste condizioni i 3 generatori appaiono come collegati a stella e il filo neutro è quello che parte dal centro stella dei tre generatori.

Le tensioni sono $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$ rispetto al filo neutro.

A loro uno schema diverso del generatore trifase.

## I generatori trifasi




Fra le tre tensioni sono definibili altrettante tensioni, d.d.p., come mostrato in figura sotto: $\bar{V}_{12}$, $\bar{V}_{23}$, $\bar{V}_{31}$:

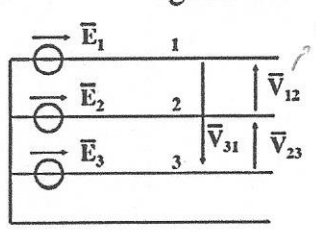
$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$

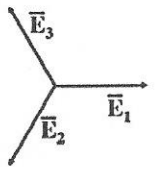
Queste tre tensioni sono delle tensioni concatenate.

Mentre le considerate tensioni stellate sono le tensioni tra il conduttore di linea e il filo neutro (o centro stella dei generatori).

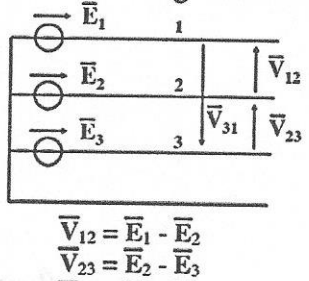
Esistono relazioni tra le tensioni concatenate e le tensioni stellate.

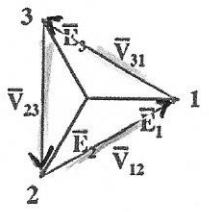
## I generatori trifasi



## I generatori trifasi

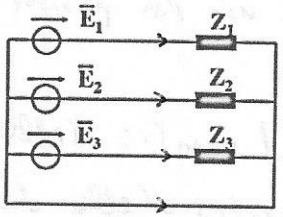



$$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$$
$$\bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3$$
$$\bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1$$

Le tensioni concatenate costituiscono i lati del triangolo che ha per vertici le terminazioni dei vettori $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$.

## Carico a stella



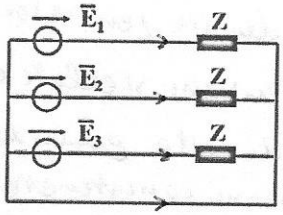

corrente di linea

$$\bar{I}_r = \frac{\bar{E}_r}{Z_r}$$

↳ Impedenza di carico

Il sistema generatore è collegato a un sistema utilizzatore, un carico, una terna simmetrica di impedenze

## Carico equilibrato




$$\bar{I}_r = \frac{\bar{E}_r}{Z}$$

$$\bar{I}_1 = I\, e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$\bar{I}_2 = I\, e^{j(\omega t - 2\pi/3 - \varphi)}$$

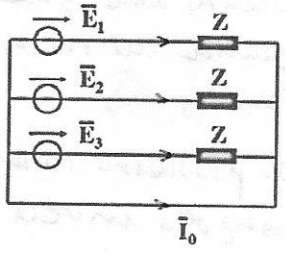
$$\bar{I}_3 = I\, e^{j(\omega t - 4\pi/3 - \varphi)}$$

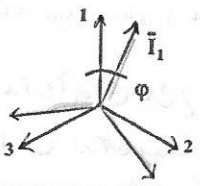
$$I = \frac{E}{Z}$$

Carico equilibrato: le impedenze sono uguali. Si parla anche di impedenza equivalente.

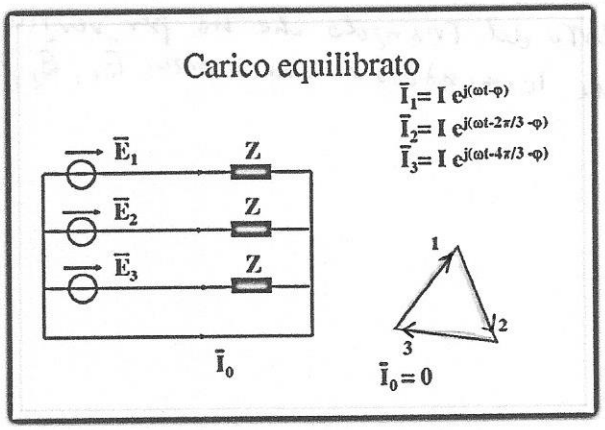
## Carico equilibrato

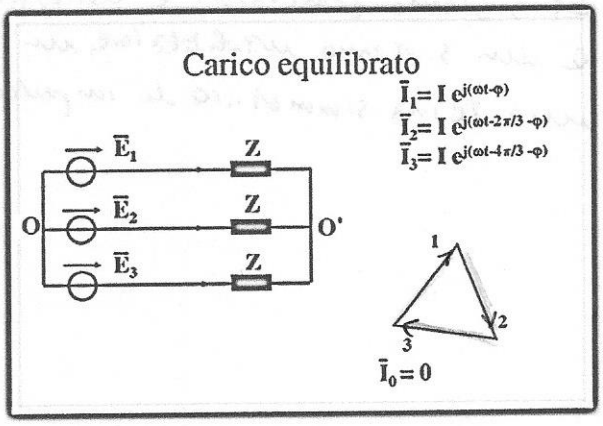
$$\bar{I}_1 = I\, e^{j(\omega t - \varphi)}$$
$$\bar{I}_2 = I\, e^{j(\omega t - 2\pi/3 - \varphi)}$$
$$\bar{I}_3 = I\, e^{j(\omega t - 4\pi/3 - \varphi)}$$

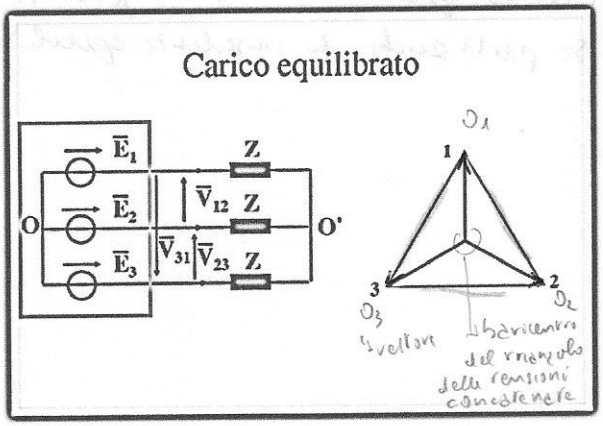


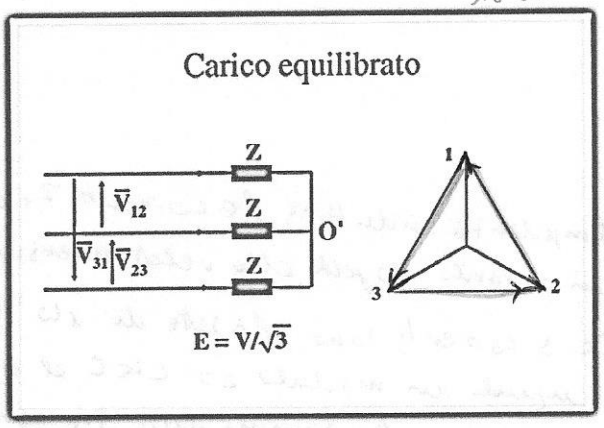

Impedenza induttiva, la corrente $\bar{I}_1$ è in ritardo rispetto alla relativa tensione $\bar{E}_1$.
Le 3 correnti sono sfasate di 120° tra di loro e uguali in modulo $\Rightarrow$ LKC al nodo centrale $\Rightarrow$ la somma delle tre correnti $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ deve essere uguale a $-\bar{I}_0$




18'00"




Poiché $\bar{I}_0 = 0$, possiamo eliminare il conduttore neutro, perché se in un ramo della rete circola corrente nulla, si può eliminare quel ramo della rete, ovvero sostituirlo con un simbolo a vuoto, che ha proprietà di non far passare corrente.

La d.d.p. tra il centro stella del carico e il centro stella dei tre generatori è nulla. In questo caso la trasmissione dell'energia elettrica non avviene a quattro fili, ma a tre fili

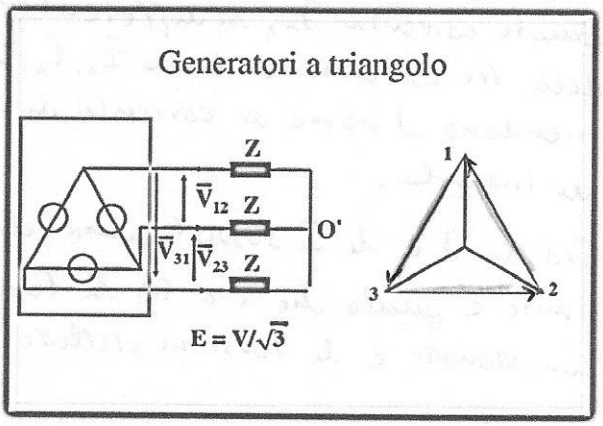
Ma in realtà dobbiamo renderci indipendenti dal centro stella dei tre generatori.

La terna delle tensioni stellate è simmetrica e diretta quindi la terna delle tensioni concatenate è simmetrica: le tre tensioni concatenate sono uguali in modulo e sfasate di 120°.

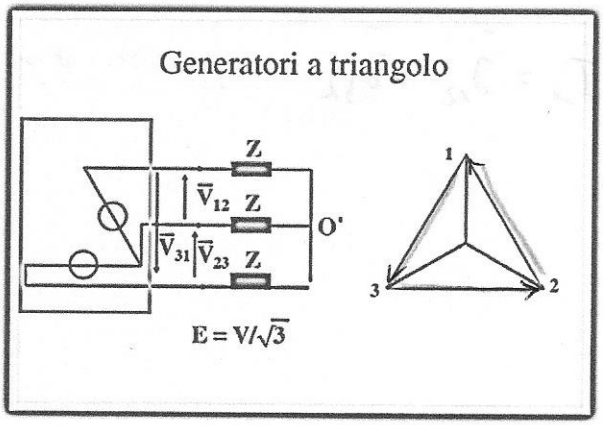
Dobbiamo renderci indipendenti da come sono collegati i tre generatori e ragionare in base alla conoscenza delle 3 tensioni concatenate e quindi del triangolo delle tensioni concatenate

I generatori li possiamo immaginare collegati a triangolo invece che a stella.

18'32"

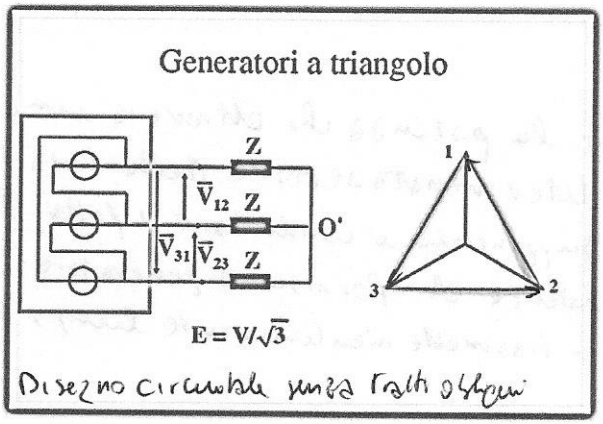



$\bar{V}_{12}$, $\bar{V}_{23}$, $\bar{V}_{31}$ sono simmetriche e dirette, la loro somma è zero.
I tre generatori hanno delle tensioni non indipendenti tra di loro: assegnate due tensioni la terza è data ed è pari all'opposto della somma.
Questo vuol dire che possiamo usare due soli generatori collegati come in figura.



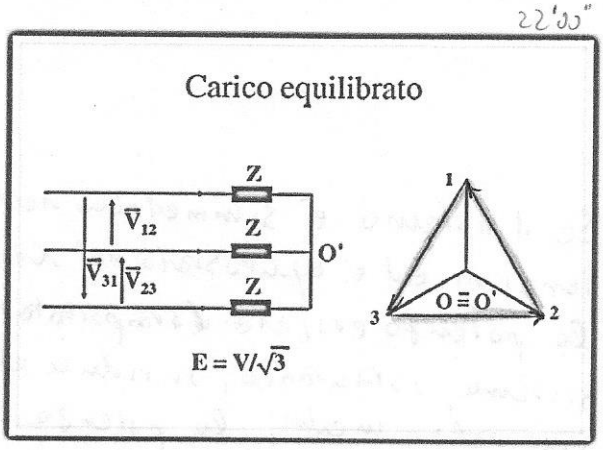

Il valore efficace della tensione è $E = \frac{V}{\sqrt{3}}$ [20'05"]

La tensione stellata è più piccola di $\sqrt{3}$ della tensione concatenata. È la coppia 380 V, 220 V, $\frac{380}{\sqrt{3}} \simeq 220$.
La distribuzione trifase dell'energia elettrica all'utente è data da una terna, in Europa, di tensioni concatenate da 380 V alle quali corrisponde una tensione stellata da 220 V. [21'18"]




I generatori sono elettricamente collegati a triangolo anche se non sembra dal punto di vista schematico.

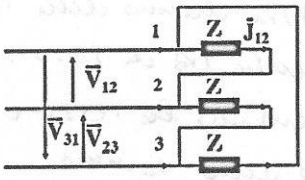
22'00"

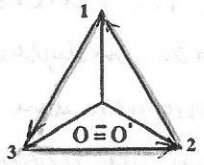



Tutto quello che possiamo dire sulla rete trifase deve essere indipendente da come sono collegati effettivamente i generatori, deve dipendere solo dalla terna di tensioni concatenate.
Il centro stella del generatore ha lo stesso potenziale del centro stella del carico, O'.
I due punti sono coincidenti nel baricentro del triangolo delle tensioni concatenate.
Possiamo immaginare il carico stesso collegato a triangolo, invece che a stella.

22'45"

## Carico equilibrato a triangolo



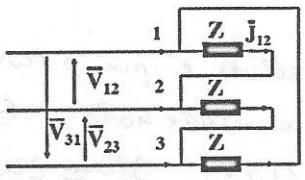

$$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{Z}$$

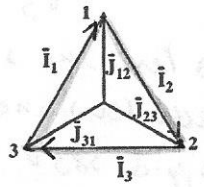
In questo caso il centro stella del carico scompare (O'). Ad ogni impedenza del carico è applicata una tensione concatenata. Queste correnti $\bar{J}_{12}$, si differenziano dalle tre correnti di linea $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$, prendono il nome di correnti di maglia o di triangolo.

Tra le J e le I sussiste una relazione simile a quella che c'è tra le tensioni concatenate e le tensioni stellate.

23'44"

## Carico equilibrato a triangolo




$$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{Z}$$

$\bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31}$ equazione al nodo 1 (o 2?)

24'50"

## La potenza nei sistemi trifasi

$$p(t) = e_1(t)\, i_1(t) + e_2(t)\, i_2(t) + e_3(t)\, i_3(t)$$

somma delle potenze erogate dai singoli generatori.

↳ potenza istantanea erogata dal sistema trifase o trasportata dal sistema trifase.

è la potenza che attraversa una determinata sezione della linea trifase. Supponendo i conduttori perfetti, la potenza che fornisce il generatore si trasmette istantaneamente lungo la linea

26'05"

## La potenza nei sistemi equilibrati

$$p(t) = e_1(t)\, i_1(t) + e_2(t)\, i_2(t) + e_3(t)\, i_3(t)$$

a meno c'è 2 ET

$$p(t) = EI\left[\operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}(\omega t-\varphi) + \operatorname{sen}\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}-\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}-\varphi\right)\right] = 3EI\cos\varphi +$$

$$+ EI\left[\cos(2\omega t-\varphi) + \cos\left(2\omega t-\frac{4\pi}{3}-\varphi\right) + \cos\left(2\omega t-\frac{2\pi}{3}-\varphi\right)\right].$$

↳ potenza istantanea

doppia pulsazione

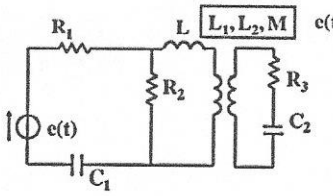
Se il sistema è simmetrico nelle tensioni ed è equilibrato nel carico la potenza erogata (trasportata) dal sistema, istantanea, si riduce al suo valor medio; la potenza pulsante è nulla e il valor medio vale proprio $3EI\cos\varphi$

29'10"

## La potenza nei sistemi equilibrati

- **La potenza istantanea è uguale alla potenza media**
- **La potenza media è pari a $3EI\cos\varphi$ o $\sqrt{3}VI\cos\varphi$.**

## Esercizi

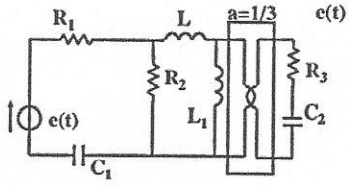



$e(t) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}(314\,t)$ V

$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$L = 10$ mH
$C_1 = 1$mF
$C_2 = 2$mF
$L_1 = 9$ mH
$L_2 = 1$ mH
$M = 3$ mH

$L_1 L_2 = M^2$ accoppiamento perfetto.

## Esercizi



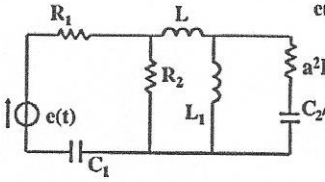

$e(t) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}(314\,t)$ V

$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$L = 10$ mH
$C_1 = 1$mF
$C_2 = 2$mF
$L_1 = 9$ mH
$L_2 = 1$ mH
$M = 3$ mH

$L_1 L_2 = M^2$

$a = \frac{L}{M} = \frac{1}{3}$

## Esercizi

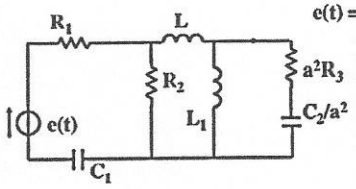



$e(t) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}(314\,t)$ V

$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$L = 10$ mH
$C_1 = 1$mF
$C_2 = 2$mF
$L_1 = 9$ mH
$L_2 = 1$ mH
$M = 3$ mH

$L_1 L_2 = M^2$
$a = 1/3$

## Esercizi



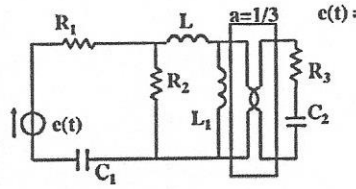

$e(t) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(314\,t)$ V

$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$L = 10$ mH
$C_1 = 1$mF
$C_2 = 2$mF
$L_1 = 9$ mH
$L_2 = 1$ mH
$M = 3$ mH

$\bar{V}'_{R3} = 0.85 + j\,0.22$

a=1/3

## Esercizi



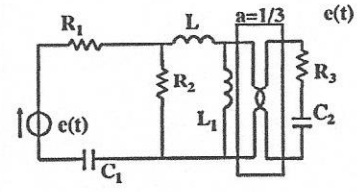

$e(t) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(314\,t)$ V

$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$L = 10$ mH
$C_1 = 1$mF
$C_2 = 2$mF
$L_1 = 9$ mH
$L_2 = 1$ mH
$M = 3$ mH

$\bar{V}_{R3} = 2.56 + j\,0.66$

a=1/3

## Esercizi




$e(t) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(314\,t)$ V

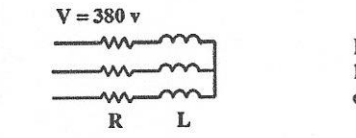
$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$L = 10$ mH
$C_1 = 1$mF
$C_2 = 2$mF
$L_1 = 9$ mH
$L_2 = 1$ mH
$M = 3$ mH

$v_{R3} = 0{,}88\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(314\,t + 0.25)$

a=1/3

## Esercizi

**Terna simmetrica e diretta di tensioni concatenate**




$R = 0.1\mathrm{k}\,\Omega$
$L = 100$ mH
$\omega = 314$ rad/s

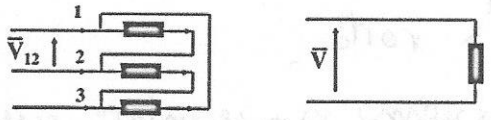
LEZIONE 33

# Sistemi trifasi squilibrati; misura della potenza nei sistemi trifasi

Prof. Luciano De Menna
41'54"

Sistemi trifasi
Esercizi
Sistemi equilibrati e squilibrati
Misura della potenza nei sistemi trifasi

## Confronto trifase/monofase




$P = \sqrt{3} V I_{3f} \cos\varphi$ — $I_{3f}$ = corrente di linea nel trifase

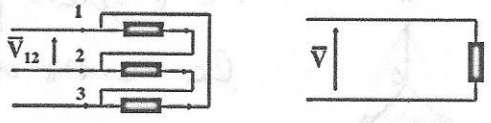
$P = V I_{1f} \cos\varphi$ — corrente di linea nel carico monofasico

$I_{1f} = \sqrt{3}\, I_{3f}$

carico equivalente

$\cos\varphi$ è legato alla natura del carico

## Confronto trifase/monofase




$I_{1f} = \sqrt{3}\, I_{3f}$

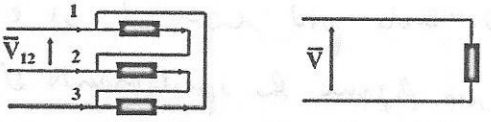
$P^d_{3f} = 3\rho \frac{L}{S_{3f}} (I_{3f})^2$ — potenza dissipata in linea

$P^d_{1f} = 2\rho \frac{L}{S_{1f}} (I_{1f})^2$

$S_{3f} = \frac{S_{1f}}{2}$

valore efficace della corrente

## Confronto trifase/monofase




$S_{3f} = \frac{S_{1f}}{2}$ Rapporto fra sezioni

$(Vol)_{3f} = 3\, L\, S_{3f} = \frac{3}{4}(2\, L\, S_{1f}) = \frac{3}{4}(Vol)_{1f}$

volume del conduttore

Confronto

Abbiamo uno stesso carico, collegato a massa, per un sistema trifase collegato a stella e un sistema monofase.

Il carico nel sistema trifase è equivalente al carico nel sistema monofase: equivalente => stessa tensione, stesso $\cos\varphi$, che è legato alla natura del carico.

I due carichi devono dissipare la stessa potenza.

La potenza nei due casi sono: $P = \sqrt{3} V I_{3f} \cos\varphi$ e $P = V I_{1f} \cos\varphi$, da cui

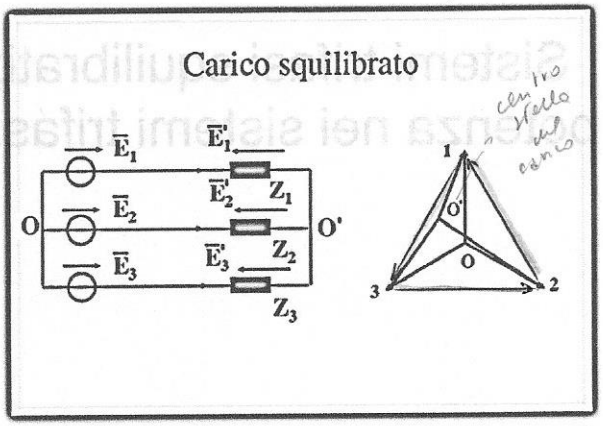
$$I_{1f} = \sqrt{3}\, I_{3f}.$$

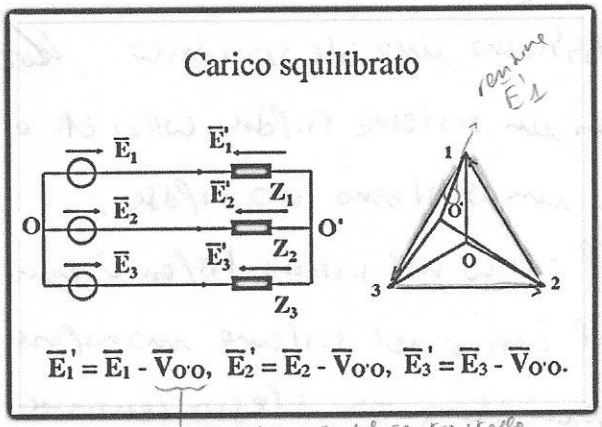
Nei conduttori percorsi da corrente in entrambi i casi viene dissipata una certa potenza in calore. Sono: $P^d_{3f} =$ $P^d_{1f} =$ da cui

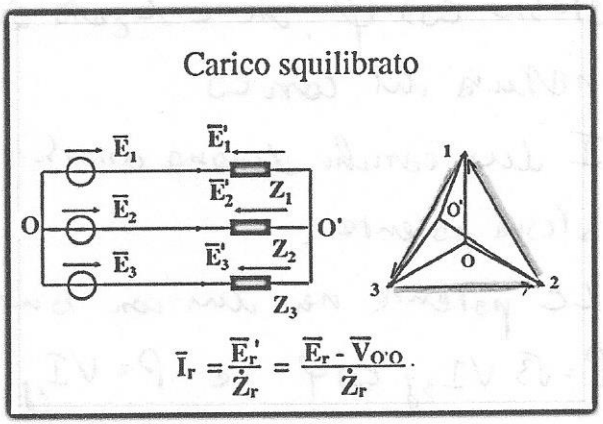
$S_{3f} = \frac{S_{1f}}{2}$, rapporto tra le sezioni.

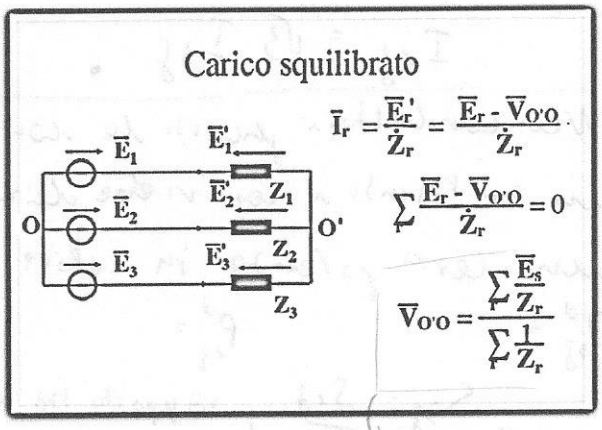
Dal rapporto tra le sezioni possiamo calcolare il volume dei conduttori nei due casi, trovando che quello del sistema trifase è $\frac{3}{4}$ del monofase

11'20"



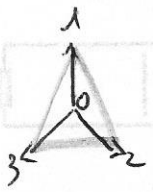




Carico squilibrato, con l'inserimento di 3 impedenze, $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ e $\dot{Z}_3$ a stella e supposte diverse. Quindi le tensioni sulle impedenze, $\bar{E}_1'$, $\bar{E}_2'$, $\bar{E}_3'$, non sono più uguali in modo e sfasate di 120°.

Quindi il punto O' non è detto che sia allo stesso potenziale del punto O perché la simmetria del carico si è rotta.

Possiamo rappresentare questa situazione immaginando che il triangolo delle tensioni concatenate rappresenti il potenziale del centro stella del generatore.




Ma a questo punto le terne di tensioni corrispondenti alle tre tensioni sulle impedenze non coincide più con la precedente. Il potenziale del centro stella del carico, il punto O' non coincide più con O, si è spostato (si pensi lo spostamento è volutamente molto enfatizzato).

Notare che se posso noto il vettore $\bar{V}_{O'O}$, conoscendo detto lo spostamento del centro stella, potremmo definire

$$\bar{E}'_1 = \bar{E}_1 - \bar{V}_{O'O}, \quad \bar{E}'_2 = \bar{E}_2 - \bar{V}_{O'O}, \quad \bar{E}'_3 = \bar{E}_3 - \bar{V}_{O'O}.$$

Quando si passa noto $\bar{V}_{O'O}$ potremmo scrivere la corrente in un qualsiasi ramo di linea r facendo il rapporto tra la tensione sull'impedenza ($\bar{I}'_r$) con l'impedenza.

$$\bar{I}_r = \frac{\bar{E}'_r}{\bar{Z}_r} = \frac{\bar{E}_r - \bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_r}$$

Quando tutto si riduce al calcolare di quanto si è spostato il centro stella rispetto al baricentro del triangolo delle tensioni concatenate per effetto dello squilibrio del carico.

Teorema di Millman $$\sum_r \frac{\bar{E}_r - \bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_r} = 0 \qquad (1)$$

Dunque il potenziale di O' rispetto a O si può facilmente calcolare poiché la tensione è lo stesso dell'esercizio in continua, valido anche in regime sinusoidale, con una applicazione del metodo dei potenziali ai nodi che ha dato una formula, detta di Millman.

Se ognuna delle correnti è data da questa espressione, siccome la somma delle correnti nel nodo O' o nel nodo O deve essere nulla (1° LK) allora la relazione di Millman può essere scritta.

La sommatoria (1) può essere stessa in due sommatorie, in cui $\bar{V}_{O'O}$ è indipendente dal pedice r, per cui possiamo scrivere

$$\bar{V}_{o'o} = \frac{\sum_r \frac{\bar{E}_s}{z_r}}{\boxed{\sum_r \frac{1}{z_r}}}$$ somma delle ammettenze

Una volta noto $\bar{V}_{o'o}$ è possibile calcolare la $\bar{I}_r$ con la relazione analizzata in precedente e cioè

$$\bar{I}_r = \frac{\bar{E}'_r}{z'_r} = \frac{\bar{E}_r - \bar{V}_{o'o}}{z_r}$$

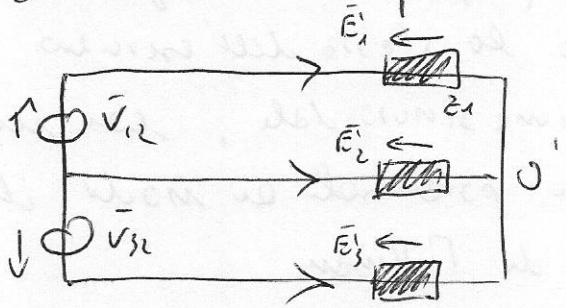
17'00"

---

Il punto O

Era stato scelto per comodità il punto O il baricentro del triangolo delle tensioni concatenate.

Si può immaginare che il sistema delle tensioni concatenate non sia prodotto da 3 generatori ma per esempio da due generatori disposti nelle maniera seguente:



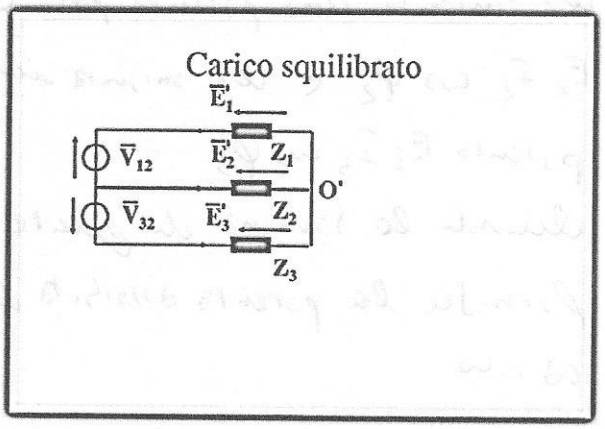

i due generatori devono fornire $\bar{V}_{12}$ e $\bar{V}_{32}$ nei versi come da figura.

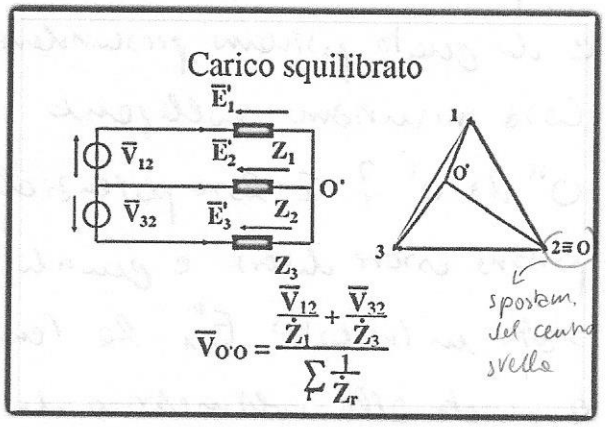
Allora equivale a dire che il potenziale del nodo 2 è stato portato al potenziale del centro stella O, ricordo, che il centro stella del generatore per la mancanza di uno dei rami si è ricondotto al punto caratteristico del potenziale della linea due.

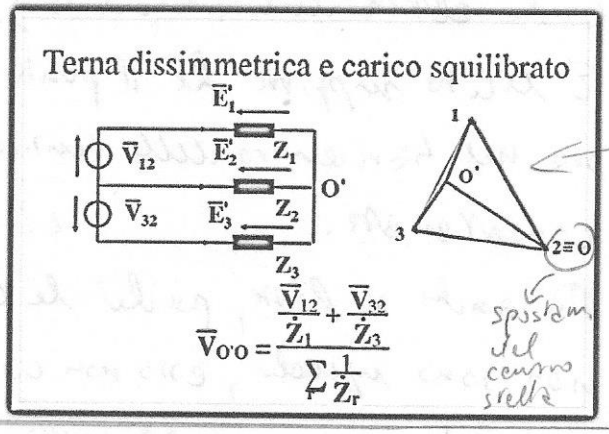
È come aver scelto O coincidente con il punto 2.

A questo punto calcolando con la formula di Millman con le nuove tensioni dei generatori e la stessa impedenza di prima, ottengo lo spostamento del centro stella del punto 2, cioè $\bar{V}_{o'2}$ e poi calcolare le ...→

17'10"




← ... corrente nei rami. [18'38"]

Abbiamo

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\frac{\bar{V}_{12}}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{V}_{32}}{\dot{Z}_3}}{\sum_r \frac{1}{\dot{Z}_r}}$$

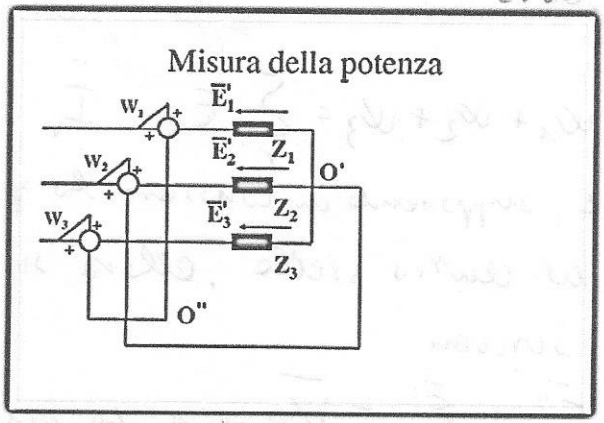
A questo punto, noto lo spostamento del centro stella è immediato calcolare le tensioni effettive sulle tre impedenze e quindi le correnti nel carico.

Questo ragionamento e questo metodo sono applicabili anche nel caso di una terna di tensioni concatenate non sia simmetrica.

Il metodo dello spostamento del centro stella è un metodo generale.

---

23'20"

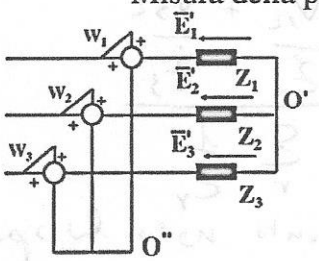



$W_1$ è un wattmetro

## MISURA DELLA POTENZA in un sistema trifase

Ricordando che un sistema trifase è una rete in cui ci interessa misurare la potenza assorbita dal carico, inseriamo nel wattmetro nella stessa maniera come un lampo e basta. Al suo voltmetro è applicata nella voltmetrica una tensione pari a $\bar{V}_{1O'}$ perché il punto O' è stato collegato con un conduttore neutro al centro stella del carico, quindi la tensione tra X e O'. Per $W_1$ la tensione tra 1 e O' sulla voltmetrica. Per una simmetrica è attraversata dalla corrente $I_1$ e meno della corrente derivata della voltmetrica.

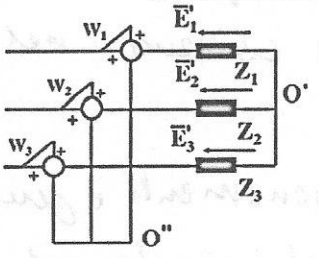
## Misura della potenza




$$W_1 + W_2 + W_3 = \sum_r \bar{E}_r'' \cdot \bar{I}_r$$

$$\bar{E}_r'' = \bar{E}_r' - \bar{V}_{O'O''}$$

## Teorema di Aaron




$$W_1 + W_2 + W_3 = \sum_r \bar{E}_r'' \cdot \bar{I}_r$$

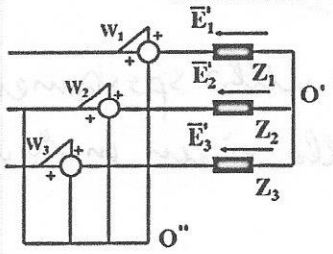
scalare

$$\bar{E}_r'' = \bar{E}_r' - \bar{V}_{O'O''}$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sum_r \bar{E}_r' \cdot \bar{I}_r - \bar{V}_{O'O''} \sum_r \bar{I}_r = \sum_r \bar{E}_r' \cdot \bar{I}_r$$

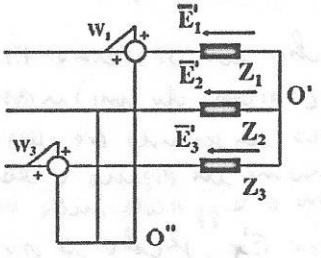
sommatoria nulla

## Inserzione Aaron




$$W_1 + W_2 + W_3 = \sum_r \bar{E}_r' \cdot \bar{I}_r - \bar{V}_{O'O''} \sum_r \bar{I}_r = \sum_r \bar{E}_r' \cdot \bar{I}_r$$

## Inserzione Aaron




$$W_1 + W_3 = P$$

Il wattmetro 1 misura una potenza pari a $E_1 I_1 \cos\varphi_1$.
$W_2$ misura una potenza pari a $E_2 I_2 \cos\varphi_2$ e $W_3$ misura una potenza $E_3 I_3 \cos\varphi_3$.
Quindi la somma di queste fornisce la potenza assorbita dal carico. 24'55"

O' può essere un punto non accessibile e di questo possiamo prescindere.
Cosa misuriamo collegando O" da O'? I loro potenziali possono essere diversi e quindi è stato inserito $\bar{E}_1''$, la tensione applicata allo voltmetrico da una e la altre due, $\bar{E}_2''$ e $\bar{E}_3''$.
È facile supporre che il punto O" sia nel baricentro delle tensioni concatenate. 26'20"
Ma anche se poste, poiché le Z non sono uguali, esso non coincide con O'.

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sum_r \bar{E}_r'' \cdot \bar{I}_r$$

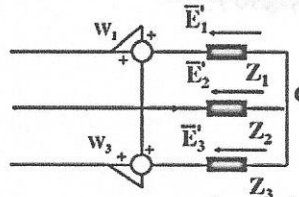
(la differenza tensione tra voltmetriche scalare)

e, supponendo di conoscere lo spostamento del centro stella, allora si può scrivere

$$\bar{E}_r'' = \bar{E}_r' - \bar{V}_{O'O''}$$ e da questo

dicendo il cosiddetto Teorema di Aaron. [28']

## Inserzione Aaron




30'16"

$W_1 + W_3 = P$

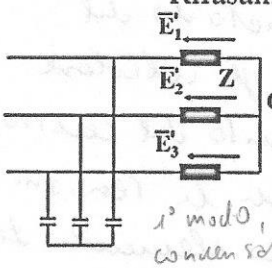
SI DIMOSTRA CHE

$W_3 - W_1 = \frac{Q}{\sqrt{3}}$

per carico equilibrato

Inserzione Aaron, con 2 due wattmetri in contrapposizione sulle due linee

## Rifasamento nel sistema trifase




$C = \frac{P(tg\,\varphi - tg\,\varphi')}{3\,\omega\,E^2}$

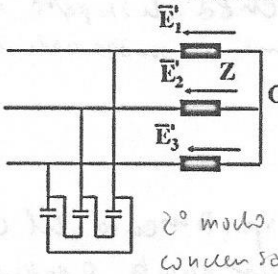
estensione stella del sistema trifase

1° modo, condensatori a stella

$\varphi$ = fase iniziale; $\varphi'$ = rifasamento

→ fase finale a cui vogliamo rifasare

## Rifasamento




$C = \frac{P(tg\,\varphi - tg\,\varphi')}{3\,\omega\,V^2}$

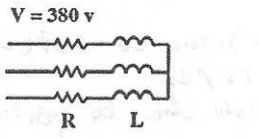
→ $V^2$ è $3E^2$

2° modo condensatori collegati a triangolo

34'20"

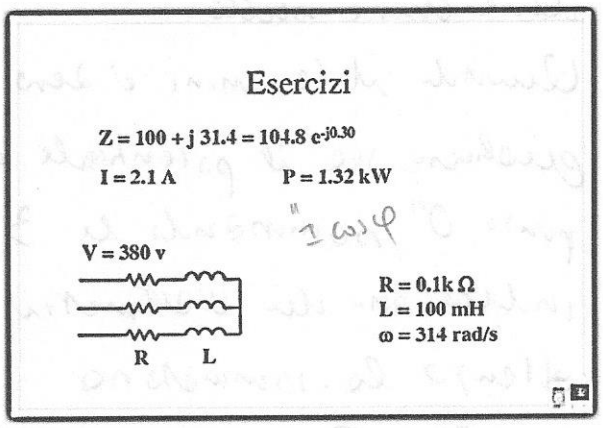
## Esercizi

**Terna simmetrica e diretta di tensioni concatenate**

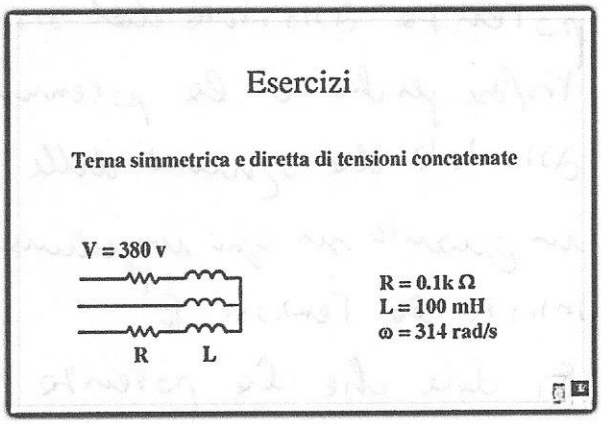



R = 0.1k Ω
L = 100 mH
ω = 314 rad/s

La somma $\bar{I}_r$ è quella delle correnti che entrano in O' e quindi deve essere nulla [28'30"]
Quando il termine è zero e quindi sia il potenziale del punto O'', sommando le 3 indicazioni dei wattmetri otteniamo la somma di $\bar{E}_r \cdot \bar{I}_r$ e questa è la potenza assorbita dal sistema trifase perché è la potenza assorbita da ognuno delle fasi in quanto su ogni impedenza insiste la tensione $\bar{E}'$.
Si dice che la potenza, in un sistema trifase, è indipendente dal centro stella [25'16"]
Questo teorema di Aaron ci consente di fare una notevole semplificazione.
Se l'indicazione della potenza è indipendente dal centro stella, allora possiamo scegliere un qualsiasi punto O''.
Possiamo immaginare di collegare O'' a uno dei conduttori di linea, così metterlo allo stesso potenziale, ad es. della linea $Z_2 \Rightarrow \dot{E}_2 = 0$. 30'16"
Questa è detta inserzione Aaron




Z è l'impedenza del singolo carico (equilibrato).




Carico non equilibrato.
Applicare il metodo del centro stella per calcolare lo spostamento del centro stella e quindi la tensione su ognuno degli elementi del carico.

---

Riepilogo:

I sistemi trifase sono convenienti: per una stella portata da un sistema trifase e uno monofase, confrontando il volume di materiale utilizzato, quello del sistema trifase è $\frac{3}{4}$ di quello monofase.

I sistemi trifase squilibrati: con il metodo dello spostamento del centro stella, un sistema di fase squilibrato si risolve con grande semplicità applicando la formula di Millman che consente appunto di calcolare lo spostamento del centro stella del carico rispetto a qualsiasi (per ora) centro stella del generatore, che può essere la terna simmetrica, il baricentro del triangolo delle tensioni concatenate, ma può essere un qualsiasi punto che può anche essere il punto rappresentativo del potenziale di uno dei conduttori di linea.
Noto lo spostamento del centro stella si può calcolare direttamente la tensione sul carico, direttamente sul carico e quindi, dividendo per l'impedenza si ha la corrente che scorre nella singola linea.
Questo è vero anche se il sistema delle tensioni concatenate non è simmetrico. Per ora stiamo parlando delle potenze in un sistema trifase.
Già sapendo che la potenza istantanea è nulla, dobbiamo noto che la particolare struttura del sistema trifase consente di misurare la potenza che attraversa una linea trifase in una certa sezione utilizzando solo due voltmetri e non tre. Questa inserzione, detta di Aron, dipende appunto dalla indipendenza della potenza dal centro stella che è il risultato del teorema di Aron.

33.6 Può succedere che alcune il neutro nei sistemi trifase.

LEZIONE 34

# Dinamica dei circuiti di ordine superiore

Prof. Luciano De Menna
42'45"

Dinamica dei circuiti di ordine superiore
Un esempio

## Circuiti di ordine superiore

- **Equazioni di Kirchhoff;**
- **Soluzione del sistema;**
- **Riduzione ad un'unica equazione;**
- **L'ordine dell'equazione risultante;**
- **Numero delle condizioni iniziali;**
- **Numero dei componenti a memoria.**

## Circuiti di ordine superiore



## Circuiti di ordine superiore

**Equazione omogenea.**

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{\alpha_r t}.$$

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^{p} A_r e^{\alpha_r t} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{s_k} B_{k,r} t^{r-1} e^{\beta_k t}$$

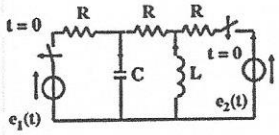
## Circuiti di ordine superiore

- **Soluzione particolare;**
- **Soluzione di regime.**

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

- **Dipende da n costanti;**
- **Condizioni iniziali.**

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

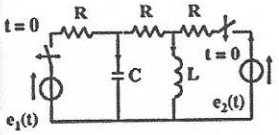
$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$\overline{E}_1 = 100\sqrt{5}\,e^{-j\,0{,}463} = 100\,(2 - j),$$

$$\overline{E}_2 = 100\sqrt{5}\,e^{\,j\,0{,}463} = 100\,(2 + j),$$

## Un esempio



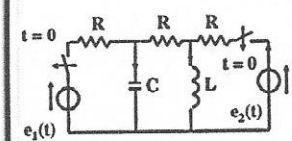

$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$\overline{V}_c = \overline{E}_1 \left[ 1 - \frac{R}{R + \dfrac{-j X_c\,(R + j X_L)}{R + j\,(X_L - X_c)}} \right]$$

## Un esempio



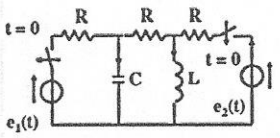

$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$\overline{I}_L = \frac{\overline{E}_1}{R + \dfrac{-j X_c\,(R + j X_L)}{R + j\,(X_L - X_c)}} \cdot \frac{-j X_c}{R + j\,(X_L - X_c)}$$

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

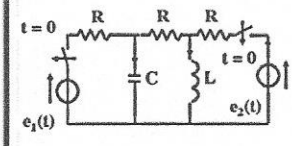
$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$\overline{V}_c = \overline{E}_1 \frac{1 - j}{2 - j} = 100\,(1 - j)\,,$$

$$\overline{I}_L = \frac{j\,\overline{E}_1}{10}\,\frac{1}{2 - j} = -\,j\,10\,.$$

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

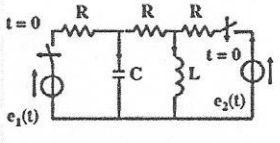
$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$v_c(t) = 200\ \text{sen}\,(100\ t - \pi/4)\,,$$

$$i_L(t) = -\,10\sqrt{2}\ \text{sen}\,(100\ t + \pi/4)\,.$$

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

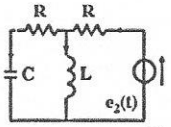
$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$v_c(0) = 200\ \text{sen}\,(-\pi/4) = -\,100\sqrt{2}\,,$$

$$i_L(0) = -\,10\sqrt{2}\ \text{sen}\,(\pi/4) = -\,10\sqrt{2}\,.$$

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$e_2 = R\,i_2 + L\,\frac{di_L}{dt}\,,$$

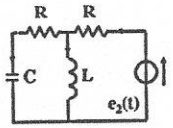
$$L\,\frac{di_L}{dt} = R\,i_c + v_c\,,$$

$$i_2 = i_L + i_c\,,$$

$$i_c = C\,\frac{dv_c}{dt}\,.$$

$$v_L = L\,\frac{di_L}{dt}\,.$$

## Un esempio



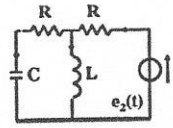

$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right)\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2}\frac{v_c}{LC} = \frac{1}{2RC}\frac{de_2}{dt}$$

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

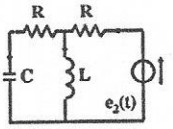
$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$\alpha^2 + 100\,\alpha + 5\ 10^3 = 0$$

$$\alpha_r + j\,\beta = -50 \pm j\,50$$

## Un esempio



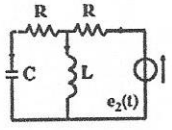

$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$v_{c0}(t) = A\ e^{-50\,t}\ \text{sen}\ (50\ t + \gamma)$$

## Un esempio



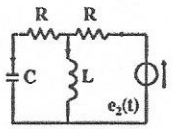

$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$\overline{V}_{cp} = \frac{\overline{E}_2}{R + \dfrac{j\,X_L\,(R - j\,X_c)}{R + j\,(X_L - X_c)}}\ \frac{j\,X_L\,(-j\,X_c)}{R + j\,(X_L - X_c)}$$

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

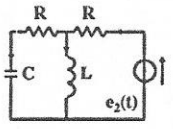
$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$\overline{V}_{cp} = \frac{\overline{E}_2}{2 + j} = 100$$

$$v_{cp}(t) = 100\sqrt{2}\ \text{sen}\ (100\ t)$$

## Un esempio



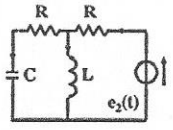

$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$v_c(t) = A\ e^{-50\,t}\,\text{sen}(50\ t + \gamma) + 10\sqrt{2}\ \text{sen}\ (100\ t).$$

## Un esempio



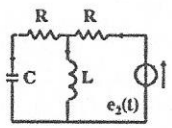

$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$v_c(0) = A\ \text{sen}\ \gamma = -\ 100\sqrt{2}$$

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

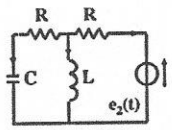
$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$e_2 = R\ i_2 + L\ \frac{di_L}{dt}, \qquad e_2 = R\ i_2 + R\ i_c + v_c$$

$$L\ \frac{di_L}{dt} = R\ i_c + v_c, \qquad e_2 = R\ i_L + 2R\ i_c + v_c$$

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

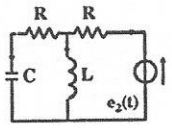
$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

$$v_c(0) = A\ \text{sen}\ \gamma = -\ 100\sqrt{2}$$

$$i_c(0) = C\ \left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = \frac{e_2(0) - v_c(0) - R\ i_L(0)}{2\ R}$$

## Un esempio




$e_1(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t - 0{,}463)$

$e_2(t) = 100\sqrt{10}\ \text{sen}\ (100\ t + 0{,}463)$

$R = 10\ \Omega;\ C = 1\ \text{mF};\ L = 100\ \text{mH}.$

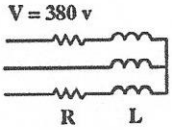
$A \approx 161\ \text{V};\qquad \gamma = 1.1\ \text{rad}$

$$v_c(t) = A\ e^{-50\,t}\,\text{sen}(50\ t + \gamma) + 10\sqrt{2}\ \text{sen}\ (100\ t).$$

## Esercizi

**Terna simmetrica e diretta**

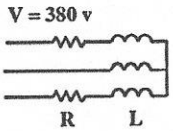





$R = 0.1\text{k}\ \Omega$
$L = 100\ \text{mH}$
$\omega = 314\ \text{rad/s}$

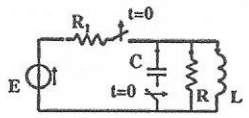
## Esercizi

$\bar{V}_{OO'} = -154 - j\ 46 \qquad \bar{E}'_1 = 374 + j\ 46 \qquad \bar{I}_1 = 3.54 + j\ 0.65$




$R = 0.1\text{k}\ \Omega$
$L = 100\ \text{mH}$
$\omega = 314\ \text{rad/s}$

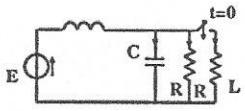
## Esercizi




$R = R_2 = 1\Omega$
$L = 4$ mH
$C = 1$ mF
$E = 2$V

**Il circuito è a regime per t<0.**

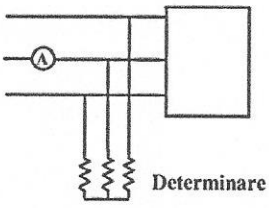
## Esercizi




$R = 2\,\Omega$
$L = 2$ mH
$C = 5$ mF
$E = 5$V

**Il circuito è a regime per t<0.**

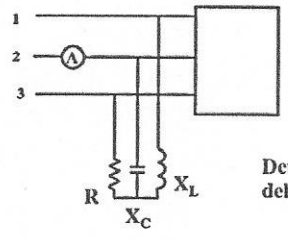
## Esercizi




$P = \sqrt{3}$ kW
$Q = 1$ kVAr
$R = 20\,\Omega$
$V = 380$ V

**Determinare l'indicazione del wattmetro**

## Esercizi




$P = 1$ kW
$Q = 1$ kVAr
$V_{23} = 300$ V
$R = X_L = X_C = 40\,\Omega$

**Determinare l'indicazione dell'Amperometro**

LEZIONE 35

# Introduzione a SPICE

Prof. Luciano De Menna
43'53"

## Codici numerici

- **Codici numerici per l'analisi dei circuiti;**
- **Reti lineari di grandi dimensioni;**
- **Componenti non lineari;**
- **Grafi complessi con componenti non lineari.**

Quando sono necessari i codici numerici

2'20"

## Codici numerici

- **SPICE ;**
- **Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis;**
- **Università della California Berkeley (1975);** 3'07"
- **Versioni anche per PC (1984).** 3'20"

## Codici numerici

- **PSpice**
- **Microsim Corporation;**
- **La fortuna di SPICE;**

7'40"

## Codici numerici

$$G = \begin{Vmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & G_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & G_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}; \quad E_0 = \begin{Vmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ E_{03} \\ \dots \end{Vmatrix}; \quad I_0 = \begin{Vmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \dots \end{Vmatrix}.$$

$$AI = -AI_0 + AGA^T E - AG E_0 = 0.$$

$$Y = AGA^T.$$

$$YE = AI_0 - AG E_0 = J_0.$$

## Condensatore ed induttore



$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad v = L\frac{di}{dt}$$

$$v(t) = v(t - \Delta t) + \frac{i(t)}{C}\Delta t \qquad i(t) = i(t - \Delta t) + \frac{v(t)}{L}\Delta t$$

$$v(t) = k_0 + k_1 i(t) \qquad i(t) = k_0 + k_1 v(t)$$

12'00"

## Codici numerici

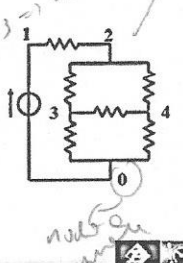
$$YE = AI_0 - AG E_0 = J_0.$$

$$Y = AGA^T.$$

12'24"

## SPICE (d.c. 1)

```
PONTE 1
*CIRCUITO RESISTIVO IN CONTINUA
R1  2  3  10
R2  2  4  2
R3  3  4  5
R4  3  0  5
R5  4  0  1
R6  1  2  2
V0  1  0  2
.END
```




File .cir, input a orCad PSpice AD Demo

| Nodo | V |
|---|---|
| (1) | 2 |
| (2) | 1.111 |
| (3) | .3704 |
| (4) | .3704 |

potenziale del nodo 1

nel ramo disposto a 0 - il modello ponte non circola corrente e pertanto i nodi 3 e 4 non si differenziano per cui il potenziale è uguale $V_3 = V_4 = 0,3704$ V

Il ponte è in equilibrio

1ª riga descrittiva

* riga di commento

Righe che descrivono il grafo del circuito e le componenti.

Rx => Resistore x

Vx => Generatore ideale di tensione

0 Ix => Generatore ideale di corrente

.END comando (.) di fine circuito.

16'00"

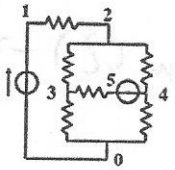
## SPICE (d.c. 2)

| | | |
|---|---|---|
| F | femto | 1E-15 |
| P | pico | 1E-12 |
| N | nano | 1E-9 |
| U | micro | 1E-6 |
| M | milli | 1E-3 |
| K | kilo | 1E+3 |
| MEG | mega | 1E+6 |
| G | giga | 1E+9 |
| T | tera | 1E+12 |

## SPICE (d.c. 3)

```
PONTE 2
*CIRCUITO RESISTIVO IN CONTINUA
R1   2   3   10
R2   2   4   2
R3   3   5   5
VA   5   4   0
R4   3   0   5
R5   4   0   1
R6   1   2   2
V0   1   0   2
.END
```

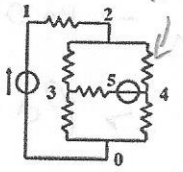
VA → Δ per amperometro




## SPICE (d.c. 4)

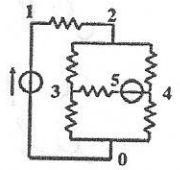
```
PONTE 3
*CIRCUITO RESISTIVO IN CONTINUA
R1   2   3   10
R2   2   4   2
R3   3   5   5
VA   5   4   0
R4   3   0   5
R5   4   0   1
R6   1   2   2
V0   1   0   2
.DC  V0  2   2   1
.PRINT   DC   V(2,3)    V(3,4)    I(R2)
.END
```

R2




## SPICE (d.c. 5)

```
PONTE 4
*CIRCUITO RESISTIVO IN CONTINUA
R1   2   3   10
R2   2   4   2
R4   3   0   5
R5   4   0   1
R6   1   2   2
V0   1   0   2
.TF  V(3,4)    V0
.END
```




Resistenza di ingresso vista dal generatore V0

Per fare a Spice anche è la corrente nel ramo 3-4 si mette un generatore di tensione nel ramo, con tensione a 0, per non disturbare la rete (è equivalente a un corto circuito).

Per fare questo è stato inserito un numero nodo, il nodo 5 ed è stato chiamato "Ponte 2" il file di circuito, ovvero Ponte2.cir

Il potenziale del nodo 5 è 0.3076 V, la corrente erogata dal generatore VA è 0 A. Questa corrente nulla indica che il ponte è in equilibrio.

---

Nel file ponte3 ci sono due linee comando:

.DC e .PRINT.

.DC V0 2 2 1 comanda Spice affinché analizzi il circuito con diverse tensioni del generatore V0, che varia dal primo numero =2 (minimo) al secondo numero (massimo) per 1 valore di questo intervallo.

Si ottiene dunque un solo valore,

| V0 | V(2,3) | V(3,4) | I(R2) |
|---|---|---|---|
| 2V | 7.407 · 1/10 V | 0V | 3.704 · $10^{-1}$ A |

.PRINT indica a SPICE di stampare le tensioni tra i nodi 2 e 3, 3 e 4 e la corrente nel resistore R2

---

In ponte4 abbiamo un nuovo comando: .TF che sta per Transfer Function, che ci permette in pratica di costruire il circuito equivalente.

V(3,4) / V0 = 0

INPUT RESISTANCE AT V0 = 4.5 kΩ

OUTPUT RESISTANCE AT V(3,4) = 2,222 kΩ

RESISTENZA VISTA DAI NODI 3 e 4, da intendersi quando la rete è stata resa passiva

Il comando TF ci permette in pratica di costruire il circuito equivalente perché attraverso il primo dato ci fornisce la resistenza del generatore ideale di tensione che sappiamo in serie nel circuito equivalente; col secondo dato ci fornisce la resistenza interna che sappiamo mettere in serie al generatore ideale di tensione, che ha nel nostro caso una resistenza nulla perché il ponte è in equilibrio.

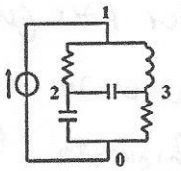
**SPICE** (a.c. 1)

```
AC 1
*PONTE IN C.A.
V0   1   0   AC  141.42
R1   1   2   5
L2   1   3   0.1
R3   3   0   10
C4   2   0   2E-3
.AC LIN 1   15.91 15.91
.PRINT  AC  Vm(2) Vp(2) Vr(2) Vi(2)
.PRINT  AC  Vm(3) Vp(3) Vr(3) Vi(3)
.END
```

100·√2 => Valore massimo → Tensione

Generatore sinusoidale

frequenza

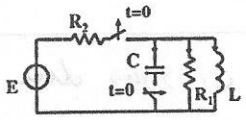



PONTE IN C.A.

.AC LIN 1 15.91 15.91 => analisi del comportamento di questo circuito per la frequenza del generatore che varia tra 15.91 e 15.91 con solo elemento 1, che corrisponde a una pulsazione ω di 100 rad/s.

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 15.91 = 99.96547$

Esercizi




$R_1 = R_2 = 1\Omega$
$L = 4\,mH$
$C = 1\,mF$
$E = 2V$

**Il circuito è a regime per t<0.**

$i_R = -2 \cdot 10^3 te^{-5wt}$

$v_R = Ar \cdot e^{-5wt} + Be^{-5wt}$ ⟹

$V_m(2)$ → Valor massimo del potenziale del nodo 2

$V_p(2)$ → Fase del potenziale nel nodo 2.

$V_m(x)$ → Valore massimo → modulo fasore

$V_p(x)$ → Fase → fasore

$V_r(x)$ → parte reale

$V_i(x)$ → parte immaginaria

$V_m$ → modulo
$V_p$ → fase
} del fasore rappresentativo del segnale al nodo 2

$V_r(2)$ → parte reale

$V_i(2)$ → parte immaginaria
} del numero complesso rappresentativo del potenziale del nodo 2.

L'output da 0 come analisi in continua perché non ci sono generatori in continua - L'analisi in continua converge ebbene

| Freq | V(2) (Vol. max fasore) | VP(2) (Fase) | VR(2) | VI(2) |
|---|---|---|---|---|
| 1.59·10 | 100 | -4.49·10⁻¹ | 7.07·10 | -7.07·10 |
| 1.59·10 | 100 | VP(3) | VR(3) | VI(3) |
| 35.4 | 1.59·10 | 100 | -4.49·10 | 7.07·10 | -7.07·10 |

→ −45°

LEZIONE 36

Prof. Luciano De Menna
42'59"

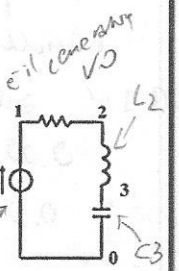
# Ancora su SPICE

(Viene usato PSpice)

descrizione del circuito

**SPICE (a.c. 2)**

```
AC 2
*CIRCUITO RLC, ANALISI ARMONICA
V0   1   0    AC  1.41     ;i due nodi, V0 è il generatore
R1   1   2    5
L2   2   3    0.01
C3   3   0    1E-6
.AC  LIN 51   1K  2K
.PLOT    AC   I(V0)
.PROBE
.END
```




AC 2 — sinusoidale

V0 generatore corrente alternata (AC) di valore massimo 1.41, ai nodi 1 e 0. Non è stato necessario riportare la frequenza perché sarà visto nel comando successivo.

R1, L2, C3 : un resistore, un induttore e un condens. in serie.

.AC LIN 51 1K 2K : comando di richiesta analisi corrente alternata lineare, con frequenze che vanno da 1 kHz a 2 kHz in un intervallo composto in 51 parti.

.PLOT AC I(V0) : comando di disegnare in uscita la corrente generata da V0 => diagramma della corrente erogata dal generatore in funzione della frequenza nell'intervallo dato.

.PROBE : comando di elaborazione di un file di uscita AC2.out più elaborato e più raffinato.

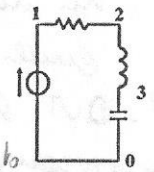
File OUT: l'analisi in continua da rimettere nella circuitazione

Nella sezione "AC ANALYSIS" vediamo la rappresentazione a caratteri dell'andamento della corrente in V0 in funzione della frequenza. C'è un massimo del modulo della corrente intorno ad una frequenza di 1580 Hz circa.

con PROBE è stato generato un file .dat che permette una visualizzazione grafica di un parametro e scelta tramite funzionalità "Add Trace"; il parametro scelto è I(V0).

**SPICE (a.c. 3)**

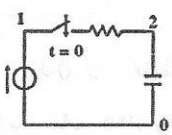
```
AC 3
*CIRCUITO RLC, ANALISI ARMONICA
V0   1   0    AC  1.41
R1   1   2    5
L2   2   3    0.01
C3   3   0    1E-6
.AC  LIN 301  1K  2K
.PLOT    AC   I(V0)
.PROBE
.END
```




→ frazionamento dell'intervallo

**SPICE (t.1)**

```
Tran 1
*CIRCUITO RC, CARICA DI C
V0   1   0        DC   10
R1   1   2        50
C3   2   0        1E-3 IC=0
.TRAN    0.001    0.5  UIC
.PLOT    TRAN     V(2)
.PROBE
.END
```

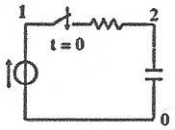



out del 11.10.1994 ore 10.52

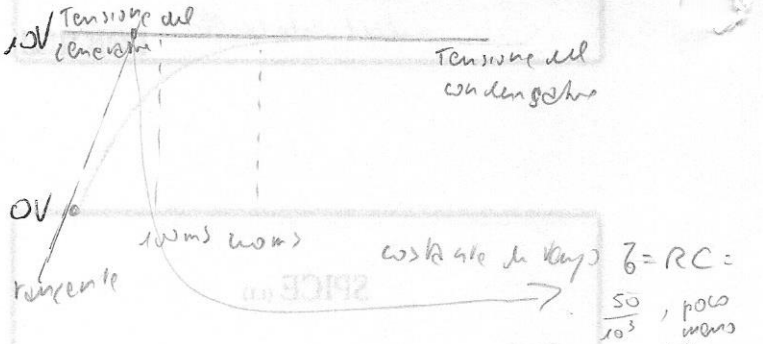
AC 3 è stato aumentato il numero di campionamenti.

## SPICE (t.2)

```
Tran 2
*CIRCUITO RC, CARICA DI C
V0   1    0     DC   10
R1   1    2     50
C3   2    0     1E-3 IC=20
.TRAN     0.001 0.5  UIC
.PROBE
.END
```



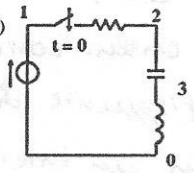

TRAN 1. Caso transitorio, la carica di un condensatore in un circuito con una resistenza R.
V0, generatore in continua da 10V
C3, condensatore da 1 mF; IC sta per condizione iniziale ed è in questo caso posta a 0 => $V_C(0) = 0V$; il condensatore è inizialmente scarico.
.TRAN, analisi dinamica in transitorio
0.001 passo in secondi in uscita, e passo, ogni millesimo di secondo
0.5 è l'estremo finale in cui si andranno il transitorio, secondo $t = 0,5$, a partire da 0.
.PLOT TRAN V(2) richiesta del transitorio della tensione V(2), cioè il potenziale del nodo 2; essendo il nodo 0 quello di riferimento (0V), V(2) rappresenta la tensione sul condensatore
.PROBE richiesta di maggiori informazioni da dare (in file .DAT) rispetto a quelle del file .OUT
Nel .OUT la tensione raggiunge gradualmente il valore 10.0 V




$\tau = RC = \frac{50}{10^3}$, poco meno della metà di 100 ms

## SPICE (t.3)

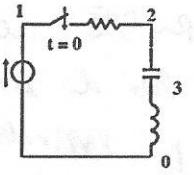
```
Tran 3
*CIRCUITO RLC, OSCILLAZIONI
V0   1    0     PWL(0 0 1e-6 10 1000e-6 10)
R1   1    2     20
L2   2    3     10M
C3   3    0     1E-6
.TRAN     1e-3  2e-3
.PROBE
.END
```




V0 1 0 PWL ( $T_1$ $V_1$ < $T_2$ $V_2$ $T_3$ $V_3$ .....>)

## SPICE (t.4)

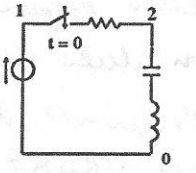
```
Tran 3.1
*CIRCUITO RLC, OSCILLAZIONI
V0   1    0     SIN(0 1 3k)
R1   1    2     20
L2   2    3     10M
C3   3    0     1E-6
.TRAN     1e-3  2e-3
.PROBE
.END
```




V0 1 0 SIN ( $V_0$ $V_A$ FREQ TD θ FASE)

## SPICE (t.5)

```
Tran 3.2
*CIRCUITO RLC, OSCILLAZIONI
V0   1    0     SIN(0 1 3k)
R1   1    2     20
L2   2    3     10M
C3   3    0     1E-6
.TRAN     1e-3  2e-3 0    1e-5
.PROBE
.END
```



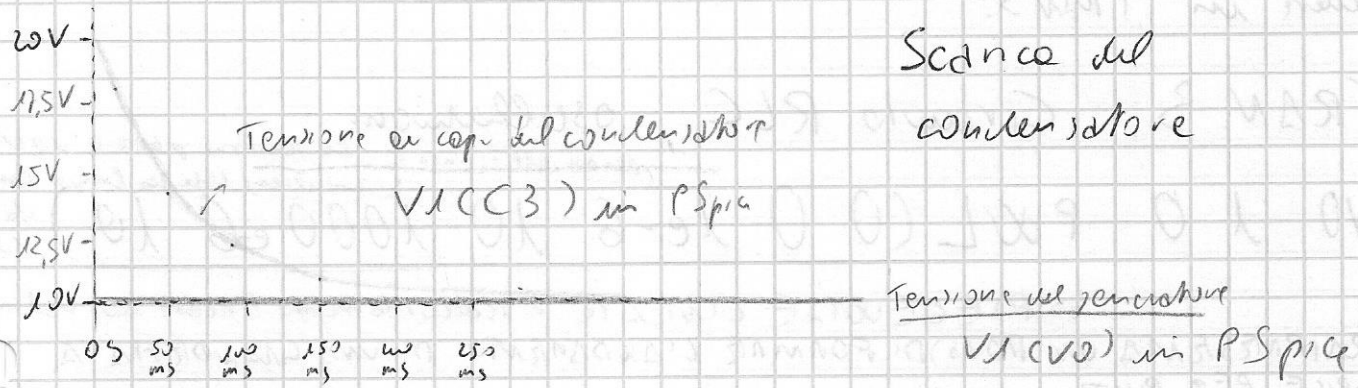

.TRAN TSTEP TSTOP <TSTART< TMAX>> <UIC>

---

TRAN 0.001 0.5 UIC - UIC impone di usare le condizioni iniziali, "Use Initial Conditions", opzionale, se non c'è la carica iniziale ($V_C(0)$ per il condensatore e $I_L(0)$ per l'induttanza non viene tenuto in conto.

TRAN 2.

Il condensatore è settato con una carica iniziale di 20 V, $V_c(0) = 20V$, ponendo nel comando IC = 20.




In Spice non c'è una informazione esplicita della presenza di un interruttore che si chiude all'istante t = 0.
La presenza dell'interruttore è implicita nell'aver assegnato al condensatore una condizione iniziale, in tran1 $V_c(0) = 0$ e in tran2 $V_c(0) = 20$.
Quello che ci occorre conoscere per poter determinare la dinamica transitoria è il valore della variabile di stato, quindi tensione sul condensatore, $V_c$ oppure corrente nell'induttore $i_L$ nell'istante da cui vogliamo partire per analizzare la dinamica del circuito.
Non servono dunque necessariamente componenti particolari necessari per rappresentare l'interruttore.
In Spice è comunque possibile rappresentare un interruttore, con una data definizione di rappresentazione, vicina a quella del componente reale.

Si può simulare un interruttore imponendo alla tensione del generatore d'ingresso di non essere costante, ma di essere nulla al di sotto di un certo valore temporale, nel nostro caso $t=0$ e di essere pari ad un certo valore costante se $t \geq 0$, come si può vedere in TRAN 3.

TRAN 3. Circuito RLC, oscillazioni

(quindi all'istante 0, la tensione passa a 10 V e si mantiene così per lungo tempo, cioè 1 s)

V0 1 0 PWL(0 0 1e-6 10 1000e-6 10)

↳ PIECEWISE LINEAR = Raccordamento lineare dei valori

RAPPRESENTA UN MODO DI FORMARE L'ANDAMENTO DI UNA GRANDEZZA A SPICE PER PUNTI.

IL COMANDO PRENDE IN INPUT COPPIE DI ARGOMENTI:

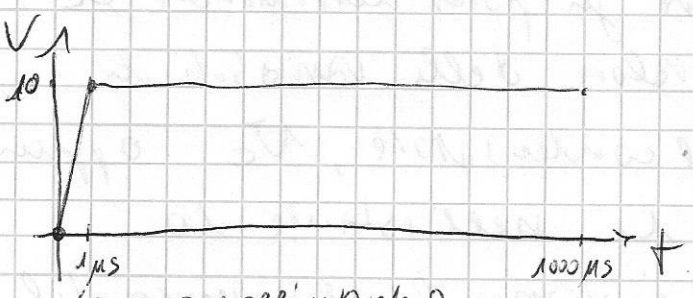
V0 1 0 PWL ($T_1$ $V_1$ $T_2$ $V_2$ $T_3$ $V_3$ ...)

nodi; $T_1$ istante, $V_1$ ↳ valore

All'istante 0 la tensione vale 0

All'istante 1 microsecondo la tensione vale 10 V

All'istante 1000 microsecondi ("dopo 1000 microsecondi" rispetto all'istante precedente, cioè all'istante 1 millisecondo) la tensione vale ancora 10 V, considerando terminata la dinamica dopo 1 ms
↳ milli, $10^{-3}$ s.




↳ errore all'istante 0,

$1\,\mu s = \frac{1}{10^6}\,s$

Questo simula perfettamente la presenza di un interruttore.

La tensione sul condensatore (V1(C3)) parte da 0 e oscillando tende al valore di 10 V.

# TRAN 3.1

V0 generatore sinusoidale

$V_0$ = $V_A$ = FREQ in Hertz ; $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$

V0 1 0 SIN (0 1 3k)  $\omega = 1000 \Rightarrow f = 159$

"offset della tensione"

con:

$V_0$ = Valore medio, ponendo 0 la sinusoide è perfetta, pura sinusoide.

$V_A$ = Ampiezza della sinusoide (non il valore efficace).

La sintassi completa è:

SIN ( $V_0$ $V_A$ FREQ TD $\theta$ FASE )

TD

$V_0$ = Valore medio

$V_A$ = Ampiezza

TD = Tempo di ritardo, cioè la tensione non comincia da zero.

$\theta$ = Smorzamento, la sinusoide è smorzata come in un transitorio

FASE = Fase iniziale della sinusoide. Non in tutte le versioni di Spice.

In prova scriviamo come vanno:

V(3), la tensione sul condensatore,

V(1), la tensione del generatore.

# TRAN 3.2

Miglioramento della curva prova, agendo sul comando .TRAN

.TRAN 1e-3 2e-3 0 1-e5

passo di elaborazione $10^{-5}$ sec = 10 μs, massimo accettabile nella elaborazione

CON SINTASSI

.TRAN TSTEP TSTOP <TSTART <TMAX>> <UIC>

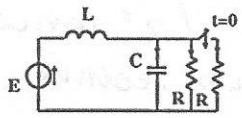
inizio analisi transitorio

passo massimo

$\text{default} = \frac{TMAX - TSTART}{50}$,

cioè $\frac{1}{50}$ dell'intervallo richiesto

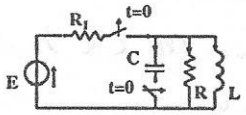
## Esercizi




$R = 2\,\Omega$
$L = 2\,mH$
$C = 5\,mF$
$E = 5V$

**Il circuito è a regime per t<0.**

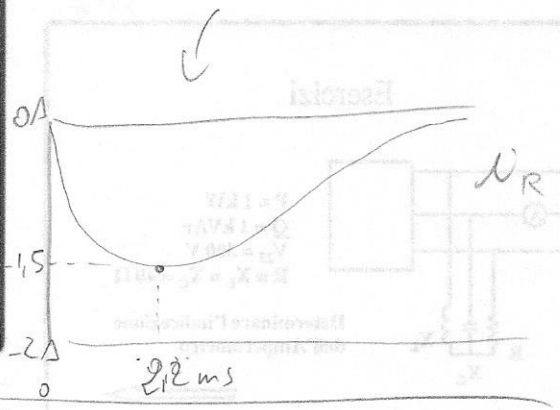
## Esercizi




$R_1 = R = 1\Omega$
$L = 4\,mH$
$C = 1\,mF$
$E = 2V$

$i_R = A\,t\,e^{-500\,t} + B\,e^{-500\,t}$ $\quad i_R(0) = 0 \quad i_L(0) = \frac{E}{R_1}$

$i_R = -2\,10^3\,t\,e^{-500\,t}$ $\quad \left.\frac{di_R}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{R}\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{-E}{RCR_1}$



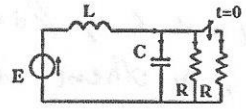

All'istante t=0 la $R_{eq}$ è $1\,\Omega$,

$R // R = 1\,\Omega$

$t<0 \quad 2{,}5\,A$

$t>0 \quad 5\,A$

## Esercizi




$R = 2\,\Omega$
$L = 2\,mH$
$C = 5\,mF$
$E = 5V$

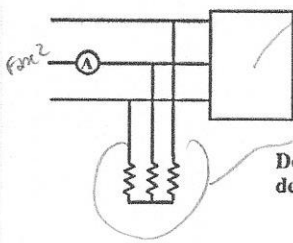
$i(t) = 5 - 2.5\,e^{-100\,t}\left[\frac{1}{3}\,sen\,(300\,t) + \cos\,(300\,t)\right]$ → Legge del transitorio della corrente da 2.5 A a 5.0 A, nell'elemento in questione.

corrente nel generatore

Sistemi in fasi entrambi equilibrati.

P = potenza attiva
Q = potenza reattiva
V = tensione concatenata

## Esercizi




$P = \sqrt{3}\,kW$
$Q = 1\,kVAr$
$R = 20\,\Omega$
$V = 380\,V$

**Determinare l'indicazione dell'amperometro**

La potenza attiva dissipata R della resistenza è facile calcolarla perché conosciamo la tensione V.

Per è facile calcolare la potenza attiva totale.

La potenza reattiva rimane 1 kVAr perché il 2° carico non assorbe potenza reattiva.

Potenza apparente totale

Valore efficace della corrente nella fase 2, come in tutte e 3 la fase è 13.7 A.

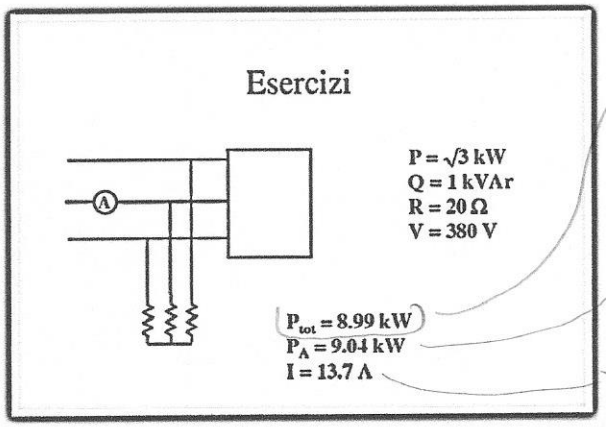
---

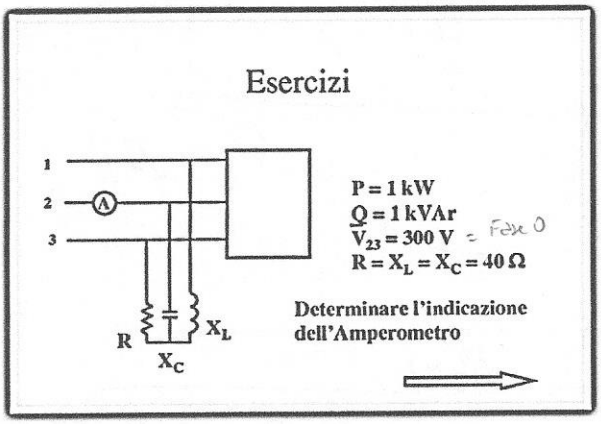
61'00"

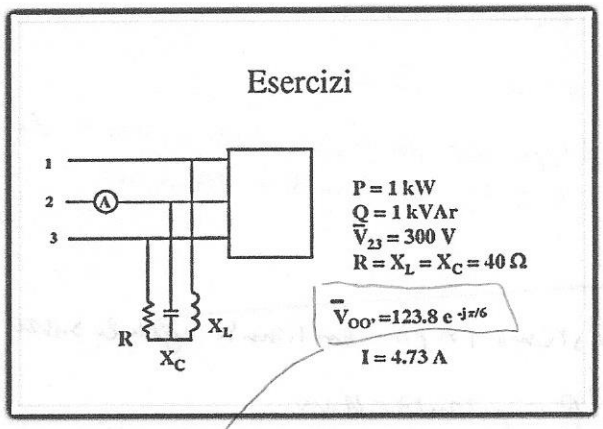
Carico squilibrato

È data la tensione tra 2 e 3 come 300 V, quindi fase 0.

Si calcola lo spostamento del centro stella del secondo carico squilibrato. Si calcolano la corrente della 2ª fase del 2° carico, del condensatore. Si somma fasorialmente la due correnti dei due carichi nella 2ª fase, e ottengo il fasore della corrente nella fase 2, prendo il valore efficace; si ottiene il risultato di 4.73 A.



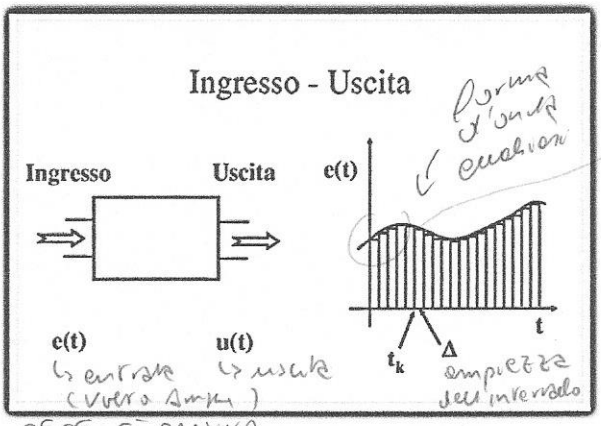

calcolo dello spostamento del centro stella

LEZIONE 37

Prof. Luciano De Menna
42'27"

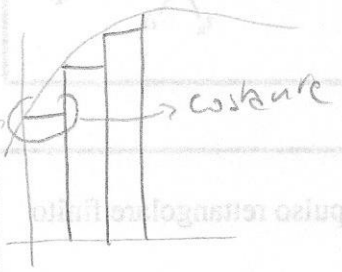
# I segnali impulsivi

(e pag. 233 del resto)



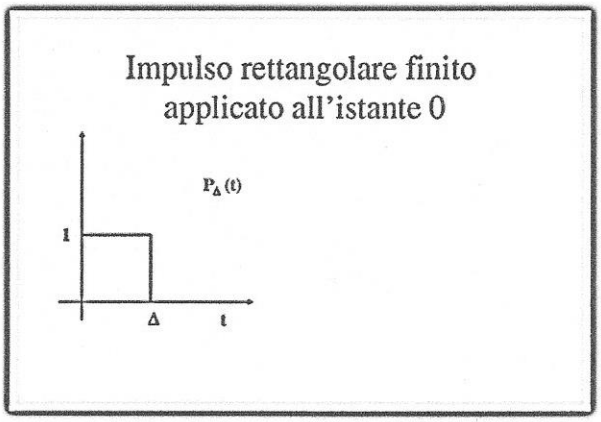

forma d'onda di ecitazione

LA RETE È PASSIVA

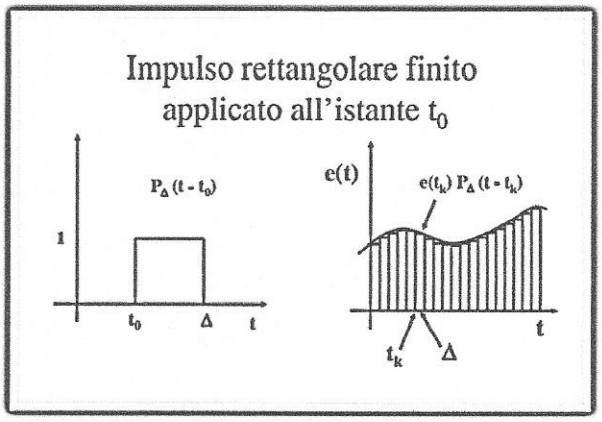



4'13"

Il problema è conoscere la u(t) prodotta dalla e(t) nella rete.
Si scompone il segnale in ingresso in una successione di segnali di tipo elementare.
La grandezza della successione di "impulsi finiti" non è la grandezza e(t), ma $\Delta \to 0$ la $f \to e(t)$.



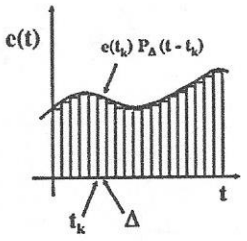

5'57"



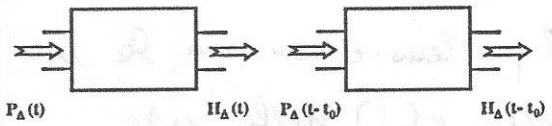
## Somma di impulsi rettangolari finiti

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{N} e(t_k)\, P_\Delta (t - t_k)$$

**Per Δ che tende a zero e*(t) tende a e(t).**




## Risposta all'impulso rettangolare finito



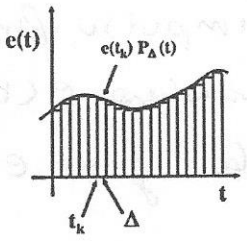

**Se la rete è passiva, tempo-invariante ed allo stato zero**

## Sovrapposizione degli effetti

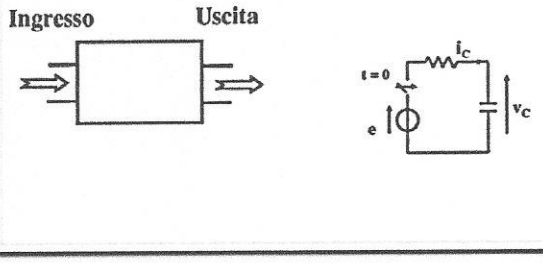
$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{N} e(t_k)\, P_\Delta (t - t_k)$$

**Se la rete è lineare, tempo-invariante, passiva ed allo stato 0**

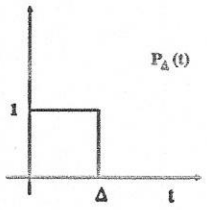
$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{N} e(t_k)\, H_\Delta (t - t_k)$$

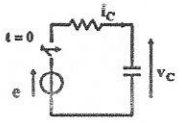



## Ingresso - Uscita

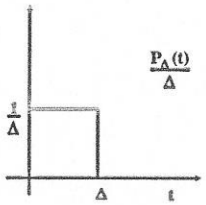


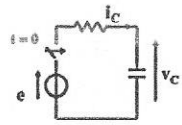
## Ingresso - Uscita




## Ingresso - Uscita



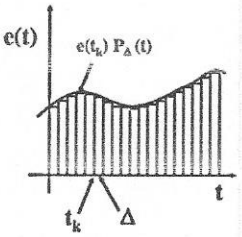




## Sovrapposizione degli effetti

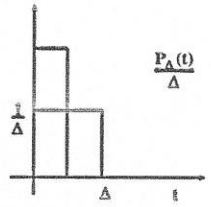
$$c^*(t) = \sum_{k=0}^{N} e(t_k) \frac{P_\Delta(t - t_k)}{\Delta} \Delta$$

**Se la rete è lineare, tempo-invariante, passiva ed allo stato 0**

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{N} e(t_k)\, h_\Delta(t - t_k) \Delta$$

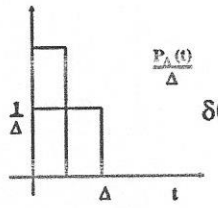



## La funzione impulsiva



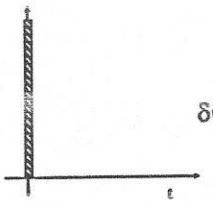

$$\int_\Delta \frac{P_\Delta}{\Delta}\, dt = 1$$

## La funzione impulsiva




$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{per } t \neq 0 \\ \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1 \quad \text{con } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

## La funzione impulsiva




$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{per } t \neq 0 \\ \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1 \quad \text{con } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

## La funzione impulsiva

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 \quad \text{per } t \neq t_0 \\ \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \quad \text{con } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

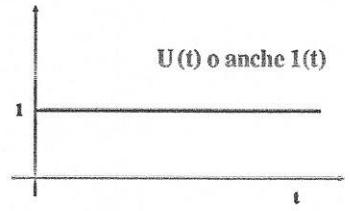
## Per Δ che tende a zero

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{N} e(t_k)\frac{P_\Delta(t-t_k)}{\Delta}\Delta \Rightarrow \int_0^T e(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

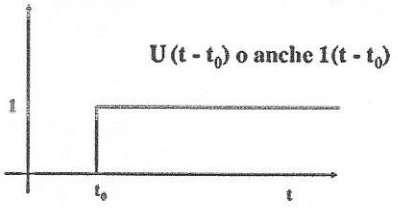
$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{N} e(t_k)\,h_\Delta(t-t_k)\Delta \Rightarrow \int_0^T e(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

**Integrale di convoluzione**

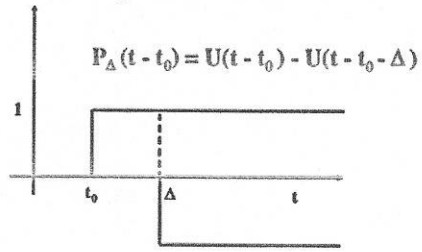
## Gradino unitario




## Gradino unitario applicato all'istante $t_0$




## Impulso rettangolare finito e gradino unitario




## Impulso e gradino unitario

$$\frac{P_\Delta (t - t_0)}{\Delta} = \frac{U(t - t_0) - U(t - t_0 - \Delta)}{\Delta}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{P_\Delta (t - t_0)}{\Delta} = \frac{dU}{dt}$$

## L'impulso è la derivata del gradino

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{P_\Delta(t - t_0)}{\Delta} = \frac{dU}{dt}$$

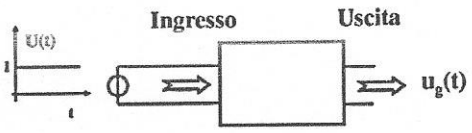
$$\delta(t) = \frac{dU}{dt}$$

## Risposta all'impulso

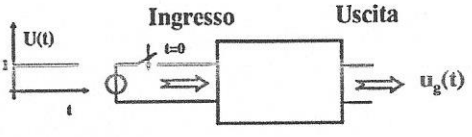
$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{P_\Delta(t - t_0)}{\Delta} = \frac{dU}{dt}$$

$$\delta(t) = \frac{dU}{dt} \qquad h(t) = \frac{du_g}{dt}$$

## Ingresso - Uscita

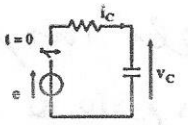



## Ingresso - Uscita



## Impulso di tensione in un RC

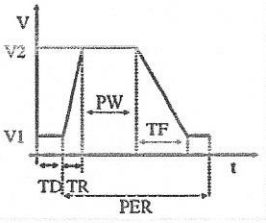
```
Pulse
*Carica impulsiva di un condensatore
V1   1    0     PULSE(0 50000 0 1e-5 1e-5 1e-5 4e-3)
R1   2    1     10
C1   2    0     1e-4
.TRAN     1e-3  4e-3  0     1e-5
.PROBE
.END
```




## Impulso di tensione in un RC

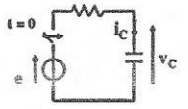
```
Pulse
*Carica impulsiva di un condensatore
V1   1    0     PULSE(0 50000 0 1e-5 1e-5 1e-5 4e-3)
R1   2    1     10
C1   2    0     1e-4
.TRAN     1e-3  4e-3  0     1e-5
.PROBE
.END
```

PULSE(V1 V2 TD TR TF PW PER)




## Impulso di tensione in un RC

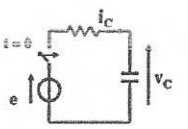
```
Pulse
*Carica impulsiva di un condensatore
V1   1    0     PULSE(0 50000 0 1e-5 1e-5 1e-5 4e-3)
R1   2    1     10
C1   2    0     1e-4
.TRAN     1e-3  4e-3  0     1e-5
.PROBE
.END
```




## Esercizi: risposta all'impulso

**Per $u(t) = v_e(t)$**

**Per $u(t) = i_e(t)$**



Riepilogo.

Rete vista come una scatola, sollecitata da un ingresso e ci interessa solo la relazione tra l'ingresso e l'uscita.

Abbiamo visto cosa succede quando l'ingresso è una successione di impulsi unitari e abbiamo capito che dovremo definire impulsi di tipo diverso dell'impulso di Dirac e abbiamo quindi scoperto che la risposta a un segnale qualsiasi attraverso l'integrale di convoluzione.

Resta da discutere il problema degli estremi di questa integrazione.

Poi abbiamo iniziato a trattare la risposta all'impulso.

LEZIONE 38

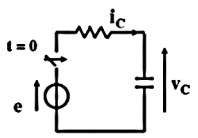
# Il bilanciamento degli impulsi

Prof. Luciano De Menna

42’17”

## Impulso di tensione in un RC

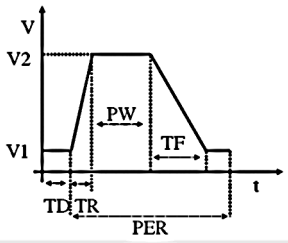
```
Pulse
*Carica impulsiva di un condensatore
V1   1    0    PULSE(0 50000 0 1e-5 1e-5 1e-5 4e-3)
R1   2    1    10
C1   2    0    1e-4
.TRAN     1e-3  4e-3  0     1e-5
.PROBE
.END
```




## Impulso di tensione in un RC

```
Pulse
*Carica impulsiva di un condensatore
V1   1    0    PULSE(0 50000 0 1e-5 1e-5 1e-5 4e-3)
R1   2    1    10
C1   2    0    1e-4
.TRAN     1e-3  4e-3  0     1e-5
.PROBE
.END
```

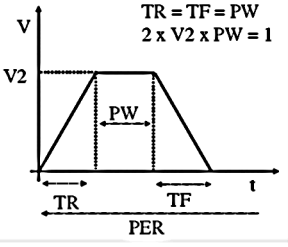
PULSE(V1 V2 TD TR TF PW PER)




## Impulso di tensione in un RC

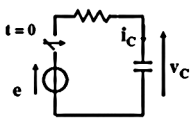
```
Pulse
*Carica impulsiva di un condensatore
V1   1    0    PULSE(0 50000 0 1e-5 1e-5 1e-5 4e-3)
R1   2    1    10
C1   2    0    1e-4
.TRAN     1e-3  4e-3  0     1e-5
.PROBE
.END
```

PULSE(V1 V2 TD TR TF PW PER)

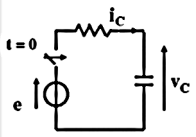


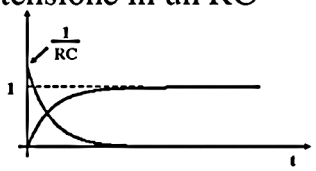
# Impulso di tensione in un RC

```
Pulse
*Carica impulsiva di un condensatore
V1    1     0     PULSE(0 50000 0 1e-5 1e-5 1e-5 4e-3)
R1    2     1     10
C1    2     0     1e-4
.TRAN     1e-3  4e-3  0     1e-5
.PROBE
.END
```




# Impulso di tensione in un RC

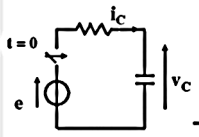


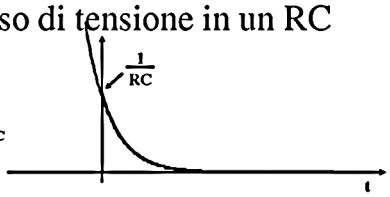




$$v_{cg} = 1 - e^{-t/RC} \qquad v_{c\delta} = \frac{dv_{cg}}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

$$i(t) = C\frac{dv_{c\delta}}{dt} = -\frac{1}{R^2C} e^{-t/RC}$$

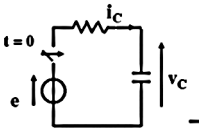
# Impulso di tensione in un RC

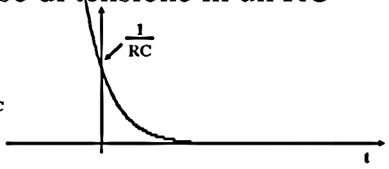



$$v_{c\delta} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

# Impulso di tensione in un RC

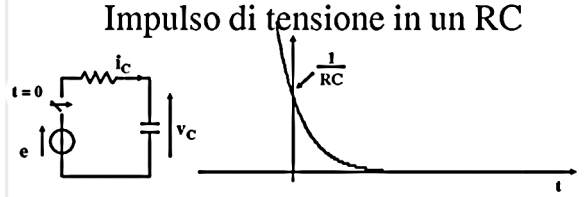



$$v_{c\delta} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \qquad v_{c\delta} = U(t)\frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

$$i(t) = C\frac{dv_{c\delta}}{dt} = -U(t)\frac{1}{R^2C} e^{-t/RC} + \delta(t)\frac{1}{R} e^{-t/RC}$$

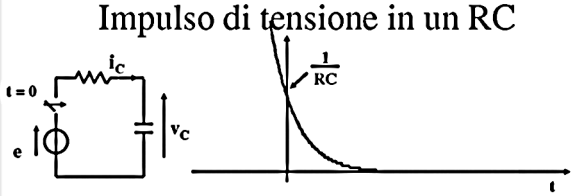
## Impulso di tensione in un RC




$$v_{c\delta} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \qquad v_{c\delta} = U(t) \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

$$i(t) = C \frac{dv_{c\delta}}{dt} = -U(t) \frac{1}{R^2C} e^{-t/RC} + \delta(t) \frac{1}{R}$$

## Impulso di tensione in un RC



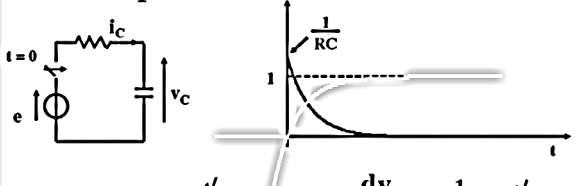

$$v_{c\delta} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \qquad v_{c\delta} = U(t) \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

$$i(t) = C \frac{dv_{c\delta}}{dt} = -\frac{1}{R^2C} e^{-t/RC} + \delta(t) \frac{1}{R}$$

## In presenza di impulsi

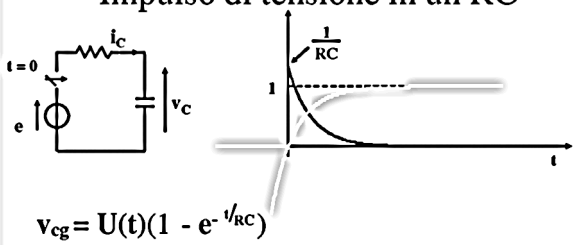
**Bisogna fare attenzione al comportamento nell'origine delle funzioni che si derivano!**

## Impulso di tensione in un RC




$$v_{cg} = 1 - e^{-t/RC} \qquad v_{c\delta} = \frac{dv_{cg}}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

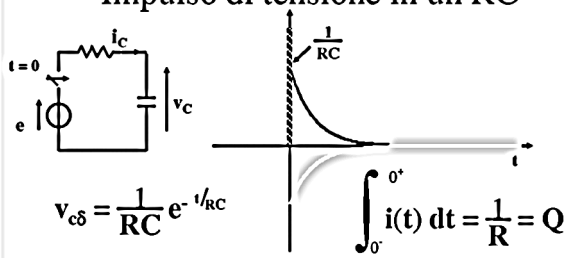
## Impulso di tensione in un RC




$$v_{cg} = U(t)(1 - e^{-t/RC})$$

$$v_{c\delta} = \frac{dv_{cg}}{dt} = U(t)\,\frac{1}{RC}\,e^{-t/RC} + \delta(t)(1 - e^{-t/RC})$$

## Impulso di tensione in un RC

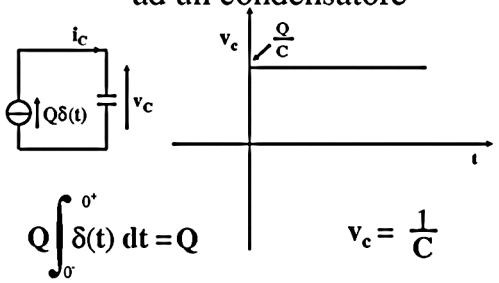



$$v_{c\delta} = \frac{1}{RC}\,e^{-t/RC}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} i(t)\,dt = \frac{1}{R} = Q$$

$$i(t) = -\frac{1}{R^2C}\,e^{-t/RC} + \delta(t)\,\frac{1}{R}$$

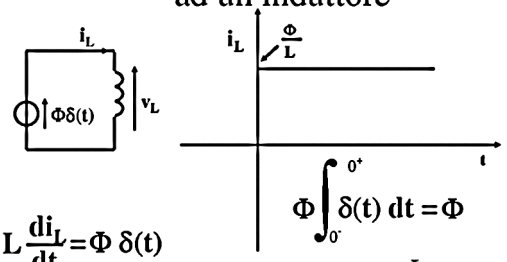
## Impulso di corrente in parallelo ad un condensatore




$$Q\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = Q$$

$$v_c = \frac{1}{C}$$

## Impulso di tensione in serie ad un induttore



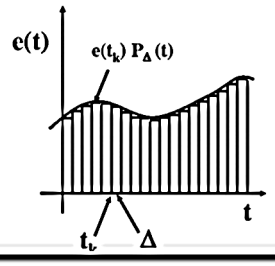

$$L\frac{di_L}{dt} = \Phi\,\delta(t)$$

$$\Phi\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = \Phi$$

$$i_L = \frac{\Phi}{L}$$

## L'estremo superiore

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{N} e(t_k) \frac{P_\Delta (t - t_k)}{\Delta} \Delta \quad \Rightarrow \quad \int_0^T e(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$




$$T = N\Delta \geq t$$

## L'estremo superiore

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{N} e(t_k)\, h_\Delta (t - t_k)\Delta \quad \Rightarrow \quad u(t) = \int_0^T e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$T \geq t$$

$$\int_0^T e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau + \int_t^T e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$h(t-\tau) = 0 \qquad \text{per } \tau > t$$

## Integrale di convoluzione

$$u(t) = \int_0^t e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$u(t) = \int_{0^-}^{t^+} e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

## Bilanciamento degli impulsi

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_0 y = \sum b_r \delta^{(r)}(t)$$

$$\delta^{(r)}(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{per } t \neq 0 \\ \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta^{(r)}(t)\, dt = \delta^{(r-1)}(t) \quad \text{con} \quad \varepsilon > 0 \end{cases}$$

## Bilanciamento degli impulsi

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots\dots + a_1 y' + a_0 y = \sum b_r \delta^{(r)}(t)$$

$$\delta^{(1)}(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{per } t \neq 0 \\ \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta^{(1)}(t)\, dt = \delta(t) \qquad \text{con} \quad \varepsilon > 0 \end{cases}$$

## Bilanciamento degli impulsi

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots\dots + a_1 y' + a_0 y = \sum b_r \delta^{(r)}(t)$$

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots\dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{\alpha_r t} + \sum k_r \delta^{(r)}(t)$$

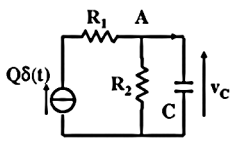
## Bilanciamento degli impulsi

$$y_0^n + a_{n-1}y_0^{n-1} + \dots\dots + a_1 y_0' + a_0 y_0 + \sum f_r(a_i)\, k_r \delta^{(r)}(t) = \sum b_r \delta^{(r)}(t)$$

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots\dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

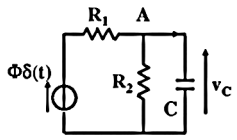
$$y_0(t) = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{\alpha_r t} + \sum k_r \delta^{(r)}(t)$$

## Qualche esempio




$$v(0^+) = v(0^-) + Q/C$$

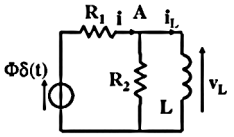
## Qualche esempio




$i(t) = \Phi\, \delta(t)/R$

$v(0^+) = v(0^-) + \Phi/RC$

## Qualche esempio

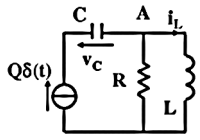



$i(t) = \Phi\, \delta(t)/(R_1 + R_2)$

$v_L(t) = R_2\Phi\, \delta(t)/(R_1 + R_2)$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) + R_2\Phi/(R_1 + R_2)L$

## Esercizi




**Detreminare le condizioni iniziali.**
**La rete è inizialmente a riposo.**

**Q = 1 C; R = 1kΩ; C = 1mF; L = 1mH.**

LEZIONE 39

# La trasformata di Laplace

Prof. Luciano De Menna
49’03”

## La trasformata di Laplace

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$F(p) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

## La trasformata di Laplace

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$p = \sigma + j\omega$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}\, dt$$

## La trasformata di Laplace

$f(t) = e^{\alpha t}$ $\qquad f(t)\, e^{-pt} = e^{(\alpha - \sigma)\, t}\, e^{-j\omega t}.$

$\sigma > \alpha$ L’integrale esiste ed è finito

$\sigma = \alpha$ L’integrale non esiste

$\sigma < \alpha$ L’integrale è illimitato

## La trasformata di Laplace

$f(t) = e^{t^2}$ $\qquad f(t)\, e^{-pt} = e^{(t-\sigma)t} e^{-j\omega t}$

**Per nessun valore finito di σ l'integrale è finito**

## La trasformata di Laplace

**Se per un valore finito di σ l'integrale esiste ed è finito, allora si dice che la f(t) è trasformabile secondo Laplace.**

## La trasformata di Laplace

**Se** $|f(t)| \leq M e^{\alpha_0 t}$

**con** $M > 0$ **e** $\alpha_0 > 0$

**Allora f(t) è trasformabile**

## Antitrasformata di Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp.$$

## Alcune trasformate

| funzione | trasformata |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $\delta^n(t)$ | $p^n$ |
| $u(t)$ | $\frac{1}{p}$ |
| $\frac{t^n}{n!}$ | $\frac{1}{p^{n+1}}$ |

## Alcune trasformate

| funzione | trasformata |
|---|---|
| $e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{p+\alpha}$ |
| $\frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}$ |

## Alcune trasformate

| funzione | trasformata |
|---|---|
| $\cos \beta t$ | $\frac{p}{p^2+\beta^2}$ |
| $\sin \beta t$ | $\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$ |

## Alcune trasformate

| funzione | trasformata |
|---|---|
| $e^{-\alpha t}\cos \beta t$ | $\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$ |
| $e^{-\alpha t}\sin t\beta$ | $\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$ |

## Alcune trasformate

| funzione | trasformata |
|---|---|
| $Ae^{-\alpha t}\cos \beta t + \frac{(B-A\alpha)}{\beta} e^{-\alpha t}\sin \beta t$ | $\frac{Ap+B}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$ |

## Proprietà delle L-trasformate

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$$

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = pF(p) - f(0_-)$$

## Proprietà delle L-trasformate

$\Sigma_r (\pm)\, i_r(t) = 0$ per ogni nodo

$\Sigma_r (\pm)\, v_r(t) = 0$ per ogni maglia.

$\Sigma_r (\pm)\, I_r(p) = 0$ per ogni nodo

$\Sigma_r (\pm)\, V_r(p) = 0$ per ogni maglia

## Proprietà delle L-trasformate

$v(t) = R\, i(t) \Rightarrow V(p) = R\, I(p)$

$v(t) = L \frac{di}{dt} \Rightarrow V(p) = p\, L\, I(p) - L\, i(0_-)$

$i(t) = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow I(p) = p\, C\, V(p) - C\, v(0_-)$

## La trasformata di Laplace

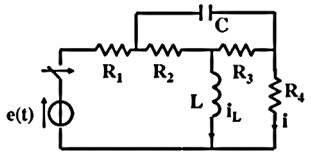
$$\frac{V(p)}{I(p)} = R$$

$$\frac{V(p)}{I(p)} = p\,L$$

$$\frac{V(p)}{I(p)} = \frac{1}{p\,C}$$

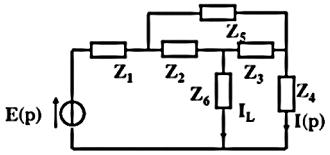
$$\frac{V(p)}{I(p)} = Z(p)$$

## Un esempio



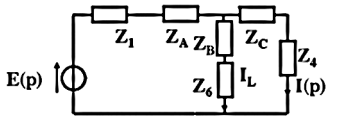

**$R_1 = R_4 = 5\ \Omega$;**
**$R_2 = R_3 = 0.5\ \Omega$;**
**$L = 1$ H;**
**$C = 0.5$ F;**
**$e(t) = 10\ \mathrm{sen}(4t)$.**

## Un esempio




**$Z_1 = Z_4 = 5$;**
**$Z_2 = Z_3 = 0.5$;**
**$Z_6 = p$;**
**$Z_5 = 2/p$;**
**$E(p) = 40/(p^2+16)$**

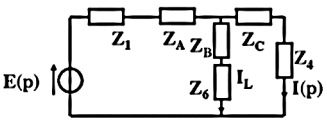
## Un esempio




**$Z_1 = Z_4 = 5$;**
**$Z_2 = Z_3 = 0.5$;**
**$Z_6 = p$;**
**$Z_5 = 2/p$;**
**$E(p) = 40/(p^2+16)$**

$$Z_A = \frac{1}{p+2} \qquad Z_B = \frac{0{,}25\,p}{p+2} \qquad Z_c = \frac{1}{p+2}$$

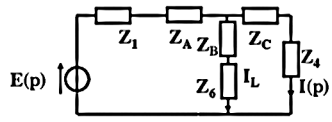
## Un esempio




$Z_1 = Z_4 = 5;$
$Z_2 = Z_3 = 0.5;$
$Z_6 = p;$
$Z_5 = 2/p;$
$E(p) = 40/(p^2+16)$

$$I(p) = \frac{Z_B + p}{Z_B + Z_C + 5 + p} \; \frac{E(p)}{5 + Z_A + \frac{(Z_B + p)(Z_C + 5)}{Z_B + p + Z_C + 5}}$$

## Un esempio




$Z_1 = Z_4 = 5;$
$Z_2 = Z_3 = 0.5;$
$Z_6 = p;$
$Z_5 = 2/p;$
$E(p) = 40/(p^2+16)$

$$I(p) = \frac{40}{p^2 + 16} \; \frac{p^2 + 2{,}25p}{5p + 11} \; \frac{p + 2}{2p^2 + 9{,}5p + 11}$$

## Un esempio

$p = -2$
$p = -11/4$

$$2p^2 + 9{,}5p + 11 = 2(p + 2)\left(p + \frac{11}{4}\right)$$

$$I(p) = \frac{40}{p^2 + 16} \; \frac{p^2 + 2{,}25p}{5p + 11} \; \frac{p + 2}{2p^2 + 9{,}5p + 11}$$

## Un esempio

$p = -2$
$p = -11/4$

$$2p^2 + 9{,}5p + 11 = 2(p + 2)\left(p + \frac{11}{4}\right)$$

$$I(p) = \frac{4}{p^2 + 16} \; \frac{p + 2{,}25}{p + \frac{11}{5}} \; \frac{1}{p + \frac{11}{4}}$$

## Un esempio

$p = -2$
$p = -11/4$

$$2\,p^2 + 9{,}5\,p + 11 = 2\,(p+2)\left(p+\frac{11}{4}\right)$$

$$I(p) = \frac{A\,p+B}{p^2+16} + \frac{C}{p+\frac{11}{5}} + \frac{D}{p+\frac{11}{4}}$$

## Un esempio

$$e^{-\alpha t} \Longrightarrow \frac{1}{p+\alpha}$$

$$\cos \beta t \Longrightarrow \frac{p}{p^2+\beta^2}$$

$$\sin \beta t \Longrightarrow \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$$

$$I(p) = \frac{A\,p+B}{p^2+16} + \frac{C}{p+\frac{11}{5}} + \frac{D}{p+\frac{11}{4}}$$

## Un esempio

$$e^{-\alpha t} \Longrightarrow \frac{1}{p+\alpha}$$

$$\cos \beta t \Longrightarrow \frac{p}{p^2+\beta^2}$$

$$\sin \beta t \Longrightarrow \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_1(p) + I_2(p)\} = A\cos 4t + \frac{B}{4}\sin 4t +$$

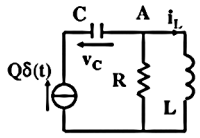
$$+ C e^{-(11/5)t} + (D-1)\, e^{-(11/4)t}$$

## La funzione di trasferimento

$$u(t) = \int_{0^-}^{t^+} e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$U(p) = E(p)\, H(p)$$

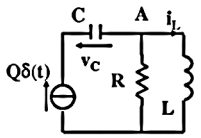
## Esercizi




**Detreminare le condizioni iniziali.**
**La rete è inizialmente a riposo.**

**Q = 1 C; R = 1kΩ; C = 1mF; L = 1mH.**

## Esercizi




$v_C(0) = Q/C;$

$i_L(0) = RQ/L;$

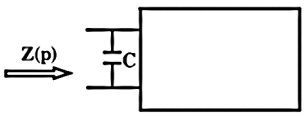
**Q = 1 C; R = 1kΩ; C = 1mF; L = 1mH.**

LEZIONE 39

# Ancora sulla trasformata di Laplace

Prof. Luciano De Menna
42’38”

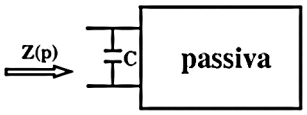
## Un metodo ibrido




$$Z(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \qquad D(p) = 0$$

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{\alpha_r t}$$

## Un metodo ibrido




$$Z(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \qquad D(p) = 0$$

**Le radici del denominatore sono le radici dell’equazione caratteristica e quindi forniscono le costanti di tempo del circuito.**

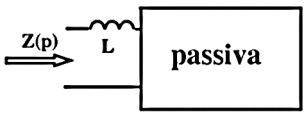
## Un metodo ibrido



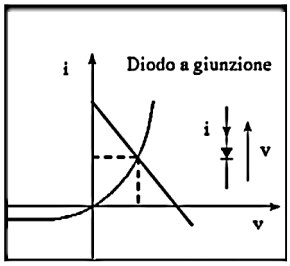

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{\alpha_r t} + y_p(t)$$

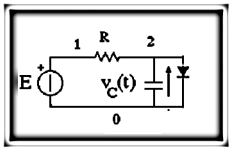
**Dalle condizioni iniziali si ricavano le costanti $A_r$**

## Un metodo ibrido




## Circuiti con bipoli non lineari

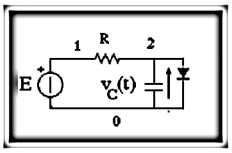



## La dinamica dipende dalle c.i.

**Diodo 1**

```
.model Dmod     D(Is=100u  N=1  Xti=3 Eg=1.11    FC=.5       Nr=2)
R1    1     2   1
C1    2     0   1mF  IC=0
D1    2     0   DMOD
Vdd   1     0   1
.DC   Vdd   1   1     1
.PRINT DC       V(2)
.PROBE
.TRAN 1usec     0.4msec     0       0.004m      UIC
.END
```

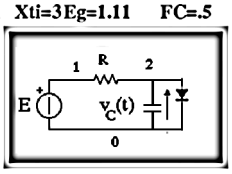



V(2) = 2.314E-01

## La dinamica dipende dalle c.i.

**Diodo 2**

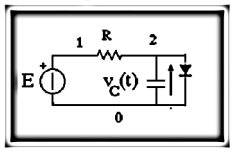
```
.model Dmod     D(Is=100u  N=1  Xti=3 Eg=1.11    FC=.5       Nr=2)
R1    1     2   1
C1    2     0   1mF  IC=0.5
D1    2     0   DMOD
Vdd   1     0   1
.DC   Vdd   1   1     1
.PRINT DC       V(2)
.PROBE
.TRAN 1usec     0.4msec     0       0.004m      UIC
.END
```



# La dinamica dipende dalle c.i.

**Diodo 3**

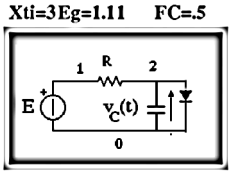
```
.model Dmod     D(Is=100u  N=1  Xti=3Eg=1.11    FC=.5       Nr=2)
R1    1     2     1
C1    2     0     1mF  IC=-0.5
D1    2     0     DMOD
Vdd   1     0     1
.DC   Vdd   1     1      1
.PRINT DC       V(2)
.PROBE
.TRAN 1usec     1msec      0      0.01m       UIC
.END
```



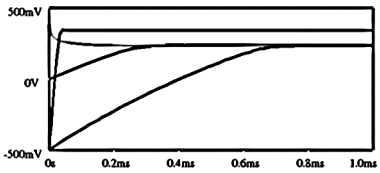

# La dinamica dipende anche da E

**Diodo 4**

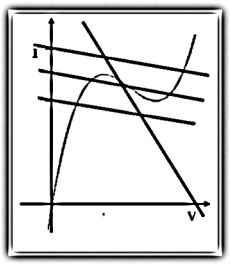
```
.model Dmod     D(Is=100u  N=1  Xti=3Eg=1.11    FC=.5       Nr=2)
R1    1     2     1
C1    2     0     1mF  IC=0
D1    2     0     DMOD
Vdd   1     0     10
.DC   Vdd   1     1      1
.PRINT DC       V(2)
.PROBE
.TRAN 1usec     1msec      0      0.01m       UIC
.END
```



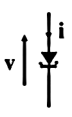

# Confronto dei risultati

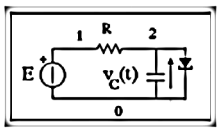



# Caratteristica non monotona

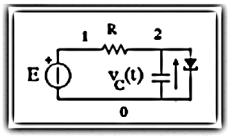



**Diodo Tunnel**



## Le tre soluzioni



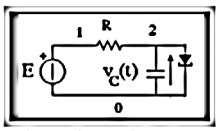

Diodo Tun 1

```
R1   1    2    6
C1   2    0    100mF     IC=0
G1   2    0    POLY(1)   2    0    0    6    -4.5   1
Vdd  1    0    12
.PROBE
.TRAN 1usec    1sec  UIC
.END
```




$$i_D = 6v_2 - 4.5\,v_2^2 + v_2^3$$

## Le tre soluzioni

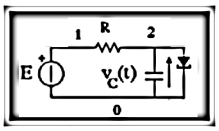



Diodo Tun 2

```
R1   1    2    6
C1   2    0    100mF     IC=0
G1   2    0    POLY(1)   2    0    0    6    -4.5   1
Vdd  1    0    18
.PROBE
.TRAN 1usec    1sec  UIC
.END
```




## Le tre soluzioni

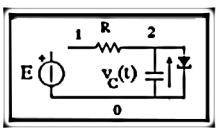



Diodo Tun 3

```
R1   1    2    0.7
C1   2    0    100mF     IC=0
G1   2    0    POLY(1)   2    0    0    6    -4.5   1
Vdd  1    0    3
.PROBE
.TRAN 1usec    1sec  UIC
.END
```




## La condizione iniziale

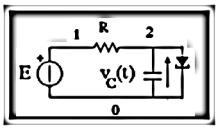



Diodo Tun 4

```
R1   1    2    6
C1   2    0    100mF     IC=1.4V
G1   2    0    POLY(1)   2    0    0    6    -4.5   1
Vdd  1    0    15
.PROBE
.TRAN 1usec    1sec  UIC
.END
```



# Una diversa condizione iniziale

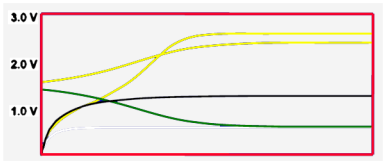



Diodo Tun 5

```
R1   1    2    6
C1   2    0    100mF     IC=1.6V
G1   2    0    POLY(1)   2    0    0    6    -4.5  1
Vdd  1    0    15
.PROBE
.TRAN 1usec    1sec  UIC
.END
```




# Confronto dei risultati



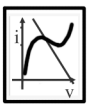








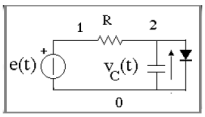





# Con generatore sinusoidale

Diodo 5

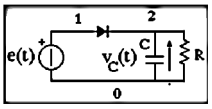
```
.model Dmod    D(Is=100u  N=1  Xti=3 Eg=1.11    FC=.5      Nr=2)
R1   1    2    1
C1   2    0    1mF  IC=0
D1   2    0    DMOD
Vsin 1    0    SIN(010V   1kHz)
.PROBE
.TRAN 1usec    5msec      0      0.025m
.END
```



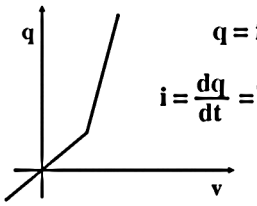

# Raddrizzatore

Diodo 6

```
.model Dmod    D(Is=100u  N=1  Xti=3 Eg=1.11    FC=.5      Nr=2)
D1   1    2    DMOD
C1   2    0    10mF IC=0
R1   2    0    1
Vsin 1    0    SIN(010V   1kHz)
.PROBE
.TRAN 1usec    5msec      0      0.025m
.END
```

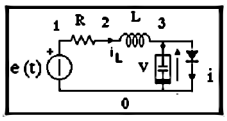


## Circuito con condensatore non lineare




$$q = f(v)$$

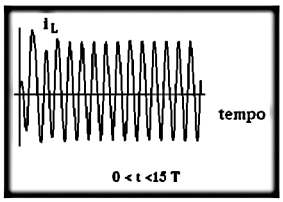
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{df(v)}{dt}$$

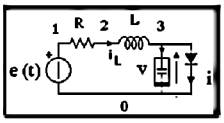



**e(t) di periodo T**

**Condensatore non lineare**

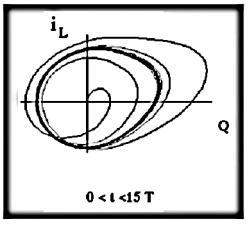
## Circuito con condensatore non lineare

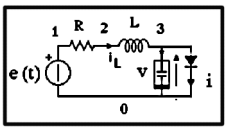



**E = 0.8 V**

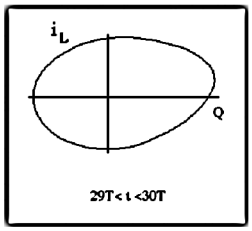
## Circuito con condensatore non lineare

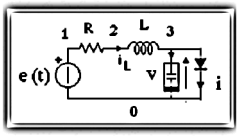



**E = 0.8 V**

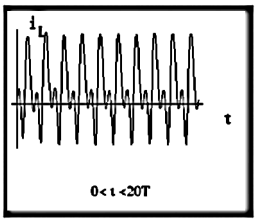
## Circuito con condensatore non lineare

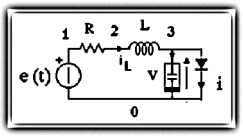



**E = 0.8 V**

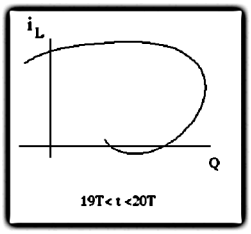
## Circuito con condensatore non lineare

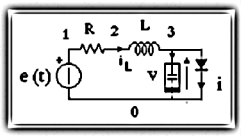



**E = 1.8 V**

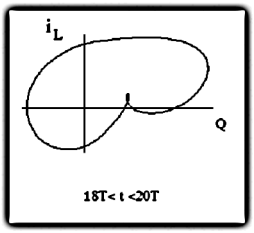
## Circuito con condensatore non lineare

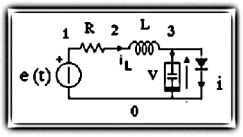



**E = 1.8 V**

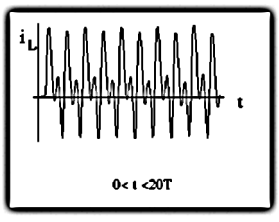
## Circuito con condensatore non lineare

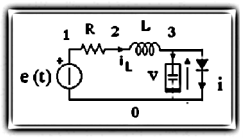



**E = 1.8 V**

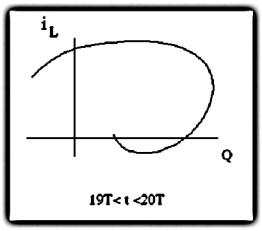
## Circuito con condensatore non lineare

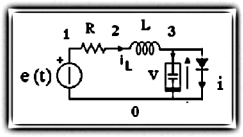



**E = 2.2 V**

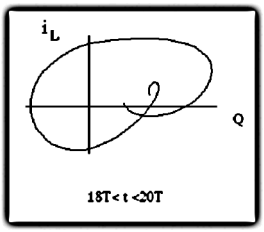
## Circuito con condensatore non lineare

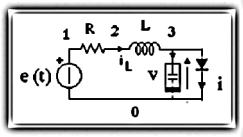



**E = 2.2 V**

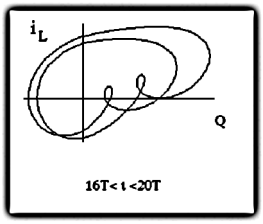
## Circuito con condensatore non lineare

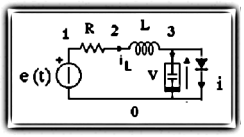



**E = 2.2 V**

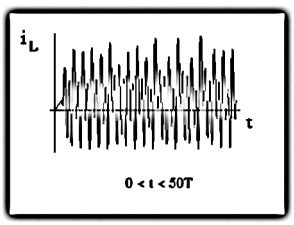
## Circuito con condensatore non lineare

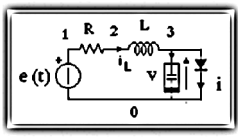



**E = 2.2 V**

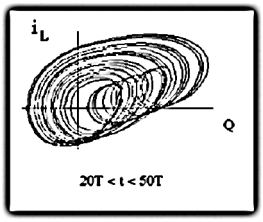
## Circuito con condensatore non lineare

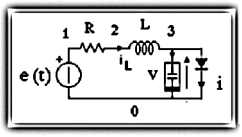



**E = 4 V**

## Circuito con condensatore non lineare




**E = 4 V**

**Comportamenti caotici**