ELETTROTECNICA

Aule Virtuali Svolte

ELETTROTECNICA - AULE VIRTUALI

4.1 - Aula Virtuale Elettrotecnica: resistori in serie ed in parallelo, partitori di tensione e di corrente. (A.A. 2010/2011) ✓

8.1 - Aula Virtuale Elettrotecnica: metodo dei potenziali nodali, metodo delle correnti di maglia (A.A. 2010/2011) ✓

9.1 - Aula Virtuale Elettrotecnica: Soluzione di un circuito in regime stazionario (A.A. 2010/2011) (con 4 metodi) LK, sovrapposiz., potenziali, correnti ✓

10.1 - Aula Virtuale: Teoremi di Thevenin e Norton in regime stazionario (A.A. 2010/2011) ✓

20.1 - Aula Virtuale: : Soluzione della prova del 13/01/2012 - transitori (A.A. 2011/2012) ✓

21.1 - Aula Virtuale: circuiti del secondo ordine in evoluzione dinamica (A.A. 2012/2013) ✓

21.2 - Aula Virtuale: circuiti del secondo ordine in evoluzione dinamica - parte II (A.A. 2012/2013) ✓

22.1 - Aula Virtuale: esercizi con generatori sinusoidali (A.A. 2012/2013) ✓

23.1 - Aula Virtuale: Circuiti in evoluzione dinamica (A.A. 2011/2012) ✓

26.1 - Aula Virtuale sui generatori non isofrequenziali (A.A. 2013/2014) ✓

27.1 - Aula Virtuale: La risonanza nelle reti in regime sinusoidale (A.A. 2012/2013) ✓

28.1 - Aula virtuale sulla potenza in regime sinusoidale (A.A. 2012/2013) ✓

34.1 - Aula Virtuale: Transitori con forzamento sinusoidale (A.A. 2014/2015) ✓

41.1 - Aula Virtuale: Soluzione prova 30/11/2011 (A.A. 2011/2012) Rete in evoluzione dinamica e rete in regime sinusoidale ✓

41.2 - Aula Virtuale: Soluzione della prova del 14/12/2011 (A.A. 2011/2012) Rete in evoluzione dinamica e rete in regime sinusoidale ✓

41.3 - Aula_Virtuale_Elettrotecnica_06122013 (A.A. 2013/2014) Transitorio con due commutazioni ✓

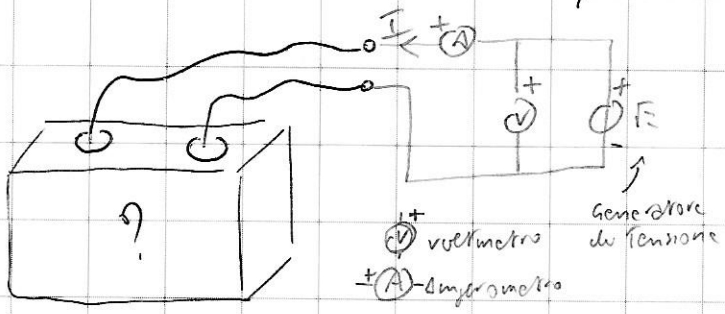
42.1 - Aula_Virtuale_Elettrotecnica_09102014 (A.A. 2014/2015) Presentazione del corso di elettrotecnica e del corso di elettronica e misure elettroniche ✓

42.2 - Aula_Virtuale_Elettrotecnica_12112014 (A.A. 2014/2015) Presentazione ✓

Aula Virtuale 04.1
47'05 Prof Dario Assante

- RESISTORI IN SERIE e IN PARALLELO
- PARTITORI DI CORRENTE

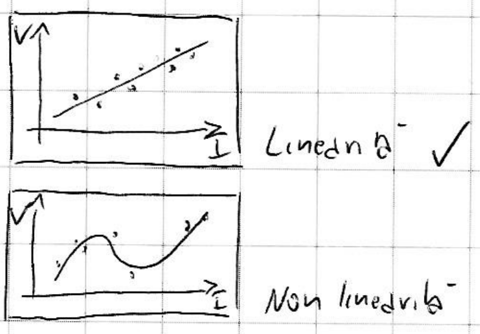
Il Concetto di Equivalenza (Importante per la trattazione dei Teoremi di Thevenin e Norton)



Per capire il circuito di cui vediamo solo i morsetti, eroghiamo delle tensioni attraverso il generatore di tensione e misuriamo la corrente nel circuito.

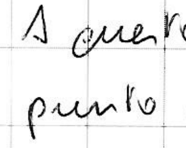
Facendo diverse misurazioni otteremo una tabella delle correnti in funzione delle tensioni erogate.

V	I
1	a
2	b
3	c
4	d



Ponendo i valori su un grafico VI vedremo come l'andamento sia approssimativamente lineare o non lo sia.

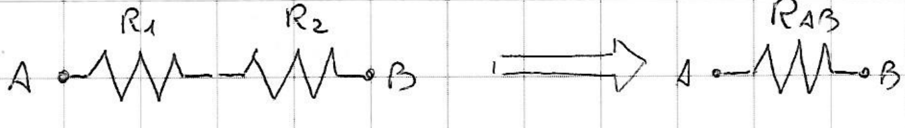
Il corso attuale studia circuiti lineari, circuiti il cui comportamento è lineare, come nel nostro esempio.
Se la retta passa per gli assi possiamo definire un parametro equivalente, la resistenza, come rapporto tra la tensione e la corrente: $R = \frac{V}{I}$, resistenza equivalente.
A questo punto potremmo dire che l'oggetto considerato, dal punto di vista elettrico equivale ad una resistenza di tot Ohm, calcolata, pur non sapendo come tale circuito sia costruito.



Sia chiaro che nella scatoletta ci può essere, ad esempio, una resistenza da 3 Ω, così come ci potrebbero essere due resistenze in serie, una da 1 Ω e una da 2 Ω. Dalle misurazioni non riusciremo mai a poterlo capire, ma questo è ininfluente in quanto ogni configurazione interna che porta ad una stessa resistenza è equivalente.

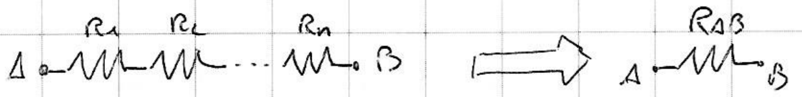
Questo ci porta al concetto di equivalenza: ai terminali abbiamo lo stesso comportamento; applicando diverse tensioni ottengo sempre correnti proporzionali alla resistenza equivalente dell'oggetto.

RESISTORI IN SERIE



$$R_{AB} = R_1 + R_2$$

PER ESTENSIONE, n RESISTENZE IN SERIE EQUIVALGONO AD UNA RESISTENZA CHE SIA LA LORO SOMMA

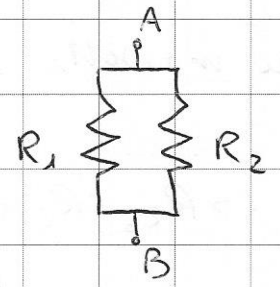


$$R_{AB} = \sum_{n=1}^{n} R_n$$

Due resistori sono in serie se sono collegati da un solo terminale, oppure si può dire che due resistori sono in serie se sono attraversati dalla stessa corrente.

RESISTORI IN PARALLELO

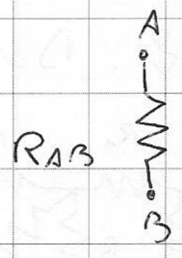
Due resistori si dicono in parallelo se hanno in comune due morsetti.
Ovvero se ai loro capi sussiste la stessa differenza di potenziale.

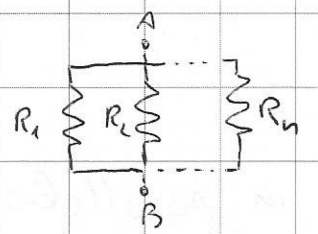


$$R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

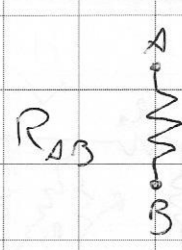
$$G_{AB} = G_1 + G_2$$

conduttanza $\Rightarrow G = \frac{1}{R}$

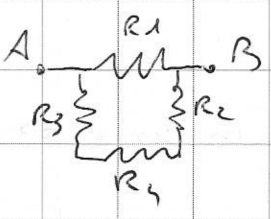




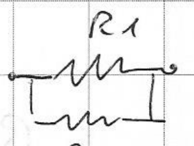
$$G_{AB} = \sum_{i=1}^{n} G_i$$



Esercizio (1)

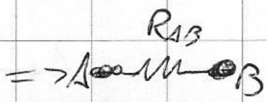


$\Rightarrow$



$R_{234} = R_2 + R_3 + R_4$

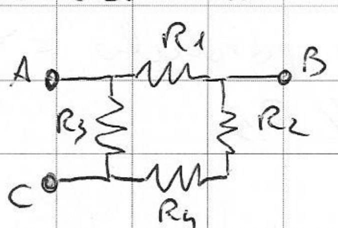
$\Rightarrow$



$$R_{AB} = R_1 \,//\, R_{234} = \frac{R_1 (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 + (R_2 + R_3 + R_4)}$$

Attenzione ai morsetti:

(2)

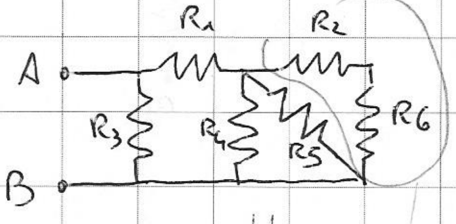


$$R_{AC} = R_3 \,//\, (R_1 + R_2 + R_4)$$

Due resistori, nello stesso circuito, possono essere in serie, o in parallelo, a seconda da quali punti essi sono visti.
La resistenza equivalente tra A e B di (2) è data dalla serie di R_2, R_3 e R_4 che è in parallelo a R_1.
Ma la resistenza equivalente tra A e C di (2), è un valore diverso, perché R_2, R_3 e R_4 non sono più in serie!

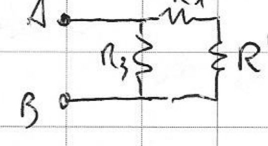
Sono in serie R_1, R_2 e R_4 e questa serie è in parallelo con R_3.
Quindi lo stesso circuito, a seconda di quali sono i morsetti dove calcolare la resistenza equivalente, dà un risultato diverso.

Esercizio 2: Determinare la R_{eq} vista ai morsetti A-B.

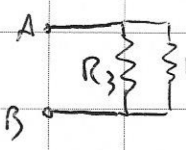


R_2 e R_6 in serie $\Rightarrow R_{26} = R_2 + R_6$

R_4, R_5 e R_{26} in parallelo $\Rightarrow$
$R' = R_4 \,//\, R_5 \,//\, R_{26} \Rightarrow \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$



R_1 e R' in serie $\Rightarrow R'' = R_1 + R'$

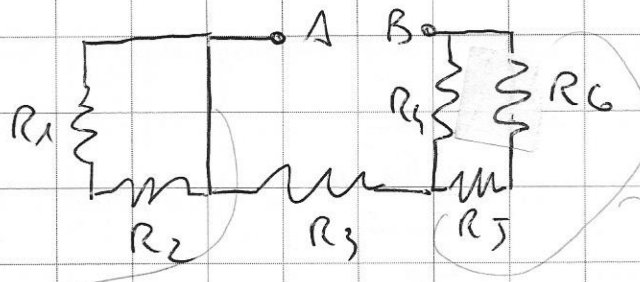


R'' e R_3 in parallelo $\Rightarrow$
$R_{AB} = R'' \,//\, R_3$

Quindi $R_{AB} = R'' \,//\, R_3$

Esercizio 3: determinare la Req vista ai morsetti A e B.

[Sol.: $R_{AB} = R_3 + R_4 // (R_5 + R_6)$]



in serie

$$R_{AB} = R_3 + R_4 // (R_5 + R_6)$$

ok fino qui.

questo è un cortocircuito, resistenza 0.

R_1 e R_2 sono in serie, ma la loro serie è in parallelo con un cortocircuito: qualunque resistore in parallelo con un cortocircuito rende un cortocircuito.

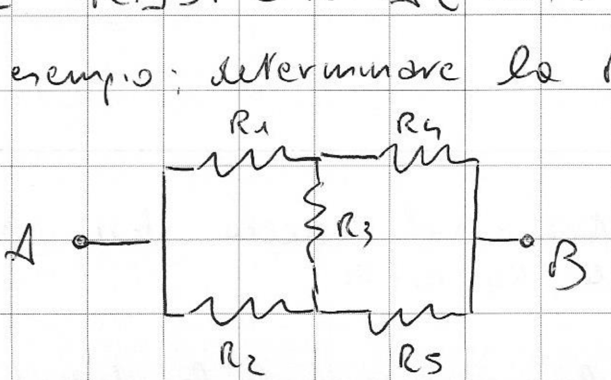
Il cortocircuito è una resistenza nulla $\Rightarrow R_{eq} = \frac{R \cdot 0}{R + 0} = 0$

$R //$ cortocircuito = cortocircuito.

Se una corrente si deve ripartire tra un resistore e un cortocircuito allora essa va tutta nel cortocircuito perché incontra un percorso a corrente nulla. Quindi un resistore in parallelo ad un cortocircuito è come se il resistore non ci fosse.

LE TRASFORMAZIONI TRIANGOLO - STELLA

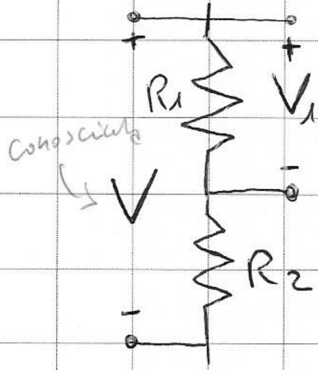
Un esempio: determinare la Req vista ai morsetti A e B:



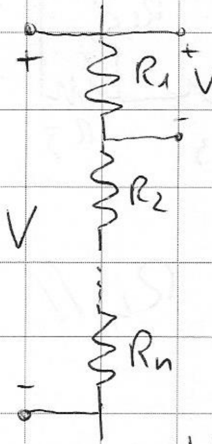
Questa configurazione non è né in serie, né in parallelo.

AV. 4.1.5

I PARTITORI DI TENSIONE



la tensione ai capi di R1 è $V_1 = R_1 i_1$ con i_1 la corrente che attraversa R_1

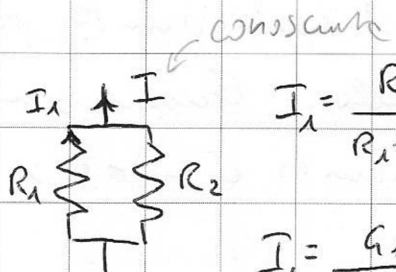


$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V$$

$$V_1 = \frac{R_1}{\sum_{i=1}^{n} R_i} V$$

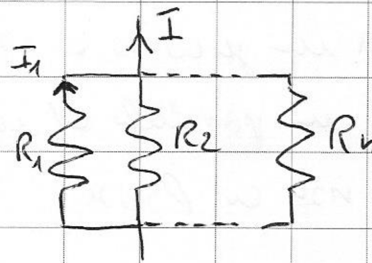
Dati due resistori in serie, se è conosciuta la tensione ai capi della serie, la formula del partitore di tensione permette il calcolo della tensione ai capi di un singolo resistore.

I PARTITORI DI CORRENTE



$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I$$



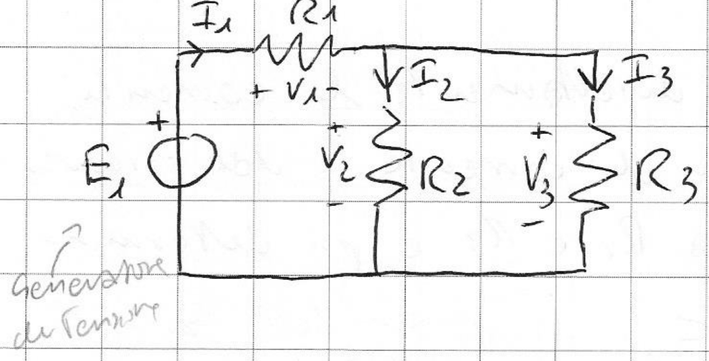
$$I_1 = \frac{G_1}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

Si applica a resistori in parallelo.

- Resistori in serie se attraversati dalla stessa corrente, collegati da un solo terminale; $R_{eq} = R_1 + R_2$
- Resistori in parallelo se ai loro capi sussiste la stessa differenza di potenziale, ovvero se hanno in comune due morsetti. $R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Esercizio 1

· Determinare tutte le tensioni e intensità di corrente



Si ricorda che per la legge di Ohm vale $V = R \cdot i$, con $R = \rho \cdot \frac{l}{\rho}$, ρ è la resistività, l è la lunghezza del resistore.

Conoscendo certi valori, con la legge di Ohm è calcolabile una grandezza: se conosco le correnti, moltiplico per le resistenze e ottengo le tensioni.

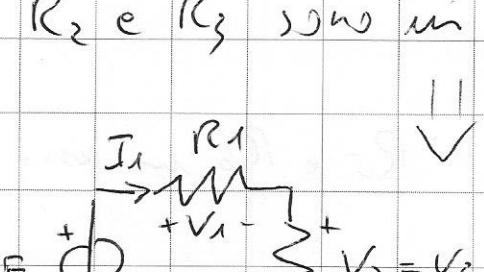
Per risolvere l'esercizio sopra si devono trovare o tutte le tensioni o tutte le correnti.

Volendo calcolare tutte le tensioni usando serie, parallelo e partitori è possibile, essendo presente nel circuito un solo generatore.

Abbiamo che:

R_2 e R_3 sono in parallelo $\Rightarrow$ $V_2 = V_3$

$\Downarrow$



$$R_{23} = R_2 // R_3$$

Applicando, a questo punto, la formula del partitore di tensione:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_{23}} E_1 \quad ; \quad V_2 = V_3 = \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} E_1$$

1V. 6D. 1. 7

Ottenute le tensioni, dividendole per le resistenze ottengo le correnti.

Se si volessero determinare direttamente le correnti posso utilizzare i partitori di corrente: dal circuito iniziale faccio il parallelo tra R_2 e R_3 e poi determino la corrente I_1:

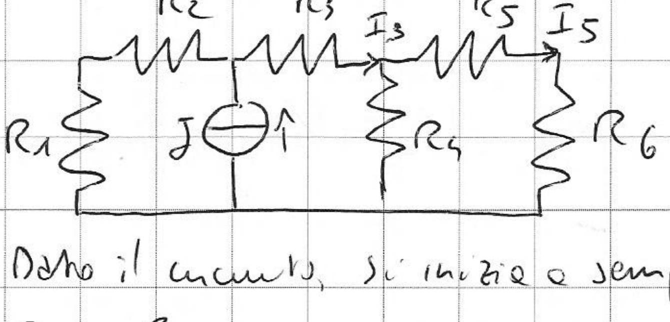
$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_{23}}$$

applicazione delle leggi di K., avendo una maglia, la corrente vale E_1 perché nel circuito ho una sola maglia

A questo punto, nota I_1, dal circuito iniziale vedo che si ripartisce in I_2 e I_3 e quindi posso usare due partitori di ~~tensione~~ corrente per determinare I_2 e I_3

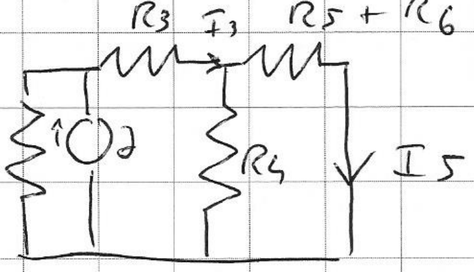
$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_1 \quad ; \quad I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1$$

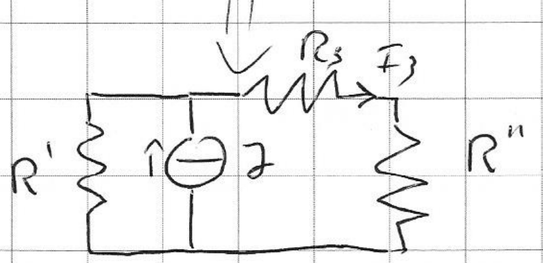
Esercizio 2: determinare le intensità di corrente I_3 e I_5.



Dato il circuito, si inizia a semplificare: R_5 e R_6 in serie; R_1 e R_2 sono in serie.
La serie R_5 e R_6 è in parallelo con R_4
quindi si ha:

$R_1 + R_2$





$R' = R_1 + R_2$

$R'' = R_4 \,//\, (R_5 + R_6)$

A questo punto abbiamo una corrente J nota che si ripartisce in due rami, uno quello dove sta R' e uno è il ramo dove sta R_3 e R'', dove c'è la corrente I_3, che può così essere calcolata proprio col partitore di corrente che mi dice come si ripartisce la corrente J.

$\Downarrow$

corrente che si ripartisce.

$$I_3 = \frac{R'}{R' + R_3 + R''} J$$

, e noto I_3, posso calcolare I_5: I_3 è la corrente che si ripartisce.

$$I_5 = \frac{R_4}{R_4 + R_5 + R_6} I_3$$

1V. 10.1.10

Aula Virtuale 8.1

- METODO DEI POTENZIALI NODALI
- METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

Sono due tipologie di applicazioni per risolvere più velocemente i circuiti rispetto all'uso diretto delle leggi di Kirchhoff.

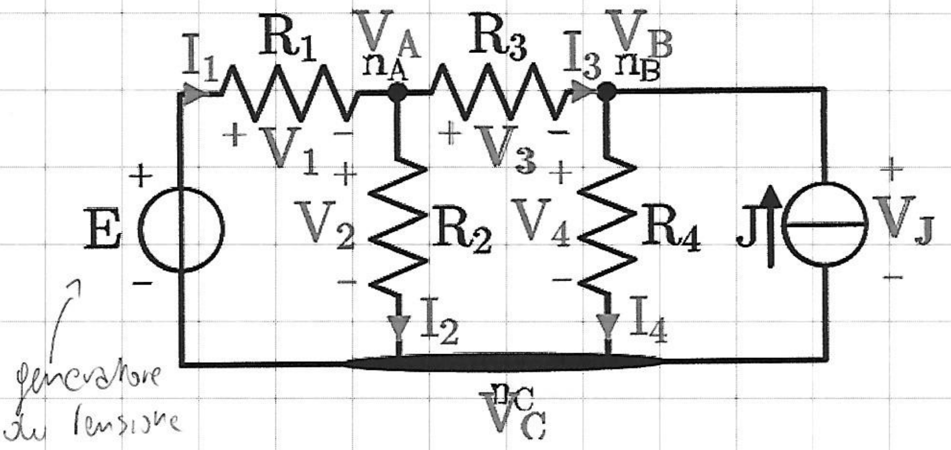
Supponiamo di avere una rete lineare con N nodi e L lati e supponiamo di voler risolvere questo circuito con le leggi di Kirchhoff.
Avremo in sostanza un certo numero di equazioni, parte per i componenti ~~...~~ e parte per la topologia del circuito.

Sia le N-1 equazioni LKC che le L-(N-1) equazioni LKT sono indipendenti.
Quando ci aggiungiamo le caratteristiche dei componenti non sempre abbiamo equazioni linearmente indipendenti.
Nella slide 3 abbiamo una eccezione, due generatori di tensione in parallelo: scrivendo le leggi di Kirchhoff, scopriamo che se i generatori hanno la stessa tensione le leggi di Kirchhoff sono tra loro compatibili, ma la corrente I è assolutamente indeterminata perché può assumere qualunque valore, quindi le leggi di K. e le caratteristiche dei componenti non portano alla soluzione.
Se invece $E_1 \neq E_2$ il sistema è impossibile.

I due metodi, quello dei potenziali nodali e quello delle correnti di maglia servono a risolvere più rapidamente il circuito.
Questo effettuando dei cambiamenti di variabile perché le incognite in questi due metodi non saranno più le tensioni ai capi dei componenti e le correnti di lato, ma delle nuove variabili che saranno i potenziali nodali e le correnti di maglia.

METODO DEI POTENZIALI NODALI

Bisogna individuare i nodi del circuito (n_A, n_B e n_C in figura). Notare come n_C sia evidenziato in modo da visualizzarlo come un unico nodo, cioè n_C è "tutto un nodo". Il metodo prevede che si associ un potenziale a ciascun nodo, gli cui al nodo n_A è associato il potenziale V_A, al nodo n_B il potenziale V_B ed al nodo n_C il potenziale V_C.



Questo si può fare nelle ipotesi in cui sono valide le leggi di Kirchhoff.
A questo punto si possono scrivere le tensioni ai capi dei componenti in funzione dei potenziali nodali.
Ad es. la tensione V_2 può essere scritta come $V_A - V_C$, cioè $V_2 = V_A - V_C$; analogamente $V_3 = V_A - V_B$ ecc.
Si vede come è collegato ~~quando~~ un lato ai nodi e quindi si possono scrivere le tensioni su ciascun lato in funzione

dei potenziali nodali.

Sul primo lato, a sinistra, si ha la tensione

$E - V_1 = V_A - V_C$. $\quad V_A - V_C - E = -R_1 I_1 = V_1$

Le LKT sono automaticamente soddisfatte nel momento in cui si scrivono tutte le tensioni in termini dei potenziali nodali.

Le incognite sono i potenziali nodali.

Questo cambiamento di variabile soddisfa automaticamente le leggi di K. alle tensioni. Abbiamo $N-1$ equazioni da risolvere invece di L. slide 8 ic'25"

Devono essere soddisfatte solo le LKC che sono $N-1$

Quindi con questo cambiamento di variabile è stato ridotto il numero di ~~incognite~~ equazioni necessarie a risolvere la rete.

Osservazione: ogni tensione reale è espressa come d.d.p nodali, i potenziali nodali possono essere definiti a meno di una costante additiva.

$$V_2 = V_A - V_C$$

Si può quindi fissare arbitrariamente un potenziale nodale ad un valore prestabilito (in genere 0).

Si pone a zero, ad esempio, il potenziale nodale dove confluiscono più lati, nelle LKC non sarà scritta l'equazione a quel nodo e quindi è più comodo.

Con questa logica, nell'esempio si sceglie $V_C = 0$.

A questo punto si scrivono tutte le correnti in funzione dei potenziali nodali.

$-V_A + V_C + E$, con $V_C = 0$

Ad es. la corrente $I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{E - V_A}{R_1}$, V_A è il potenziale nodale.

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_A}{R_2} \text{ e così via}$$

Quindi scriviamo tutte le correnti di lato in funzione dei potenziali nodali.
A questo punto non ci resta che da imporre le LKC: abbiamo tre nodi, quindi abbiamo $3-1=2$ equazioni da scrivere; poiché $V_C = 0$ (è il potenziale di riferimento) il nodo da scartare è il nodo n_C, quello dove abbiamo posto il potenziale di riferimento a zero.
Dobbiamo dunque scrivere le LKC ai nodi ~~V_A e V_B~~ n_A e n_B.
Al nodo n_A abbiamo $\quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$
Al nodo n_B abbiamo $\quad I_3 - I_4 + J = 0$
Ora, dopo aver scritto le LKC, alle correnti sostituiamo le espressioni che abbiamo trovato ai potenziali nodali, quindi $I_1 = \dfrac{E - V_A}{R_1}$, $I_2 = \dfrac{V_A}{R_2}$ ecc.
Otteniamo dunque un sistema di due equazioni nelle due incognite V_A e V_B.
Una volta noti V_A e V_B possiamo ricostruire tutte le correnti e tutte le tensioni.
Si deve osservare che la scelta del potenziale nodale da porre a zero deve essere fatta nella maniera più conveniente possibile, a tal riguardo vd slide 13: al nodo D confluiscono 5 lati e $V_D = 0$ sembra essere la scelta giusta. Ma siccome c'è un generatore di tensione collegato a due nodi, E_2, se pongo $V_A = 0$ allora il potenziale di V_B è noto perché $V_B = E_2$, poiché in quel due lati si avrà che $V_B - V_A = E_2$.
Essendo noto V_B allora avrei come incognite V_D e V_C.

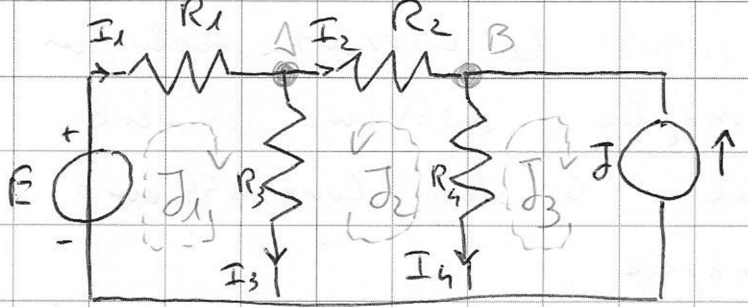
AV.8.1.4

Essendo $V_A = 0$, V_B noto si scrivono le LKC solo ai nodi C e D.

FINE METODO DEI POTENZIALI NODALI

IL METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

È, per certi versi, duale al precedente perché ha lo scopo di soddisfare automaticamente le LKC anziché le LKT.



Si deve scegliere un set di maglie indipendenti. In figura si vede la scelta dei tre anelli.

A questo punto si introducono delle variabili fittizie dette "correnti di maglia".

Si immagina che esistano delle correnti che circolano in ciascuna maglia.

Quindi J_1 percorre i componenti della prima maglia. Posso legare queste variabili alle correnti reali. Vediamo come: nella prima maglia circola la corrente I_1 e in questa maglia ho solo J_1 come corrente di maglia e con lo stesso verso di percorrenza, quindi $I_1 = J_1$, cioè la corrente I_1 coincide con la corrente di maglia J_1.

Se considero I_3, come correnti di maglia circolano J_1 e J_2. Quindi $I_3 = J_1 + J_2$

$$I_2 = -J_2 \quad ; \quad I_4 = -J_2 - J_3 \quad ; \quad \underbrace{J = -J_3}_{\text{nota!}}$$

Il vantaggio di questo è che quando si scrivono le LKC avremo che

al nodo A avremo $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

Al nodo B avremo $I_2 - I_4 + J = 0$

} le due LKC ai due nodi.

Nel momento in cui vado a sostituire le espressioni delle correnti in termini delle correnti di maglia nelle equazioni, ottengo, ad es.:

$$J_1 - (-J_2) - (J_1 + J_2) = 0$$

e $$(-J_2) - (-J_2 - J_3) + (-J_3) = 0$$

Trovo nella espressione una corrente di maglia e il suo opposto, sempre. Quindi le LKC sono soddisfatte, quando le scrivo in termini di correnti di maglia.

- Utilizzando il metodo delle correnti di maglia, le LKC sono automaticamente soddisfatte.
- Se la rete ha N nodi e L lati, per la risoluzione con tale metodo è necessario risolvere un sistema di $L-(N-1)$ equazioni, anziché di L equazioni.

A questo punto, dopo aver scritto le correnti reali in termini delle correnti di maglia, possiamo scrivere le LKT alle tre maglie, le stesse dove abbiamo imposto le correnti di maglia.
Quindi, abbiamo

$$\begin{cases} E - V_1 - V_3 = 0 & \text{per il primo anello} \\ V_3 - V_2 - V_4 = 0 & \text{per il secondo anello} \end{cases}$$

$V_4 - V_J = 0$ per il terzo anello; questa LKT è meno importante perché introduce una incognita V_J che non è legata a nessuna corrente, quindi, come sappiamo, scrivere una LKT a un generatore di corrente non è utile alla soluzione del circuito, ma serve solo a calcolare V_J, per cui questa equazione può, per il momento, essere messa da parte.

Prendendo le prime due LKT alle tensioni sostituiamo le caratteristiche delle componenti, per cui al posto di V_1 scriviamo $R_1 I_1$, $V_2 = R_2 I_2$; al posto delle correnti sostituiamo le correnti di maglia e otteniamo

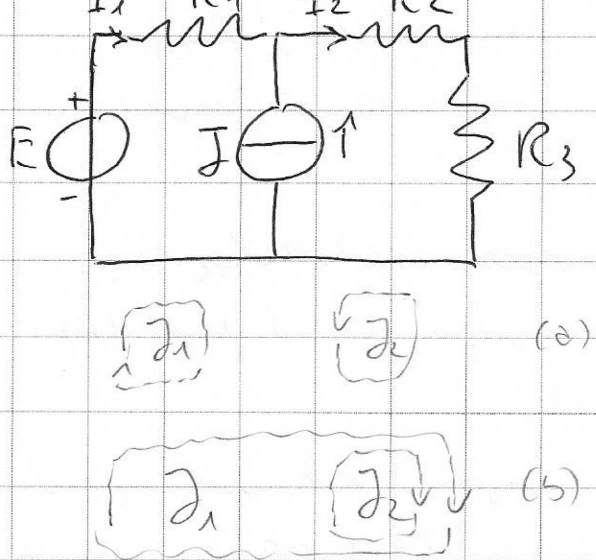
$$\begin{cases} E - R_1 J_1 - R_3 (J_1 + J_2) = 0 \\ R_3 (J_1 + J_2) - R_2 (-J_2) - R_4 (-J_2 - J_3) = 0 \end{cases}$$

Si ricorda che J_3 è nota in quanto $J_3 = -J$, quindi abbiamo un sistema di due equazioni in due incognite, J_1 e J_2. Inseriamo i valori numerici e si risolve il sistema. In questo caso abbiamo due equazioni in due incognite, contro le 5 equazioni con le leggi di Kirchhoff. 31'18"

Quindi, per poter utilizzare il metodo delle correnti di maglia i passi sono:

1. Si sceglie un set di maglie indipendenti
2. Si definisce una corrente di maglia per ogni maglia.
3. Si impongono le LKT (ad ogni maglia del punto 2) e si sfruttano le caratteristiche dei componenti per avere le equazioni LKT in termini di correnti di maglia
4. Si ottiene un sistema di $L-(N-1)$ equazioni in $L-(N-1)$ incognite.

C'è in questo metodo da fare attenzione ai generatori di corrente, che possono creare delle incomprensioni.
Se abbiamo un generatore di corrente all'estremità di un circuito non ci dovrebbero essere difficoltà.
Però, se il generatore di corrente è nel mezzo del circuito, come in figura, ci chiediamo quali correnti di maglia si possono scegliere. In un primo caso posso scegliere che in ogni anello passi una corrente di maglia (a), va bene, ma J_1 e J_2 non sono direttamente collegate alla corrente J del generatore di maglie, perché sappiamo



solo che $J = -J_1 - J_2$, ma J_1 e J_2 non sono note a priori. Si scrivono le due equazioni in due correnti ed il sistema è risolvibile, solo che non è vero che una delle due correnti di maglia è uguale a J. La corrente J arrivata al nodo si divide in I_1 e I_2; J_1 e J_2 sono non note e da calcolare entrambe.

C'è una seconda opzione, la (S), in cui J_1 è la maglia esterna. Anche questo è un set di maglie indipendenti. In questo caso $I_1 = J_1$ e $I_2 = J_1 + J_2$; la corrente J, la corrente del generatore, coincide con J_2: $J = J_2$, perché J_2 percorre la seconda maglia e quindi attraverso il generatore di corrente passa solo J_2. In questo caso una delle correnti di maglia è nota, J_2 che vale J.

Con questa seconda scelta (S) abbiamo la sola incognita J_1 e quindi ci basta scrivere una sola legge di Kirchhoff alla maglia esterna e otteniamo una equazione nell'unica incognita J_1.

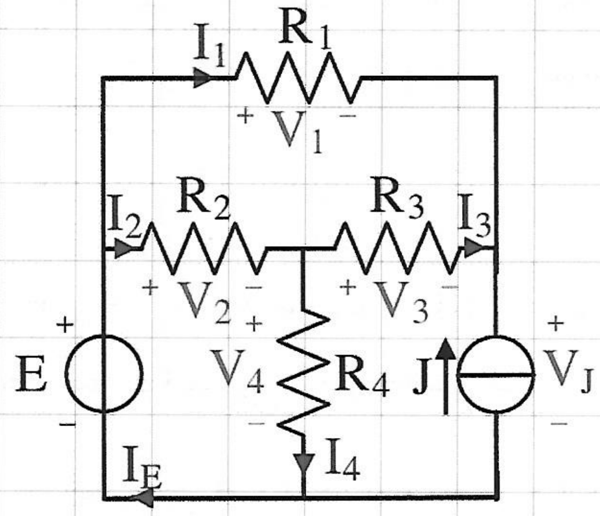
In sostanza entrambe le soluzioni sono valide, la seconda ha una equazione ed una incognita in meno rispetto alla prima.

Due osservazioni sulla fisica della metodologia:
- Ogni potenziale nodale coincide con la d.d.p. tra il nodo e quello di riferimento
- ogni corrente di maglia non ha sempre anche un significato fisico: è vero solo se il set di maglie scelto è un set di maglie fondamentali. In tal caso ogni corrente di maglia coincide con una corrente di lato di coalbero.

AV. 21. 8

Aula Virtuale 9
52'33"

SOLUZIONE DI UN CIRCUITO IN REGIME STAZIONARIO



Risolvere la rete adoperando:

- Le leggi di Kirchhoff
- Il principio di sovrapposizione degli effetti
- Il metodo dei potenziali nodali
- Il metodo delle correnti di maglia → LKC soddisfatte

→ anche per regimi dinamici e per regimi sinusoidali

LKT soddisfatte

metodi più convenienti

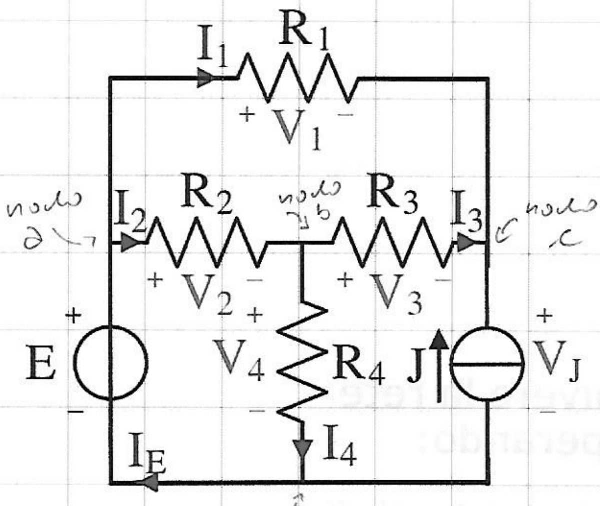
LKC e LKT

meglio le correnti di maglia perché le LKC sono soddisfatte

Il circuito è formato da un generatore di tensione E, un generatore di corrente J, quattro resistori.
Sono indicate tutte le tensioni e tutte le correnti, cosa consigliata da fare sempre, in modo da definire bene le grandezze e le convenzioni che si vuole utilizzare.
Vogliamo "RISOLVERE IL CIRCUITO", quindi vogliamo determinare tutte le tensioni e tutte le correnti incognite una volta assegnati i valori delle resistenze R_1, R_2, R_3 e R_4 e i valori dei generatori di tensione E e di corrente J.
I metodi di risoluzione sono vari, come sopra i quattro metodi elencati.

Metodo delle LEGGI DI KIRCHHOFF

ultima spiaggia risolutiva, quella che porta comunque alla risoluzione.
È la strada più lunga



Il circuito ha 4 nodi e 3 maglie (l'anello superiore e due anelli in basso), si possono scrivere 3 LKT e 3 LKC indipendenti. Avendo 3 anelli, essi sono sicuramente un set di maglie indipendenti.

nodo d (quello scartato per le leggi di Kirchhoff ai nodi)

Per le leggi di Kirchhoff ai nodi, avendone 4, ne possiamo scartare uno, ad esempio quello in basso.
Quindi abbiamo:

$$\text{LKC}\begin{cases} 1)\ I_E - I_1 - I_2 = 0 \\ 2)\ I_2 - I_3 - I_4 = 0 \\ 3)\ J + I_3 + I_1 = 0 \end{cases}$$

I_E entra nel nodo a, I_1 e I_2 escono dal nodo

I_2 entra nel nodo b, I_3 e I_4 escono dal nodo

Tutte le correnti entrano nel nodo c; J è la corrente del generatore.

Per le leggi di Kirchhoff alle maglie devo scegliere un verso di percorrenza: supponiamo per la maglia superiore un verso orario (e pure per le due maglie in basso).
Si nota che la tensione V_2 è concorde al verso di percorrenza (da − a +), così come la tensione V_3; è discorde la tensione V_1 al verso della maglia, abbiamo quindi

$$\text{LKT}\begin{cases} 4)\ V_2 + V_3 - V_1 = 0 \\ 5)\ E - V_2 - V_4 = 0 \\ 6)\ V_4 - V_3 - V_J = 0 \end{cases}$$

notare la tensione ai capi del generatore di corrente: è una tensione incognita V_J

Le LKC e le LKT sono le sei leggi di Kirchhoff che risolvono il circuito. Però ci sono più incognite di quante siano le equazioni, infatti le incognite sono

Tutte le correnti e tutte le tensioni.

Quindi alle equazioni devo aggiungere le caratteristiche dei componenti.

Ad es. se alla tensione V_2 sostituisco la tensione $R_2 I_2$ oppure alla tensione V_1 sostituisco la tensione $R_1 I_1$ allora ottengo un sistema di 6 equazioni in 6 incognite,

compare una sola volta, nella LKC e rende questa eq. come si fosse a parte e può essere inizialmente trascurata

le incognite sono I_1, I_2, I_3, I_4, I_E e V_J.

1) $I_E - I_1 - I_2 = 0$

2) $I_2 - I_3 - I_4 = 0$

3) $J + I_3 + I_1 = 0$

R_1, R_2, R_3, R_4, J note

4) $R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_1 I_1 = 0$

5) $E - R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0$

6) $R_4 I_4 - R_3 I_3 - V_J = 0$

→ tensione ai capi di un generatore di corrente: compare solo in questa equazione, che può essere anch'essa inizialmente trascurata

Quindi, trascurando l'equazione 1 e l'equazione 6, il sistema è di 4 equazioni in 4 incognite, che può essere risolto. La soluzione è calcolata nella slide 6.

Fine metodo L. di K.

METODO DEL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Poiché tutte le leggi di Kirchhoff sono lineari se le caratteristiche dei componenti sono lineari, come sono quelle del corso di elettrotecnica, allora posso considerare una alla volta il contributo di ogni singolo generatore indipendente di tensione o di corrente. Verranno trovati tanti contributi di tensioni e di correnti per ogni incognita e allora una

Principio di sovrapposizione degli effetti

In virtù della linearità delle leggi di Kirchhoff e delle caratteristiche dei componenti, si può considerare attivo un generatore (indipendente) alla volta e poi sommare gli "effetti".

$$V = V' + V'' + \ldots$$
$$I = I' + I'' + \ldots$$

ATTENZIONE: questo vale per le tensioni e per le correnti, ma **non per le potenze**!

$$\cancel{P = P' + P'' + \ldots}$$

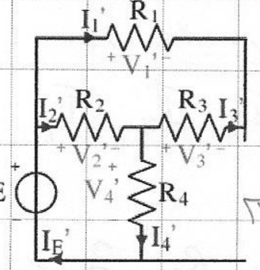
→ c'è un legame quadratico, non lineare, fra tensioni, correnti e potenze

Principio di sovrapposizione degli effetti

Soluzione complessiva

$$I_3 = I_3' + I_3'' = -\frac{R_2 E + R_1 (R_2 + R_4) J}{R_2 R_4 + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

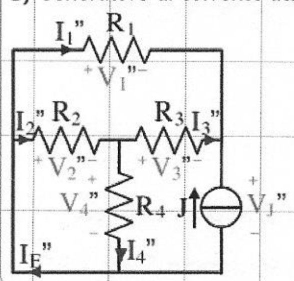
1) Generatore di tensione attivo



$$I_3' = -\frac{R_2 E}{R_2 R_4 + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

circuito aperto

1) Generatore di corrente attivo



$$I_3'' = -\frac{R_1 (R_2 + R_4) J}{R_2 R_4 + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

cortocircuito

generica tensione V su un ramo, sarà pari alla somma di tutte le tensioni trovate nei sottocircuiti. Idem per le correnti. Ma non per il calcolo delle potenze, per il legame non lineare, ma quadratico tra tensioni correnti e potenze.
Si devono considerare accesi uno alla volta i generatori.
Considerando il generatore di tensione attivo vuol dire che tutti gli altri generatori sono spenti. Se il generatore spento è di corrente vuol dire che la corrente è uguale a zero, il che implica circuito aperto. Quindi al posto del generatore di corrente che è spento si deve mettere un circuito aperto.

Abbiamo quindi una rete con un generatore attivo e una rete di resistenze, rete che può essere risolta utilizzando serie e parallelo, e partitori.

Quando il generatore di tensione E è attivo, R_1 e R_3 sono in serie, questa serie è in parallelo con R_2 e tutto questo è in serie con R_4. A questo punto si ottiene una unica resistenza equivalente ai capi del generatore di tensione. La corrente I_E sarà la tensione E diviso la resistenza equivalente e, attraverso una serie di partitori si possono ~~det~~ determinare tutte le

AV.9.4

correnti del circuito.

In figura l'espressione della corrente I_3', facendo tutta una serie di partitori.

A questo punto "spengo il generatore di tensione e accendo il generatore di corrente", quindi considero un altro cortocircuito dove il generatore di tensione spento significa tensione pari a zero ovvero cortocircuito, che sostituisce il generatore di tensione spento.

Alla rete che ottengo applico serie e parallelo e partitori per determinare le resistenze equivalenti, tensioni e correnti.

In figura abbiamo R2 e R1 in parallelo, questo è in serie con R3 e tutto quanto è in parallelo con R4.

Avendo un solo generatore si può applicare il partitore, si tratterà di fare qualche conto.

(SE IL GENERATORE È IN MEZZO AL CIRCUITO LA RISOLUZIONE È PIÙ LUNGA)

I_3'' è il secondo contributo.

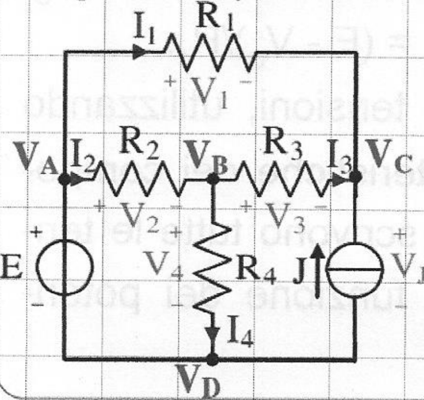
Fatto questo per tutti i generatori sommo i contributi e trovo, ad es., I_3 complessivo.

Fine Metodo

IL METODO DEI POTENZIALI NODALI

Metodo dei potenziali nodali

Ad ogni nodo si può associare un potenziale.



Tutte le tensioni sono esprimibili in termini di potenziali nodali.

$$\begin{aligned} V_1 &= V_A - V_C \\ V_2 &= V_A - V_B \\ V_3 &= V_B - V_C \\ V_4 &= V_B - V_D \\ V_J &= V_C - V_D \\ E &= V_A - V_D \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} V_1 &= E - V_C \\ V_2 &= E - V_B \\ V_3 &= V_B - V_C \\ V_4 &= V_B \\ V_J &= V_C \\ V_A &= E \end{aligned}$$

Si parte dicendo che è possibile associare un potenziale nodale a ogni nodo; si vede in figura l'associazione ai nodi dei potenziali nodali V_A, V_B, V_C e V_D.

Una volta che è individuato il potenziale di ogni nodo, in questo caso V_A, V_B, V_C, V_D, posso esprimere ogni tensione in termini di differenza di potenziale. Quindi la tensione V_1 ai capi del resistore R_1 può essere scritta come $V_A - V_C$.

$V_2 = V_A - V_B$ e così via per V_3 e per V_4; basta vedere i potenziali dei due estremi.

A questo punto, sapendo che i potenziali nodali sono dati a meno di una costante, possiamo decidere di porre a zero un potenziale nodale. La scelta è del tutto arbitraria, ma in questo caso si noti che $E = V_A - V_D$, quindi tale differenza di potenziale è nota a priori per cui scegliendo $V_D = 0$ allora $V_A = E$.

Con questa scelta saranno noti due potenziali. Quindi si sceglie $V_D = 0$ e fatto questo si riscrivono tutte le equazioni.

Si arriva ad avere solo due incognite, V_B e V_C.

Metodo dei potenziali nodali

Le tensioni espresse in termini di potenziali nodali soddisfano automaticamente le LKT.

$$4)\; V_2 + V_3 - V_1 = (E - V_B) + (V_B - V_C) - (E - V_C) = 0$$
$$5)\; E - V_2 - V_4 = E - (E - V_B) - V_B = 0$$
$$6)\; V_4 - V_3 - V_J = V_B - (V_B - V_C) - V_C = 0$$

Rimangono solo le LKC!

Metodo dei potenziali nodali

Si devono scrivere le correnti in termini di potenziali nodali...

$$I_1 = \frac{E - V_C}{R_1} \qquad I_3 = \frac{V_B - V_C}{R_3}$$

$$I_2 = \frac{E - V_B}{R_2} \qquad I_4 = \frac{V_B}{R_4}$$

... e poi si può sostituire nelle LKC

Con il metodo dei potenziali nodali le LKT sono automaticamente soddisfatte. Rimangono da soddisfare le LKC.

Quindi a questo punto si devono scrivere le correnti in termini di potenziali nodali utilizzando le caratteristiche dei componenti. La corrente $I_1 = V_1 / R_1$, V_1 è stata scritta in precedenza in termini di potenziali nodali come $E - V_C$, quindi $I_1 = (E - V_C)/R_1$.

Note le tensioni, utilizzando le caratteristiche dei componenti si scrivono tutte le tensioni in funzione dei poten-

AK. 9. 6

Metodo dei potenziali nodali

Sostituendo si ottiene il sistema da risolvere.

$$\begin{cases} I_2 - I_3 - I_4 = 0 \\ J + I_3 + I_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{E - V_B}{R_2} - \dfrac{V_B - V_C}{R_3} - \dfrac{V_B}{R_4} = 0 \\ J + \dfrac{V_B - V_C}{R_3} + \dfrac{E - V_C}{R_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_B\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}\right) - \dfrac{V_C}{R_3} = \dfrac{E}{R_2} \\ \dfrac{V_B}{R_3} + V_C\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}\right) = -J - \dfrac{E}{R_1} \end{cases}$$

(slide 14)

ziali nodali.

A questo punto posso effettuare le sostituzioni nelle LKC.

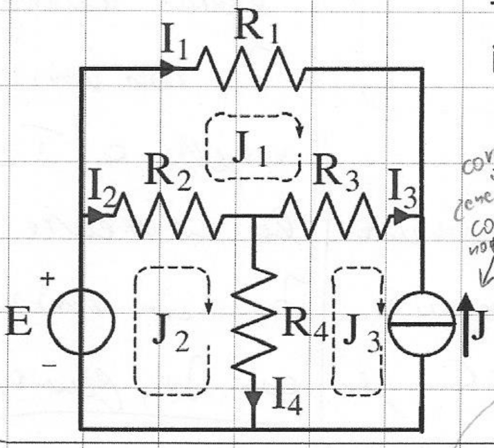
"E" (valore del generatore di tensione) può essere considerata in un secondo momento.

Nelle LKC sostituisco alle correnti I_1, I_2, I_3, I_4 le espressioni in termini dei potenziali nodali ottenendo un sistema di due equazioni in due incognite, V_B e V_C (slide 14).

METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

(Può essere considerato, per certi versi, duale al metodo dei potenziali nodali)

Ad ogni maglia si può associare una "corrente di maglia"



Tutte le correnti sono esprimibili in termini di correnti di maglia.

$I_1 = J_1$ (lato con R_1, scorre solo I_1 e scorre solo J_1, con lo stesso verso)

$I_2 = -J_1 + J_2$ (lato con R_2, scorre I_2 e scorre J_1 con verso discorde e J_2 con verso concorde)

$I_3 = -J_1 + J_3 = -J_1 - J$ (verso concorde a I_3)

$I_4 = J_2 - J_3 = J_2 + J$

$I_J = -J_3$ (IL GENERATORE DI CORRENTE J, => J_3 ...)

corrente del generatore, corrente nota

SI COLLEGANO LE CORRENTI REALI E QUELLE DI MAGLIA.

$J = -J_3$ con J è la corrente del generatore

Innanzitutto si deve individuare un set di maglie indipendenti; nel caso in figura sono i 3 anelli.

Poi si immagina che in ogni maglia circoli una corrente fittizia, la cosiddetta corrente di maglia.

Nel caso in figura le correnti di maglia sono J_1, J_2 e J_3.

Da osservare che queste correnti, che fanno esattamente questo percorso, non esistono; le correnti passano per i componenti e si ripartiscono secondo le leggi di Kirchhoff.

AV 9.7

Metodo delle correnti di maglia

Le correnti espresse in termini di correnti di maglia soddisfano automaticamente le LKC.

1) $I_E - I_1 - I_2 = J_2 - J_1 - (-J_1 + J_2) = 0$
2) $I_2 - I_3 - I_4 = (-J_1 + J_2) - (-J_1 - J) - (J_2 + J) = 0$
3) $J + I_3 + I_1 = J + (-J_1 - J) + J_1 = 0$

Rimangono solo le LKT!

Metodo delle correnti di maglia

Sostituendo si ottiene il sistema da risolvere.

$$\begin{cases} R_2I_2 + R_3I_3 - R_1I_1 = 0 \\ E - R_2I_2 - R_4I_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_2(-J_1+J_2) + R_3(-J_1-J) - R_1J_1 = 0 \\ E - R_2(-J_1+J_2) - R_4(J_2+J) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_1(R_1+R_2+R_3) - J_2R_2 = -R_3J \\ J_1R_2 - J_2(R_2+R_4) = R_4J - E \end{cases}$$

Poi si collegano le correnti reali alle correnti di maglia. $I_1 = J_1$ perché nella maglia in cui scorre la corrente di maglia J_1, scorre solo la corrente reale I_1, con verso concorde, nel ramo con R_1. Sul lato dove c'è R_2 circola la sola corrente I_2; in termini di corrente di maglia, su questo lato scorre la corrente J_1 con verso discorde rispetto a I_2; poi c'è la corrente di maglia J_2 con verso concorde con J_2, quindi $I_2 = -J_1 + J_2$.

A questo punto si osserva che le correnti espresse in termini di correnti di maglia soddisfano automaticamente le LKC, per cui rimangono solo le LKT, da scrivere con le caratteristiche dei componenti sostituendo le correnti con le espressioni delle correnti di maglia. Si ottiene un sistema con due equazioni, in due incognite J_1 e J_2, risolvibile.

ABBIAMO DUNQUE VISTO TUTTI I METODI PER RISOLVERE I CIRCUITI IN REGIME STAZIONARIO, AD ESCLUSIONE DEL TEOREMA DI THEVENIN E NORTON, CHE RISOLVE UNA PARTE DEL CIRCUITO, AD ES. PER CONOSCERE UNA PARTICOLARE TENSIONE O UNA PARTICOLARE CORRENTE. MENTRE CON I METODI DEI POTENZIALI NODALI E DELLE CORRENTI DI MAGLIA ABBIAMO TUTTE LE GRANDEZZE.

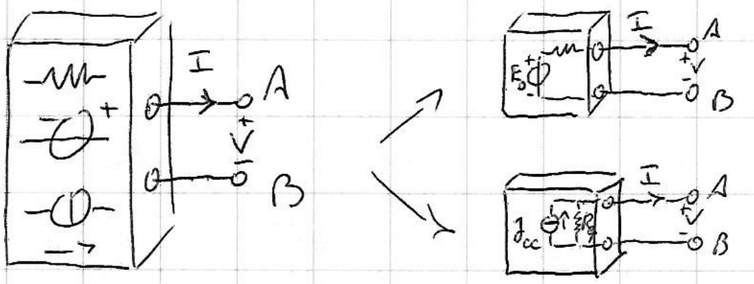
AV 9.8

Aula Virtuale 10.1

TEOREMI DI THEVENIN E NORTON IN REGIME STAZIONARIO

(CON ACCORGIMENTI VARI, SONO VALIDI ANCHE IN REGIME DINAMICO)

I due teoremi sono trattati insieme, data la loro stretta correlazione.
Essi dicono che se ho un circuito in regime stazionario, composto da resistori, generatori di tensione, di corrente indipendenti lineari, ai suoi due terminali il circuito è equivalente ad un circuito molto semplice (T. di Thevenin) formato da un generatore di tensione in serie con una resistenza equivalente oppure è equivalente ad un circuito formato da un generatore di corrente in parallelo con una resistenza equivalente.



Generatore di tensione con resistenza eq. in serie

Generatore di corrente con una resistenza eq. in parallelo

componenti lineari

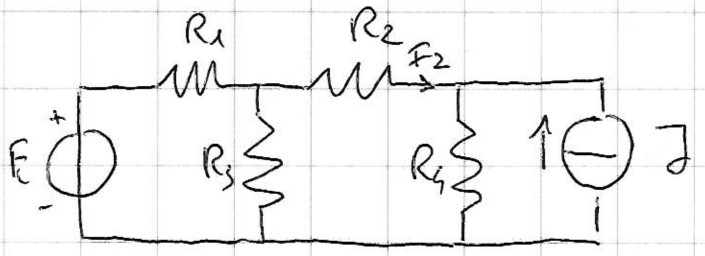
I parametri nei teoremi di Thevenin e Norton sono:
- Tensione a vuoto: tensione misurata a vuoto ai capi dei morsetti.
- Corrente di cortocircuito: corrente che fluisce da un morsetto all'altro quando sono cortocircuitati.
- Resistenza equivalente: resistenza equivalente vista ai morsetti

quando la rete è resa passiva. $\boxed{E_0 = R_{eq} J_{cc}}$

Quindi per determinare la resistenza equivalente si devono sostituire tutti i generatori di tensione indipendenti con un cortocircuito e tutti i generatori indipendenti di corrente con un circuito aperto.

Quando la rete è passiva si ottiene per riduzione serie, parallelo, stella, una resistenza equivalente del circuito.

Esempio: determinare la potenza assorbita dal resistore R_2.



Senza dubbio occorre usare il teorema di Thevenin (o quello di Norton), perché quello che interessa è I_2.

La rete è composta da 3 maglie.
C'è un generatore di tensione E e un generatore di corrente J.
Ci sono 4 resistori.
Per calcolare la potenza assorbita dal resistore R_2 occorre calcolare la corrente che fluisce attraverso il resistore R_2, cioè basta calcolare I_2.
Calcolato I_2 la potenza assorbita è $R_2 I_2^2$.

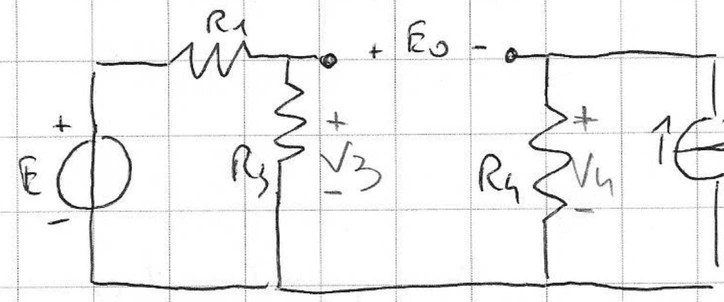
La prima cosa da fare è isolare la resistenza R_2 dal circuito e calcolare il circuito con Thevenin (o Norton) senza R_2.

Del circuito originale, tutto, escluso R_2, deve essere trasformato nel circuito

equivalente di Thevenin, o di Norton.
Del circuito che rimane si deve calcolare tensione a vuoto, resistenza equivalente e corrente di cortocircuito, che sono tra loro legate: $E_0 = R_{eq} \cdot I_{cc}$.
Ciò significa che con due parametri si determina il terzo.
La scelta di quale parametro ~~scegliere da~~ calcolare è determinata dalla convenienza.
Ora, per scopi didattici, saranno calcolati tutti e tre.

TENSIONE a VUOTO

le correnti J si chiude tutta nella maglia a destra



Si noti che la maglia aperta, composta da E_0, R_3 e R_4 ci permette di stabilire che la tensione ai capi di E_0 è data dalla tensione ai capi di R_3 ~~presa col verso dal suo verso~~ l'alto meno la tensione ai capi di R_4.

$$E_0 = E\frac{R_3}{R_1+R_3} - JR_4$$

La tensione ai capi di R_3: abbiamo a sinistra una maglia chiusa, R_1 e R_3 sono in serie, quindi occorre un partitore di tensione, per cui la tensione ai capi di R_3 sarà $\frac{E \cdot R_3}{R_1+R_3}$, quella ai capi di R_4 sarà $R_4 \cdot J$
Quindi

$$E_0 = E\cdot\frac{R_3}{R_1+R_3} - \underbrace{JR_4}_{V_4 = V_J\,!}$$

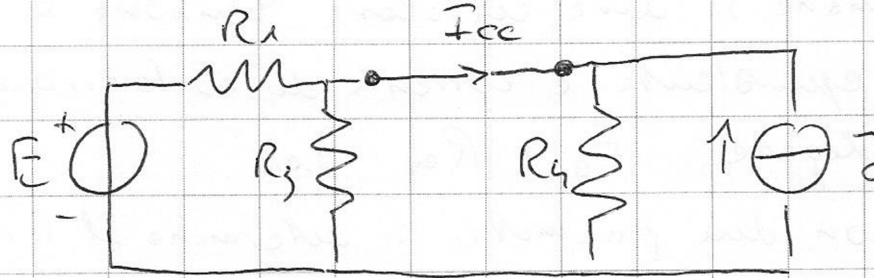
Per il partitore di T:

$$V_3 = \frac{E \cdot R_3}{R_1+R_3}$$

$V_4 = R_4 \cdot J$ ← corrente che circola nella maglia

AV. 10.3

La corrente di cortocircuito

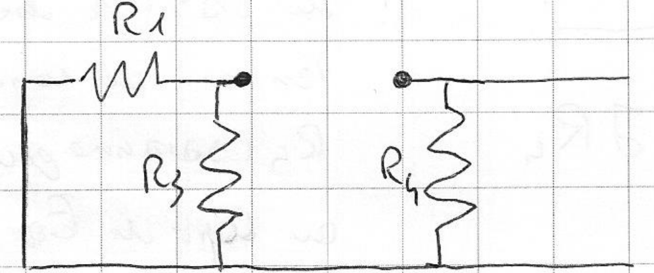


Al posto di R_2 è stato messo un cortocircuito e si deve calcolare la corrente che passa attraverso questo cortocircuito.

$$J_{cc} = \frac{E R_3 - J R_4 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4}$$

Si può usare la sovrapposizione degli effetti.

Resistenza equivalente



Devo prendere il circuito e rendere passiva la rete, quindi al posto del generatore di tensione metto un cortocircuito e al posto del generatore di corrente metto un circuito aperto.

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4}{R_1 + R_3}$$

La rete che rimane dopo averla resa passiva è come sopra e la resistenza equivalente deve essere calcolata tra i due morsetti come richiesto dall'esercizio.

Si osservi che R_1 e R_3 sono in parallelo, questo parallelo è in serie con R_4; quindi la resistenza equivalente sarà $(R_1 // R_3) + R_4$, ovvero

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1+R_3} + R_4 = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_1R_4 + R_3R_4}{R_1+R_3}$$

Una volta determinati i parametri (due sono sufficienti), abbiamo il circuito equivalente di Thevenin o il circuito equivalente di Norton.

Se si sceglie Thevenin abbiamo (a sx), tensione a vuoto E_0, resistenza equivalente R_{eq}, ~~corrente I_2~~ e resistenza R_2;
se si sceglie Norton abbiamo corrente di cortocircuito J_{cc}, resistenza equivalente e resistenza R_2.
In entrambi i casi è immediato calcolare la corrente I_2: nel circuito di Thevenin è:

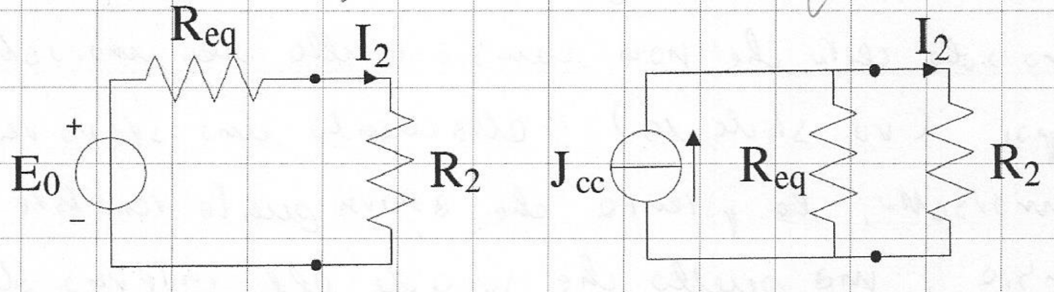
$$I_2 = \frac{E_0}{R_{eq}+R_2} = \frac{E R_3 - J R_4 (R_1+R_3)}{R_1 R_3 + (R_2+R_4)(R_1+R_3)}$$

Nel circuito di Norton è altrettanto semplice, basta fare un partitore.

In conclusione

Thevenin

Norton



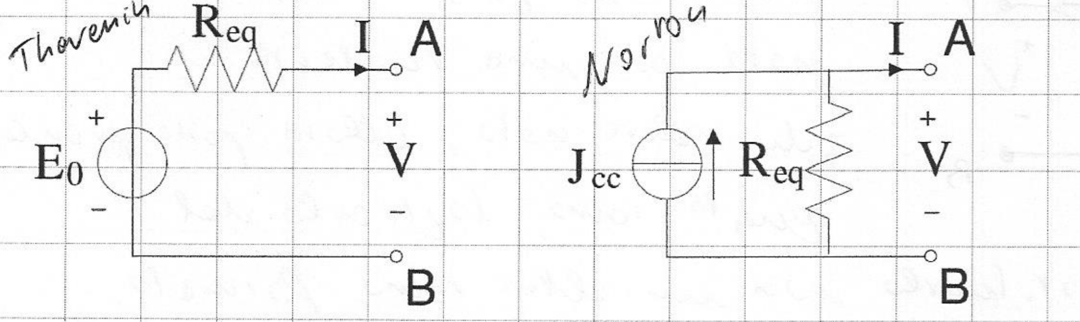
$$I_2 = \frac{E_0}{R_{eq}+R_2} = \frac{ER_3 - JR_4(R_1+R_3)}{R_1R_3 + (R_2+R_4)(R_1+R_3)}$$

Quindi, in sostanza:

- Si prende il circuito di partenza e si toglie dal circuito quello che non deve essere trasformato in termini del teorema (quindi se occorre calcolare la corrente I_2 si toglie dal circuito R_2).
- quello che rimane si trasforma con Thevenin o con Norton, calcolando tensione a vuoto, resistenza equivalente, corrente di cortocircuito, considerando che ne bastano due poiché $E_0 = R_{eq} \cdot I_{cc}$
- a questo punto abbiamo il circuito equivalente di Thevenin o di Norton e si può calcolare quello che serve

C'è da fare una precisazione importante e riguarda l'attenzione che deve essere fatta alle potenze.
L'equivalenza fra circuiti vale solo in termini di caratteristiche, non di potenze.
Cioè i due oggetti (circuito iniziale e circuito di Thevenin o di Norton), ai terminali, mi danno lo stesso rapporto VI, ma la potenza assorbita da uno può essere completamente diversa da quella assorbita dall'altro, il circuito equivalente di Thevenin.
Siamo solo certi che non cambia nulla dai morsetti A e B in poi (vd. slide 10): attaccando uno stesso resistore ai morsetti, la potenza che assorbe quello resistore non cambia, ma quello che succede all'interno della scatola è tale che mantiene la caratteristica ma fa perdere informazione sulle potenze.
Quindi la potenza all'interno del circuito iniziale non

ha nulla a che vedere con quella del circuito equivalente.
Basta osservare i circuiti di Thevenin e Norton a vuoto, notando che uno può essere trasformato nell'altro.



Potenza dissipata nulla
(a vuoto non circola corrente)

Potenza dissipata non nulla => calore

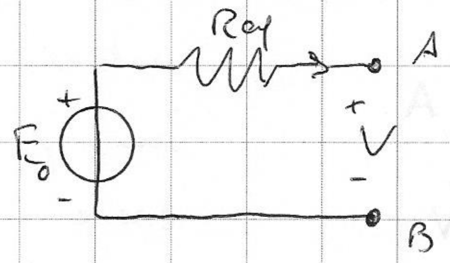
I due circuiti sopra sono a sinistra di Thevenin, a destra di Norton e sono equivalenti.
A vuoto (nulla attaccato) il circuito di Thevenin non dissipa nessuna potenza perché a vuoto non circola corrente quindi non c'è nessuna potenza dissipata.
Nel circuito di Norton, a vuoto, la corrente di corto-circuito passa tutta sulla resistenza equivalente, il generatore di corrente, a vuoto, eroga potenza.
Quindi i due circuiti in termini di caratteristiche sono equivalenti, $E_0 = R_{eq} \cdot J_{cc}$, ma in termini di potenze sono completamente diversi.

Vd. SLIDE da 12 a 15: "Trasformazione delle sorgenti"

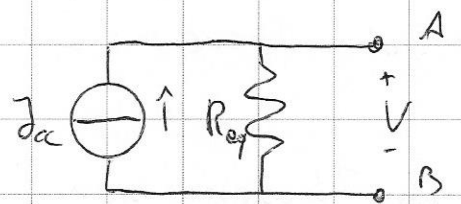
Si osserva che il fatto che i circuiti di Thevenin e di Norton siano equivalenti consente di risolvere le reti in un altro modo.
I due circuiti, di Thevenin e di Norton, sono equivalenti se $E_0 = R_{eq} \cdot J_{cc}$, ovvero la tensione a vuoto è uguale alla resistenza equivalente che moltiplica la corrente di cortocircuito.

Av. 10.7

Questo significa che se ho un ramo di un circuito fatto come segue



cioè ho un generatore di valore noto con una resistenza di valore noto, allora posso prendere questo ramo, toglierlo dal circuito e sostituirlo con un altro ramo formato da un generatore di corrente di grandezza pari a $\frac{E_0}{R_{eq}}$ in parallelo a una resistenza.



Si può cioè passare da uno schema all'altro, allo scopo di semplificare alcuni circuiti.

Vd. slide 12 e 13 per la trasformazione di un circuito di Thevenin in un circuito di Norton (a sx): in questo qualcosa è cambiato, le potenze ad es.; ma per il resto della rete nulla è cambiato.
Quindi la corrente I_2 rimane la stessa.
A destra, nel circuito, viene fatta una trasformazione da Norton a Thevenin, dove c'è a fine trasformazione $J R_4$.
Dal punto di vista di I_2, non è cambiato nulla.
Poi (vd. slide 14), R_1 e R_5 sono in parallelo, quindi ho una sola resistenza data dal parallelo di R_1 e R_5.
Si ottiene un circuito di Norton, che può essere ulteriormente trasformato in un circuito di Thevenin ottenendo un circuito con una sola maglia (vd. slide 15).
La corrente che passa in questa maglia è I_2;
R_2 è l'unica cosa non toccata, quindi questa resistenza

era e rimane I_2.

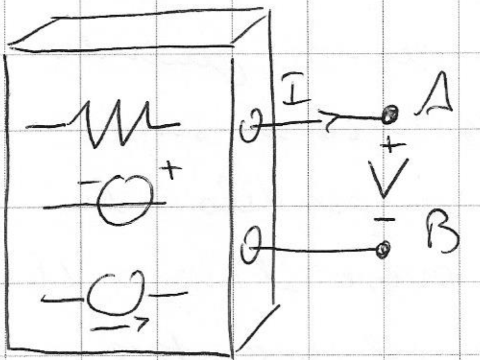
I_2 vale la differenza delle due tensioni dei generatori; differenza perché i due generatori hanno verso opposto nella maglia.

Il tutto diviso per la somma delle tre resistenze (in serie). Cioè:

$$I_2 = \frac{\dfrac{E\, R_1 /\!/ R_3}{R_1} - J R_4}{R_1 /\!/ R_3 + R_2 + R_4} = \frac{E R_3 - J R_4 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3)}$$

Questa metodologia di trasformazione può essere utile.

ATTENZIONE AI SEGNI



Inizialmente ai morsetti A-B, per quanto riguarda il circuito che voglio schematizzare con Thevenin o con Norton sto facendo la convenzione del generatore perché la corrente I dal lato del circuito da schematizzare va dal nodo A al nodo B.

Per il componente attaccato ai morsetti A-B si sta facendo la convenzione dell'utilizzatore.

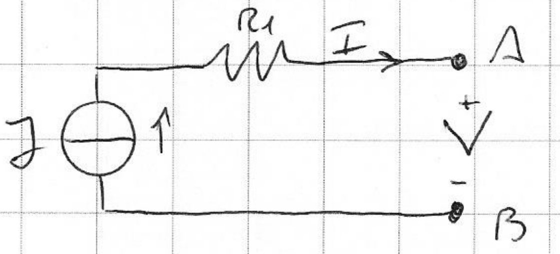
Tutto questo significa che quando vado a calcolare le tensioni a vuoto e le correnti di cortocircuito (vedi slide 16) tra i morsetti A-B devo usare la convenzione dell'utilizzatore, quindi si calcola la tensione a vuoto fissando un segno + e un segno −

allora, la corrente di corto circuito che devo andare a determinare dovrà andare dal + al - della tensione a vuoto che ho scelto.
Se faccio questo riferimento allora vale la relazione $E_0 = R_{eq} \cdot I_{cc}$.
Se inverto la corrente di cortocircuito allora devo mettere un - nella relazione sopra.
In sostanza, se è $E_0 = R_{eq} \cdot I_{cc}$ allora la corrente I_{cc} deve andare dal + al - della tensione a vuoto E_0, quindi devo fare la convenzione dell'utilizzatore ai morsetti visti dal componente che attacco ai morsetti.
Viceversa (vd. slide 17), quando faccio la trasformazione delle sorgenti, sui generatori sto facendo la convenzione del generatore e quindi, quando trasformo generatore di tensione e resistenza in serie in generatore di corrente e resistenza in parallelo, la corrente del nuovo generatore deve avere il verso che va dal - al +, la convenzione del generatore.
Idem nella trasformazione da generatore di corrente con resistenza in parallelo a generatore di tensione con resistenza in serie, il verso del generatore di tensione dovrà essere corrispondente al verso della corrente del generatore.

ATTENZIONE alle ECCEZIONI (Rare)
Non tutte le reti, anche se lineari, si possono caratterizzare sia tramite un circuito equivalente di Thevenin che di Norton (vd. slide 18)

11.10.10

Nell'enunciare il teorema di Thevenin si dice che una rete lineare può essere trasformata in un circuito equivalente composto da un generatore di tensione con una resistenza equivalente in serie oppure un generatore di corrente opportuno con una resistenza opportuna in parallelo.
Questo, in realtà, non vale sempre. Ci sono delle (rare) eccezioni. E sono casi particolari in cui non esiste il circuito equivalente di Thevenin oppure non esiste il circuito equivalente di Norton.
Un caso banale è il circuito seguente,



in cui il circuito equivalente di Thevenin non esiste, perché avremmo una resistenza equivalente infinita e una tensione a vuoto infinita per avere una corrente di valore finito.

Affinché esista l'equivalente di Thevenin, il circuito deve essere caratterizzabile su base corrente.
Analogamente affinché esista l'equivalente di Norton, il circuito deve essere caratterizzabile su base tensione.
Queste sono anche le ipotesi per la dimostrazione dei teoremi.

(Fine di tutti i metodi del regime stazionario)
Seguono circuiti in evoluzione dinamica

AV. 10.11

11.10.12

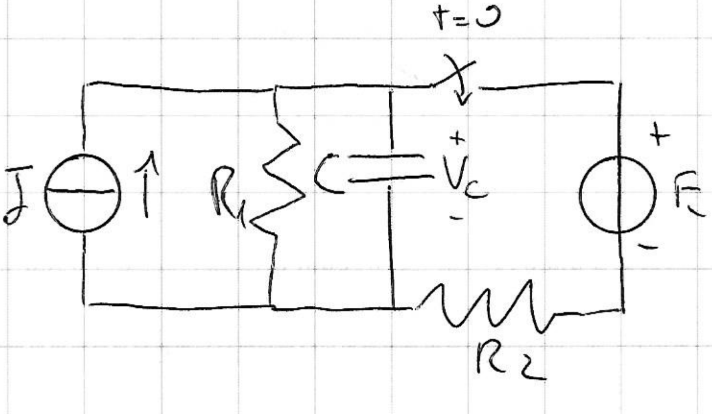
Aula Virtuale n. 1
42'17"
SOLUZIONI DI ESERCIZI

- prova del 13/01/2012   Transitorio del I° ordine   2 esercizi
-   Transitorio del II° ordine   1 esercizio

Reti in evoluzione dinamica

(anche in AS) Esercizio 1. Prova del 13/01/2012   Transitorio del I° ordine
L'interruttore si chiude all'istante $t = 0$. → Fatto appunto su AS

- Determinare la tensione ai capi del condensatore in ogni istante di tempo.



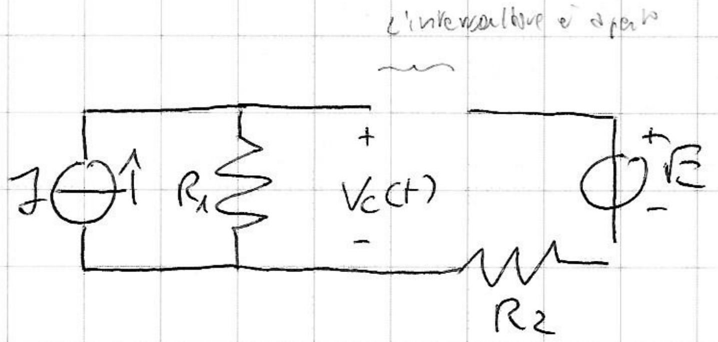
$J = 10\,A$
$E = 60\,V$
$R_1 = 8\,\Omega$
$R_2 = 12\,\Omega$
$C = 500\,\mu F$

Si tratta di un circuito con due generatori stazionari, un generatore di corrente (J), un generatore di tensione (E), due resistori (R_1 e R_2), un condensatore (C), un interruttore che, nell'istante $t = 0$, si chiude.
È chiesta la tensione V_C ai capi del condensatore in ogni istante di tempo.
Sono fornite le caratteristiche dei vari componenti.
Questo è un classico esercizio di un circuito in evoluzione dinamica con una procedura risolutiva schematica.

Nr. 20 1

Prima di tutto si risolve la rete per $t<0$, poi, da questo si ottengono le condizioni iniziali nell'istante di commutazione e successivamente si analizza la dinamica subito dopo l'istante di commutazione.

• RISOLUZIONE della RETE per $t<0$



Per $t<0$, supponendo i generatori sempre attivi, possiamo ragionevolmente supporre che la rete sia a regime, regime stazionario in quanto i generatori sono stazionari.

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto.

La risoluzione della rete è estremamente semplice perché la corrente J non può che passare attraverso il resistore R_1 e il generatore non alimenta nulla; la corrente J attraversa R_1 e la tensione ai capi di R_1 coincide con la tensione dei capi del condensatore V_C e vale $R_1 \cdot J$:

$$V_C(t) = R_1 \cdot J = 80\ V$$

Da questo otteniamo anche la condizione iniziale per il transitorio perché se sappiamo che la tensione V_C vale $80V$ per $t<0$, sapendo che V_C è una variabile di stato e quindi una grandezza continua, anche nell'istante 0 deve valere $V_C(0) = 80V$, che è la condizione iniziale per il transitorio.

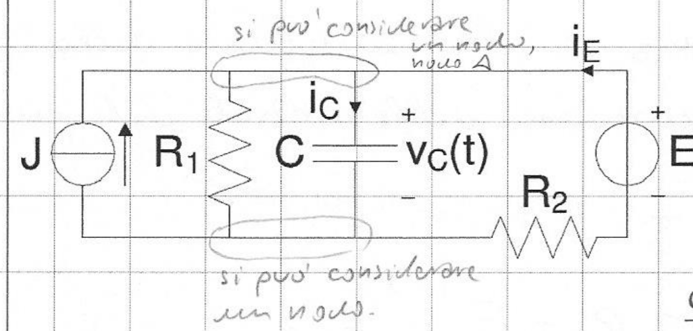
Da notare che ai capi dell'interruttore c'è comunque una tensione diversa da 0 e in particolare c'è la tensione E.

La caduta di tensione ai capi di R_2 è 0; la caduta di tensione E sta tutta ai capi dell'interruttore.

• Risoluzione del circuito per $t > 0$, evoluzione dinamica della rete. Le dinamiche sono del 1° ordine.

Si rimette il condensatore in quanto siamo interessati alla dinamica del circuito: all'interruttore mettiamo un corto-circuito, perché l'interruttore è chiuso.

• $t > 0$, evoluzione dinamica della rete.
Le dinamiche sono del 1° ordine.



LKC

$$\begin{cases} \dfrac{v_C}{R_1} + i_C - i_E = J & \text{LKC al nodo A} \\ R_2 i_E + v_C = E & \text{LKT alla maglia di AX} \\ i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} & \text{variabile di stato, equazione del singolo condensatore} \end{cases}$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} v_C = \frac{JR_2 + E}{CR_2}$$

4

Abbiamo una dinamica del 1° ordine perché abbiamo solo un condensatore.

Usando le leggi di Kirchhoff possiamo scrivere una sola LKC,

A) $\dfrac{v_C}{R_1} + i_C - i_E = J$ in cui $\dfrac{v_C}{R_1}$ è la corrente che passa attraverso il resistore;

e A) sarebbe in pratica la legge di Kirchhoff al nodo A dove concorrono la corrente J, la corrente attraverso il resistore R_1, pari a $\dfrac{v_C}{R_1}$, la corrente i_C e la corrente i_E.

Poi posso scrivere l'LKT alla maglia composta dal condensatore, dal resistore R_2 e dal generatore di tensione E. Quello che ottengo è

$$R_2 \cdot i_E + V_C = E$$ LKC alla maglia

Poi scrivo la caratteristica del condensatore, che lega i_C con v_C:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

Quindi sostituisco i_C nella prima espressione, mentre dalla seconda ricavo i_E e la sostituisco nella prima e ottengo una unica equazione differenziale del primo ordine in V_C.

$\frac{1}{\tau}$, τ è la costante di tempo

$$\frac{dv_C}{dt} + \boxed{\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}} v_C = \frac{J R_2 + E}{CR_2}$$

Risolvendo questa equazione differenziale con la condizione iniziale trovata andrò a determinare la dinamica che interessa.

Avendo l'equazione differenziale, per prima cosa risolvo l'omogenea associata. È una dinamica del 1° ordine quindi ovviamente l'unica possibile dinamica avrà soluzione

vd. coefficiente di v_C in questo caso e di i_L nel caso di un induttore

$v_{C0}(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}$, dove τ è la costante di tempo del transitorio che vale:

$(\approx K e^{-417t})$

$\frac{1}{2,4} \cdot 1000 = 417$ $\frac{1}{\tau}$ secondi!!!

$$\tau = \frac{CR_1R_2}{R_1+R_2} = 2,4 \text{ ms}$$

Quindi questa è la soluzione della omogenea.

~~$v_{C0}(t) = K e$~~

1V.20.4

La soluzione dell'integrale particolare la posso calcolare o dall'equazione differenziale o guardando il circuito a regime.

Se la voglio calcolare dall'equazione differenziale posso considerare che, visto che il comportamento è costante, posso ricercare la soluzione tra le costanti; quindi suppongo che l'integrale particolare sia una costante e sostituisco la costante all'interno dell'equazione differenziale e ottengo che l'integrale particolare vale

Ponendo $v_{cp}(t) = A$ = costante $\Rightarrow \frac{dv_c}{dt} = 0$, quindi $\frac{R_1+R}{CR_1R_2} \cdot A = \frac{JR_2+E}{CR_2} \Rightarrow A = v_{cp}(t) =$

$$\rightarrow v_{cp}(t) = R_1 \cdot \frac{JR_2 + E}{R_1 + R_2} = 72\,V \quad \underline{\underline{ok}}$$

Oppure, guardando il circuito a regime, devo determinare la tensione V_C.

Risolvo questo semplice circuito e ottengo questa espressione.

Quindi o dall'equazione differenziale o dal circuito a regime otteniamo che l'integrale particolare vale 72 V.

A questo punto, l'ultimo passaggio è quello di determinare la costante k di integrazione e per questo occorre imporre la condizione iniziale (non sulla omogenea!)

- Imponendo la condizione iniziale sulla soluzione totale

$$\begin{cases} V_C(t) = \underbrace{ke^{-417t}}_{\text{soluz. omogenea}} + \underbrace{72}_{\text{integrale particolare}} \\ V_C(0) = 80 \end{cases} \Rightarrow k = 8$$

AV. 20.5

Quindi, in conclusione

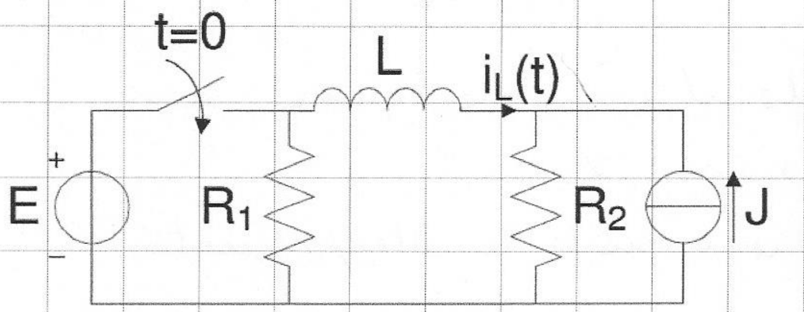
$$\underbrace{v_C(t)}_{\text{è una variabile di stato, quindi deve essere continua}} = \begin{cases} 80\,V, & t<0 \\ 8e^{-417t} + 72\,V, & t>0 \end{cases}$$

(Anche in A5) Esercizio. Prova del 16/01/2012

Anche in questo circuito abbiamo due generatori stazionari, uno di tensione e uno di corrente. Poi abbiamo due resistori, un induttore e un interruttore che si chiude nell'istante 0. Vengono fornite le caratteristiche.

L'interruttore si chiude nell'istante t = 0.

- Determinare la corrente che circola nell'induttore in ogni istante di tempo.

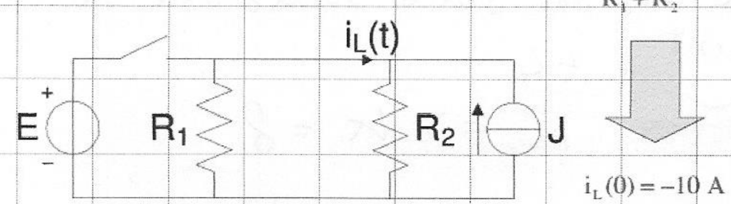


J = 20 A
E = 100 V
R_1 = 10 Ω
R_2 = 10 Ω
L = 10 mH

Per la soluzione di questo transitorio procediamo come fatto prima: risolviamo il circuito per $t<0$, prima dell'istante di commutazione (incomprensibile), determiniamo la condizione iniziale, scriviamo l'equazione differenziale che regola l'andamento dell'incognita per $t>0$, risolviamo l'equazione differenziale e infine imponiamo le condizioni iniziali.

- t < 0, rete a regime (stazionario).

$$i_L(t) = -J\frac{R_2}{R_1+R_2} = -10\text{ A}$$



$$i_L(0) = -10\text{ A}$$

Per $t<0$ il circuito è a regime, con l'interruttore aperto, per cui il generatore non ha effetto sul resto del circuito perché

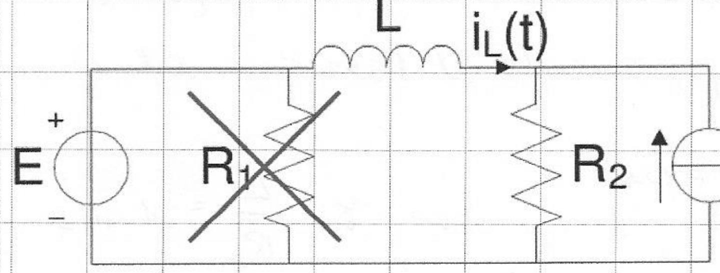
svolgiato e l'induttore si comporta come un corto circuito.
Quindi R_1 e R_2 sono in parallelo e, tramite un partitore di corrente, è semplice determinare la corrente i_L, ovvero

→ CORRENTE DI R_1 (R_2 al numeratore)

$$i_L(t) = -J \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = -10\,A \Rightarrow i_L(0) = -10\,A$$

Quindi ~~determiniamo~~ abbiamo determinato i_L per $t<0$; essendo essa una variabile di stato, abbiamo anche determinato i_L nell'istante di commutazione: $i_L(0)=-10\,A$, questa è la condizione iniziale.
Possiamo a questo punto considerare il circuito per $t>0$, in cui l'interruttore si chiude. Ci aspettiamo una dinamica del 1° ordine perché abbiamo un solo induttore.

- $t > 0$, evoluzione dinamica della rete.
  Le dinamiche sono del 1° ordine.



$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} + R_2 i_2 = E \\ i_L + J - i_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = \frac{E - R_2 J}{L}$$

Nel momento in cui l'interruttore si chiude, il generatore di tensione si trova in parallelo con il resistore R_1.
Questo significa che la tensione ai capi del resistore è bloccata, cioè è imposta, cioè è quella del generatore di tensione E e per questo, per quanto riguarda il resto del circuito (i_L, o la tensione ai capi del generatore, cioè tutte le grandezze che non riguardano E o R_1) la presenza di R_1 è ininfluente, e nelle equazioni non compariranno.

AV. 20.7

Sarebbe necessario ad es. se volessimo calcolare la corrente che circola nel generatore di tensione.

A questo punto, tolto R_1, abbiamo un circuito a due maglie.

Possiamo scrivere la LKT alla maglia che comprende E, L e R_2 ottenendo $L \dfrac{di_L}{dt} + R_2 i_2 = E$

Possiamo scrivere la LKC al nodo, dove c'è la +, abbiamo:

$$i_L + J - i_2 = 0$$

Sostituendo i_2 ricavata dalla seconda, nella prima, abbiamo una eq. differenziale del primo ordine, con incognita i_L:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = \frac{E - R_2 J}{L}$$

A questo punto determiniamo la soluzione dell'omogenea associata; essa sarà sempre dello stesso tipo, essendo il transitorio del 1° ordine:

$$i_{L0}(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = K e^{-1000t}, \quad \text{con } \tau = \frac{L}{R_2} = 1\ ms$$

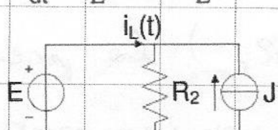
Calcoliamo ora l'integrale particolare, che lo possiamo ricavare o dall'equazione differenziale o direttamente dal circuito.

- **Soluzione dell'omogenea associata**

$$i_{L0}(t) = Ke^{-t/\tau} = Ke^{-1000t}, \qquad \text{con } \tau = \frac{L}{R_2} = 1\ \text{ms}$$

- **Integrale particolare**

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = \frac{E - R_2 J}{L}$$



$$i_{Lp}(t) = \frac{E}{R_2} - J = -10\ \text{A}$$

AV; 20.8

Calcolata la soluzione dell'omogenea associata e l'integrale particolare, si determina la costante di integrazione K.

· Imponendo la condizione iniziale sulla soluzione totale (NON SULL'OMOGENEA)

$$\begin{cases} i_L(t) = Ke^{-1000t} - 10 \\ \underbrace{i_L(0) = -10}_{\text{cond. iniziale}} \end{cases} \Rightarrow K = 0$$

· Quindi in conclusione

$$i_L(t) = -10\,A \quad \forall t$$

quindi alla chiusura dell'interruttore non c'è nessun transitorio.

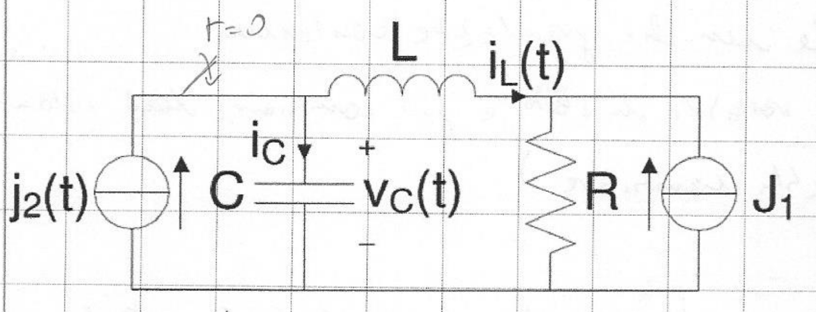
In pratica nella rete non succede nulla perché il generatore E assorbe potenza, ed in particolare proprio la stessa potenza che assorbiva R_1 prima della chiusura dell'interruttore. 22'30"

La commutazione non portava a nessuna dinamica all'interno del circuito.

Esercizio, transitorio del 2° ordine.

L'interruttore si chiude nell'istante $t=0$.

- Determinare la tensione ai capi del condensatore in ogni istante di tempo.



$J_1 = 20$ A

$$j_2(t) = \begin{cases} 0\text{ A}, & t<0 \\ 7\text{ A}, & t>0 \end{cases}$$

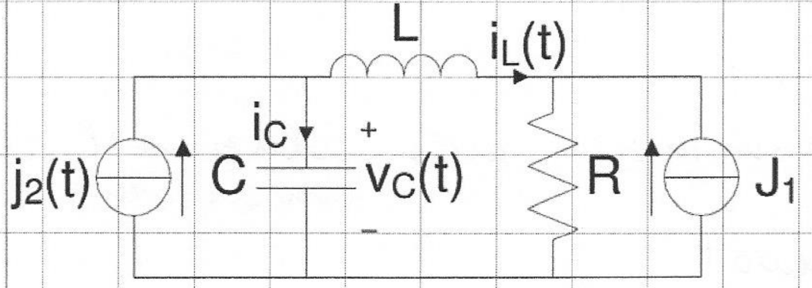
$R = 10\ \Omega$

$L = 10$ mH

$C = 625\ \mu$F

Av. 20.9

- Determinare la tensione ai capi del condensatore in ogni istante di tempo.



$J_1 = 20$ A

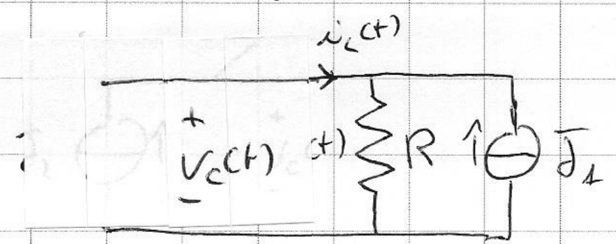
$j_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ A}, & t<0 \\ 7 \text{ A}, & t>0 \end{cases}$

$R = 10\ \Omega$

$L = 10$ mH

$C = 625\ \mu$F

Risolviamo la rete per $t<0$ rete a regime (stazionario).



Per $t<0$ l'interruttore è aperto, il condensatore si comporta come un circuito aperto, l'induttore si comporta come un cortocircuito.

$V_C(t) = R J_1 = 200$ V (tensione ai capi del resistore)

$i_L(t) = 0$ A

$v_C(0) = 200$ V

$i_L(0) = 0$ A

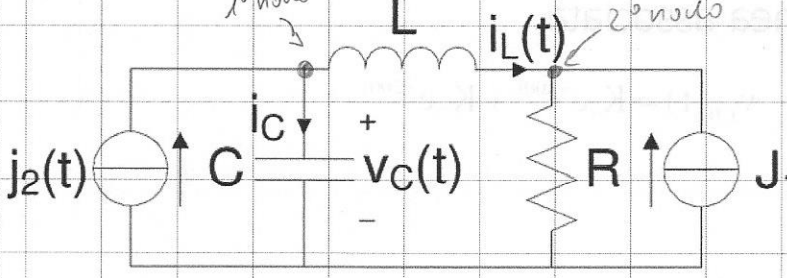
v_C e i_L sono le uniche variabili di stato del circuito e quindi sono le uniche grandezze continue (${i_C}$ non è una variabile di stato e può cambiare dall'istante 0^- a 0^+, anche v_L potrebbe cambiare).

Avendo determinato le due variabili di stato e quindi le due condizioni iniziali possiamo procedere alla soluzione del transitorio per $t \geq 0$.

AV. 20.10

Vediamo per $t > 0$.

- $t > 0$, evoluzione dinamica della rete.
  Le dinamiche sono del 2° ordine.



$$\begin{cases} C\dfrac{dv_C}{dt} + i_L = j_2 & \text{LKC al 1° nodo} \\ i_L + J_1 - i_R = 0 & \text{LKC al 2° nodo} \\ v_C - L\dfrac{di_L}{dt} - Ri_R = 0 & \text{LKT alla maglia che comprende C, L e R, scrivendo direttamente le caratteristiche dei componenti.} \end{cases}$$

sistema di 3 equaz in 3 incognite

Dato il sistema di partenza alcune delle incognite sono variabili di stato (v_C, i_L). Altre incognite non sono variabili di stato (i_R).

Prima cosa da fare è eliminare le variabili non di stato: ricavo i_R dalla seconda equazione e la sostituisco nella terza.

$$\begin{cases} C\dfrac{dv_C}{dt} + i_L = j_2 \\ L\dfrac{di_L}{dt} + Ri_L - v_C = -RJ_1 \end{cases}$$

ora abbiamo un sistema di due equazioni differenziali nelle due incognite che sono le variabili di stato, v_C e i_L.

eliminando, ricavando i_L dalla prima:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{R}{LC}(J_1 + j_2)$$

A questo punto, se voglio una equazione differenziale in V_c, dalla ~~seconda~~ ~~seconda~~ prima ricavo i_L, perché ho i_L non differenziato e sostituisco nella seconda, per cui compare i_L. ottengo una equazione differenziale solo in V_c; se l'esercizio chiedeva i_L, ricavavo V_c dalla seconda e sostituivo.

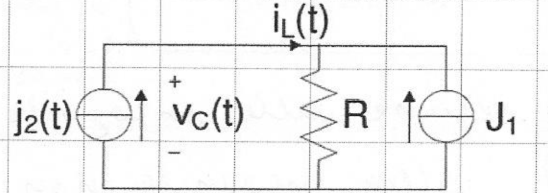
Da qui si passa alla soluzione della equazione differenziale: prima si risolve l'omogenea associata e, in questo caso avremo soluzioni reali e distinte del tipo $k_1 e^{-800t} + k_2 e^{-200t}$. Poi si risolve l'integrale particolare, che può essere risolto o dalla equazione differenziale o risolvendo la rete a regime.

- **Soluzione dell'omogenea associata**

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{C0}(t) = K_1 e^{-800t} + K_2 e^{-200t}$$

- **Integrale particolare**

$$\frac{dv_C^2}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{R}{LC}(J_1 + j_2)$$



$$v_{Cp}(t) = R(J_1 + j_2) = 270 \text{ V}$$

soluzione dell'integrale particolare, in entrambi i casi

A questo punto si procede come in precedenza.

- Si impongono le condizioni iniziali sulla soluzione totale. Sommo quindi alla omogenea associata l'integrale particolare.

$$v_C(t) = k_1 e^{-800t} + k_2 e^{-200t} + 270$$

$v_C(0) = 200$

$\frac{dv_C}{dt}(0^+) =$ da calcolare

Il transitorio del 2° ordine ha due condizioni iniziali.

- Calcoliamo la seconda condizione iniziale, ricavandola dalle leggi di Kirchhoff.

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} \underset{\text{per L. di Kirchhoff}}{=} \frac{j_2(0^+) - i_L(0^+)}{C} = 1200 \text{ V/m}$$

caratteristica del condensatore

proporzionale a i_C non è una variabile di stato. v_C lo è; i_L lo è. i_C per $t<0$ è 0

N.B.: $\frac{dv_C}{dt}(0^-) = 0 \neq \frac{dv_C}{dt}(0^+) = 1200$ V/m

Avendo un transitorio del 2° ordine, all'inizio è stato calcolato due variabili di stato ed entrambe devono essere sfruttate nell'imporre la condizione iniziale

$V_C(0)$ si usa per la prima condizione iniziale

La seconda condizione iniziale può dipendere da $V_C(0)$, ma deve sicuramente dipendere anche da $i_L(0)$, altrimenti non sarebbe sfruttata la seconda condizione iniziale.

- Quindi

$$\begin{cases} V_C(t) = K_1 e^{-800t} + K_2 e^{-200t} + 220 \\ V_C(0) = 200 \\ \dfrac{dV_C}{dt}(0^+) = 11200 \end{cases}$$

Per calcolare K_1 e K_2 occorre imporre

$K_1 + K_2 + 220 = 200$ (condizione $V_C(0) = 200$)

e $\dfrac{dV_C}{dt}(0^+) = 11200$, facendo la derivata di $K_1 \cdot e^{-800t} + K_2 e^{-200t} + 220$.

Alla fine troviamo $K_1 = \dfrac{14}{3}$ e $K_2 = -\dfrac{224}{3}$

- Per cui in definitiva abbiamo:

$$V_C(t) = \begin{cases} 200\,V & \text{per } t < 0 \\ \dfrac{14}{3} e^{-800t} - \dfrac{224}{3} e^{-200t} + 220\,V & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

AV. 20.13

Aula Virtuale 21

CIRCUITI del SECONDO ORDINE IN EVOLUZIONE DINAMICA

40'44"

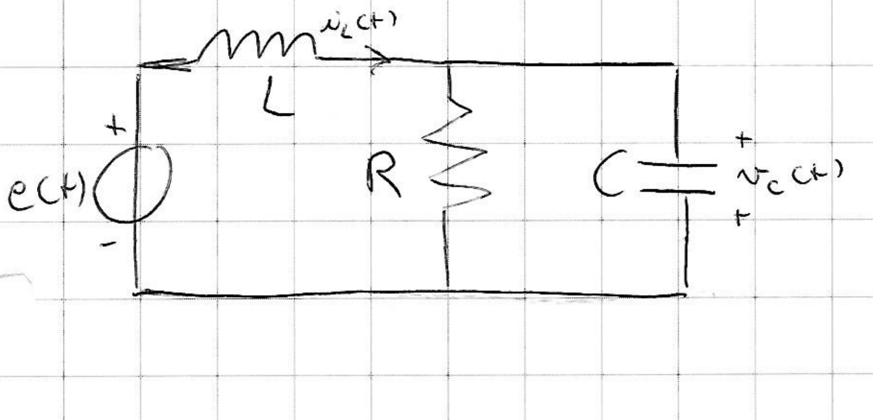
Prof Dario Assante

Per avere un circuito dinamico del secondo ordine si devono avere almeno due componenti dinamici, un condensatore e un induttore. Condizione necessaria ma non sufficiente.

Nel slide 2, quello a sinistra è un circuito con dinamiche del primo ordine, quello a destra è un circuito con dinamiche del primo ordine se il circuito si apre, del secondo ordine se il circuito si chiude.

- Solo le variabili di stato, i_L e v_C, sono continue in ogni istante di tempo.
  Le variabili v_L, i_C possono non essere continue e non sono variabili di stato.
- Come per il transitorio del primo ordine è presentata una scheda con uno schema logico per il transitorio del secondo ordine.

Esempio 1: determinare l'intensità di corrente $i_L(t)$ in ogni istante. La rete è a regime per $t<0$. Il generatore di tensione è costante nel tempo.



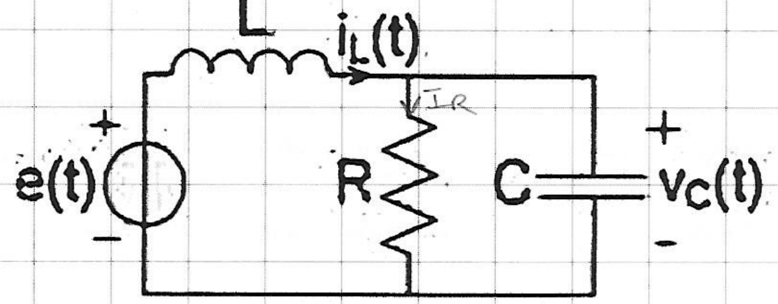
$$e(t) = \begin{cases} 10\,V, & t<0 \\ 20\,V, & t>0 \end{cases}$$

$R = 2\ \Omega$

$L = 4\ mH$

$C = 0{,}5\ mF$

Determinare l'intensità di corrente $i_L(t)$ in ogni istante.
- La rete è a regime per t<0.
- Il generatore di tensione è costante. = REGIME STAZIONARIO

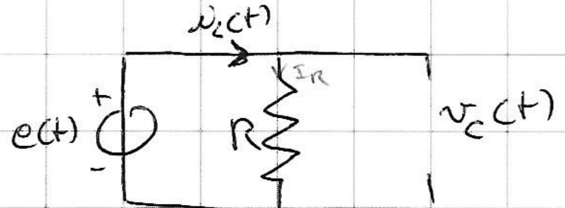


$$e(t) = \begin{cases} 10V, & t<0 \\ 20V, & t>0 \end{cases}$$

R = 2 Ohm
L = 4 mH $= 4 \cdot 10^{-3}$ H
C = 0.5 mF $= 0.5 \cdot 10^{-3}$ F

- Per prima cosa dobbiamo studiare la rete per $t<0$, capire cosa succede prima della commutazione, questo perché lo stato della rete per $t<0$ non è assegnato, viceversa questo passaggio poteva essere evitato.

La rete prima dell'istante di commutazione si suppone essere a regime e quindi l'induttore può essere sostituito da un corto circuito, il condensatore da un circuito aperto e quindi è immediato determinare



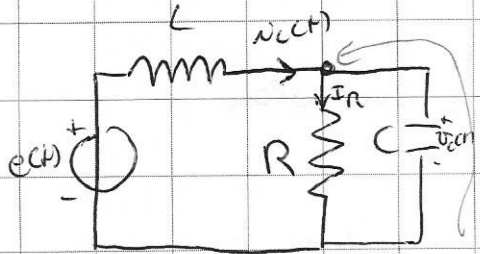
$$i_L(0^-) = \frac{e(0^-)}{R} = 5\,A$$

$$v_C(0^-) = e(0^-) = 10\,V$$

Una volta risolto il circuito per $t<0$, abbiamo le variabili di stato per $t<0$ e possiamo determinare anche lo stato per $t=0$ perché le variabili di stato devono essere continue, quindi

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 5\,A$$
$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 10\,V$$

- Prendiamo ora la rete completa e studiamola tramite le leggi di Kirchhoff.



$$e(t) - L\frac{di_L}{dt} - R i_R = 0$$ LKT

$$R i_R = v_C$$ alla 2ª maglia LKT

$$i_L - i_R - C\frac{dv_C}{dt} = 0$$ LKT

incognite: i_L, i_R e v_C ; i_L e v_C variabili di stato.

$$\begin{cases} e(t) - L\frac{di_L}{dt} - R i_R = 0 \\ R i_R = v_C \\ i_L - i_R - C\frac{dv_C}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e(t) - L\frac{di_L}{dt} - v_C = 0 \\ i_L - \frac{v_C}{R} - C\frac{dv_C}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\rightarrow$ prima eliminazione, i_R non è una variabile di stato

$$\Rightarrow i_L + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{e(t)}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{e(t)}{LCR}$$

SLIDE 10
12'

Si tratta ora di risolvere l'equazione differenziale.
Per prima cosa si risolve l'omogenea associata, che è

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$, sostituendo R, L, C, abbiamo

$$RC = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 10^{-3}$$

$$LC = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-6}$$

controllo dei segni!!! $\rightarrow$

$$\lambda^2 + 10^3\lambda + \frac{1}{2}10^6 = 0$$

i segni devono essere concordi e positivi.

$$\lambda = \frac{-10^3 \pm \sqrt{10^6 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^6}}{2} = \frac{-1000 \pm \sqrt{-10^6}}{2} =$$

$$= -\frac{1000 \pm j \cdot 1000}{2} = -500 \pm j\,500 \Rightarrow$$

soluzione complessa coniugata, la parte reale deve essere negativa, al più nulla

$$\lambda_1 = -500 - 500j$$
$$\lambda_2 = -500 + 500j$$ e quindi il risultato della omogenea è:

$$i_{L0}(t) = e^{-500t}\left[k_1 \operatorname{sen}(500t) + k_2 \cos(500t)\right],$$

con k_1 e k_2 costanti di integrazione, da determinare successivamente

AV 21 3

• Calcolati gli autovalori occorre calcolare l'integrale particolare.
Così come per i transitori del primo ordine ci sono due possibilità:

SOLUZIONE MATEMATICA
visto che il forzamento è una costante, si cerca l'integrale fra le costanti.
Posto $i_{Lp}(t) = A$, si sostituisce nella equazione differenziale e si trova

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dA}{dt} + \frac{A}{LC} = \frac{e(t)}{LCR}$$

al posto della corrente metto la costante, la derivata prima e la derivata seconda è nulla

$$\Downarrow$$

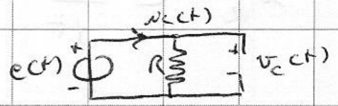
$$\frac{A}{LC} = \frac{e(t)}{LCR}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \frac{e(t)}{R}$$

metodo migliore

SOLUZIONE FISICA
Dal circuito. La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della equazione differenziale.



$$\underbrace{\boxed{i_{Lp}(t) = \frac{e(t)}{R} = 10A}}_{\text{Integrale particolare}}$$

Una volta determinato l'integrale particolare occorre fare il passaggio in più per il transitorio del secondo ordine.

Occorrono due condizioni iniziali: è 0 perché siamo in regime stazionario [18'31"]
il valore iniziale di i_L, che è in questo caso l'incognita
e il valore della derivata prima di $i_L(0)$, che non può essere ricavato dal circuito per $t<0$.
La sua determinazione avviene studiando il circuito, nell'istante 0^+.

• Dunque, per trovare la seconda condizione iniziale, nel caso di reti molto semplici basta scrivere le leggi di Kirchhoff. Nel nostro caso avevamo scritto

$$\begin{cases} e(t) - L\frac{di_L}{dt} - Ri_R = 0 \\ Ri_R = v_C \\ i_L - i_R - C\frac{dv_C}{dt} = 0 \end{cases}$$

per ~~calcolare~~ determinare l'eq. differenziale

AV21.4

Dalle leggi di Kirchhoff si può ricavare $\frac{di_L}{dt}$ in funzione dei generatori e delle variabili di stato.
In particolare, nella seconda si ricava $i_R = \frac{v_C}{R}$ e sostituendolo nella prima si può ricavare $\frac{di_L}{dt}$:

$$e(t) - L\frac{di_L}{dt} - v_C = 0 \implies$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{e(t) - v_C}{L}$$ che nell'istante 0^+ diventa

v_C è una variabile di stato, è funzione continua, quindi $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 10\,V$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{\overset{20\,V,\ dato}{e(0^+)} - v_C(0^+)}{\underset{= 4\cdot 10^{-3}\,H}{L}} = \frac{10\cdot 1000}{4} = 2500\ A/s$$

Quindi la derivata $\frac{di_L}{dt}$ nell'istante 0^+ vale $2500\ A/s$, che è diversa da $\frac{di_L}{dt}$ nell'istante 0^-, in cui vale zero.
Quindi è importante ricavare la derivata della corrente che non sempre è una funzione continua del circuito nell'istante 0^+, non deve essere ricavata supponendo che sia continua e valga come nell'istante 0^-.
Il calcolo della seconda condizione iniziale, $\frac{di_L}{dt}$, ha coinvolto anche l'altra variabile di stato perché quando mettiamo insieme la soluzione della omogenea e l'integrale particolare, che viene

$$i_L(t) = i_{Lo}(t) + i_{Lp}(t) = e^{-500t}\,[k_1 \operatorname{sen}(500t) + k_2 \cos(500t)] + 10$$

per trovare k_1 e k_2 poi dobbiamo porre le due condizioni iniziali, cioè $i_L(0) = 0$

e $\frac{di_L}{dt}(0^+) = 2500$

AV 21.5

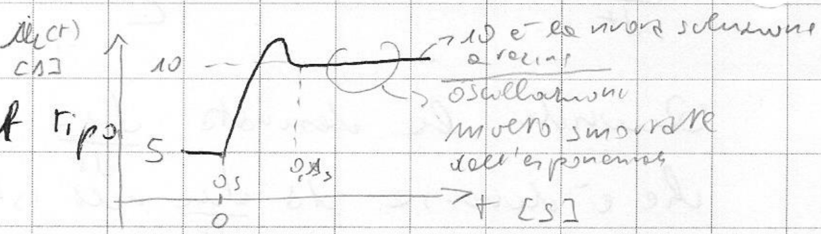
Notare che per trovare la seconda condizione iniziale è stata usata la seconda variabile di stato quindi, per determinare queste due condizioni iniziali abbiamo usato una volta i_L e una volta v_C.
Tutte e due le variabili di stato sono coinvolte nel calcolo delle condizioni iniziali.

All'imposizione delle condizioni iniziali determiniamo che

$$i_L(t) = -5e^{-500t}\cos(500t) + 10\ A$$

Attenzione: MAI IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI SOLO SULL'OMOGENEA!

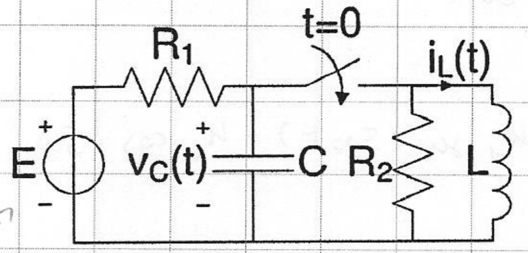
Il grafico di $i_L(t)$ è del tipo



Esercizio 2

Di tipo più complesso del precedente, ma con la stessa metodologia da usare. Questa tipologia di circuito ha delle dinamiche del 2° ordine quando l'interruttore si chiude (e tutto il circuito è collegato), mentre quando l'interruttore si apre, le dinamiche di v_C e i_L diventano indipendenti e sono del 1° ordine. Quindi, a seconda che l'interruttore si chiuda o si apra, le dinamiche sono del 2° o del 1° ordine.

Determinare l'intensità di corrente $i_L(t)$ in ogni istante.
- La rete è a regime per t<0.
- All'istante t=0 l'interruttore si chiude

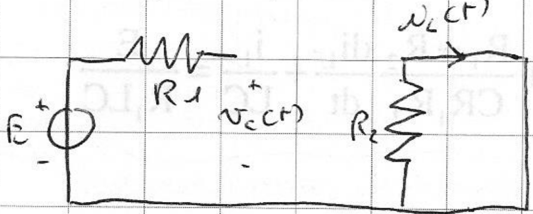


$E = 90\ V$
$R_1 = 3\ \Omega$
$R_2 = 6\ \Omega$
$L = 2.5\ mH$
$C = 0.1\ mF$

Generatore stazionario

In questo caso, volendo approfondire le dinamiche del 2° ordine, studiamo il transitorio di chiusura.

1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione.
   Studiamo il circuito per $t<0$: la rete è a regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito e il condensatore come un circuito aperto e, in più, l'interruttore è aperto, quindi il circuito è come sotto riportato:



attraverso R_1 non passa corrente, la tensione v_C è uguale a quella del generatore E; la corrente i_L è zero.

per $t<0$:

$v_C(t) = E$

$i_L(t) = 0$

2. Determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione.
   Visto che per $t<0$ la rete è in regime stazionario, le variabile di stato nell'istante di commutazione si determina banalmente, perchè per $t=0$ v_C e i_L avranno lo stesso valore che per $t<0$, quindi:
   per $t=0$, ovvero per $t=0^-$ e $t=0^+$, poichè v_C e i_L sono funzioni continue:

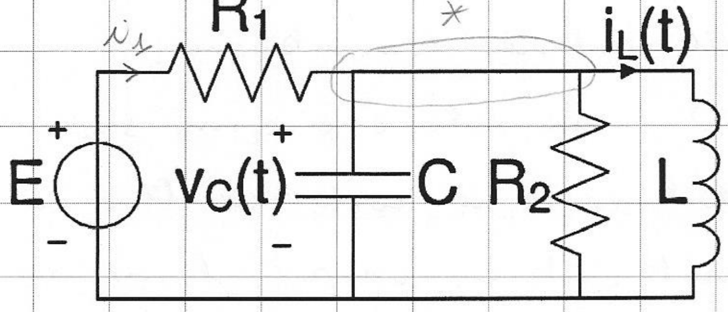
   $v_C(0) = E = 30\,V$

   $i_L(0) = 0\,A$

Una volta studiato il transitorio per $t<0$ andiamo a vedere cosa avviene una volta chiuso l'interruttore, con il circuito che si presenta.

3. Determinare l'equazione differenziale…

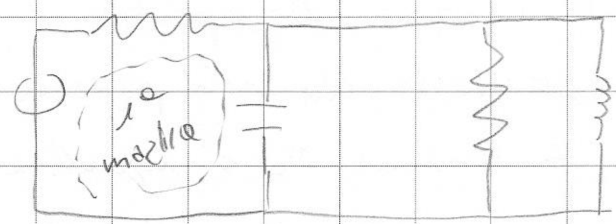
Una possibilità è quella di scrivere le leggi di Kirchhoff.



$$\begin{cases} E - R_1 i_1 - v_C = 0 & \text{LKT 1° maglia} \\ v_C = R_2 i_2 = L\dfrac{di_L}{dt} & \text{perché in parallelo} \\ i_1 - C\dfrac{dv_C}{dt} - i_2 - i_L = 0 & \text{LKC} \end{cases}$$

* correnti

$\Downarrow$ per sostituzione ricaviamo i_1 e i_2 e sostituiamo nelle terze



$$\underbrace{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{E}{R_1LC}}_{\text{Eq. differenziale che governa il transitorio}}$$

eq. diff. del secondo ordine

4. Risolvere l'omogenea associata

Per un transitorio del secondo ordine ci sono tre soluzioni possibili, da valutare caso per caso.

Nel nostro caso abbiamo:

$\frac{1}{2} \cdot 10^5 = 5000$

$\frac{1}{25 \cdot 10^{9}} = 4 \cdot 10^6$

$R_1 = 3\ \Omega$

$R_2 = 6\ \Omega$

$L = 2.5\ mH = 2.5 \cdot 10^{-3}\ H$

$C = 0.1\ mF = \frac{1}{10} \cdot 10^{-3}\ F$

$$\lambda^2 + \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow$$

$R_1+R_2 = 9$; $CR_1R_2 = \frac{1}{10^4} \cdot 18$; $LC = 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.1 \cdot 10^{-3}$

I segni devono essere tutti concordi, λ_1 e $\lambda_2 < 0$, gli autovalori devono avere la parte reale negativa o al più nulla

$$\lambda^2 + 5000\lambda + 40000 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-5000 \pm \sqrt{5000^2 - 4 \cdot 4000000}}{2} = \frac{-5000 \pm 3000}{2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = -4000 \\ \lambda_1 = -1000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ la soluzione dell'omogenea sarà del tipo

$$i_{L0}(t) = k_1 \cdot e^{-1000t} + k_2 \cdot e^{-4000t}$$

5. Determinare l'integrale particolare

SOLUZIONE MATEMATICA

Visto che il forzamento è una costante, si cerca l'integrale fra le costanti. Posto $i_{LP}(t) = A$, si sostituisce nell'eq. diff. e si trova

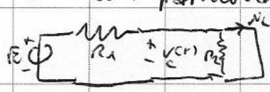
$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}\frac{dA}{dt} + \frac{A}{LC} = \frac{E}{R_1LC}$$

$\frac{d^2A}{dt^2} = 0$, $\frac{dA}{dt} = 0$

$f(A) = 0$ perché A è costante

SOLUZIONE FISICA

La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della eq. diff.



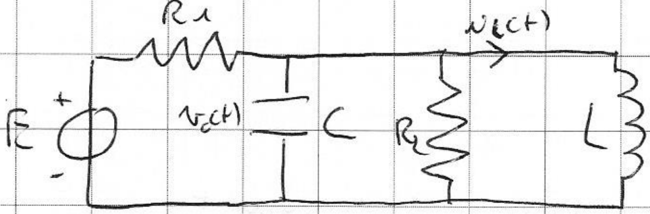
$$i_{LP}(t) = \frac{E}{R_1} = 30\,A$$

11.21.8

Nel circuito tutta la corrente circola nella maglia esterna e vale $\frac{E}{R_1}$.

6. Trovare la seconda condizione iniziale

Per farlo molto semplice basta scrivere le leggi di Kirchhoff



$$\begin{cases} E - R_1 i_1 - v_C = 0 \\ v_C = R_2 i_2 = L \dfrac{di_L}{dt} \\ i_1 - C \dfrac{dv_C}{dt} - i_2 - i_L = 0 \end{cases}$$

Non deve essere ricavata dalla derivata ~~[illegible]~~ di i_C in dt perché può anche essere continua!

Si deve ricavare nell'istante 0^+ guardando il circuito, ovvero dalle leggi di Kirchhoff, già scritte.

Dalla seconda abbiamo $v_C = L \frac{di_L}{dt}$ quindi $\frac{di_L}{dt}$ nell'istante 0^+ sarà uguale a v_C nell'istante 0^+ diviso L:

$$v_C = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{\overset{= 90V}{v_C(0^+)}}{\underset{= 25 \cdot 10^{-4} H}{L}} = 36000 \ A/s,$$

poiché v_C nell'istante 0^+ è conosciuto in quanto v_C è una funzione continua e quindi $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 90V$

Anche in questo caso abbiamo visto che la derivata prima $\frac{di_L}{dt}$ è una funzione discontinua in $t=0$ cioè nell'istante di commutazione (anche quella di $v_C(t)$ lo è, cioè anche la derivata di $v_C(t)$, come quella di $i_L(t)$, è discontinua nell'istante di commutazione, la vedremo di qui a poco esattamente uguale, con qualche passaggio in più)

7. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare
8. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione complessiva

A questo punto sommiamo la soluzione dell'omogenea

$i_{L0}(t) = k_1 e^{-1000t} + k_2 e^{-4000t}$

alla soluzione particolare

$i_{Lp}(t) = 30$

$$i_L(t) = i_{L0}(t) + i_{Lp}(t) = k_1 e^{-1000t} + k_2 e^{-4000t} + 30$$

e poi imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} i_L(t) = k_1 e^{-1000t} + k_2 e^{-4000t} + 30 \\ i_L(0) = 0 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = 3600 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 30 = 0 \Rightarrow k_1 = -k_2 - 30 \\ -1000 \cdot k_1 \cdot e^{-1000t} - 4000 k_2 e^{-4000t} = 36000, \text{ per } t = 0^+; \\ -1000 k_1 - 4000 k_2 = 3600 \end{cases}$$

$\Rightarrow -1000(k_2 - 30) - 4000 k_2 = 36000$

$-3000 k_2 = 6000 \Rightarrow k_2 = -2$

e $k_1 = -28$

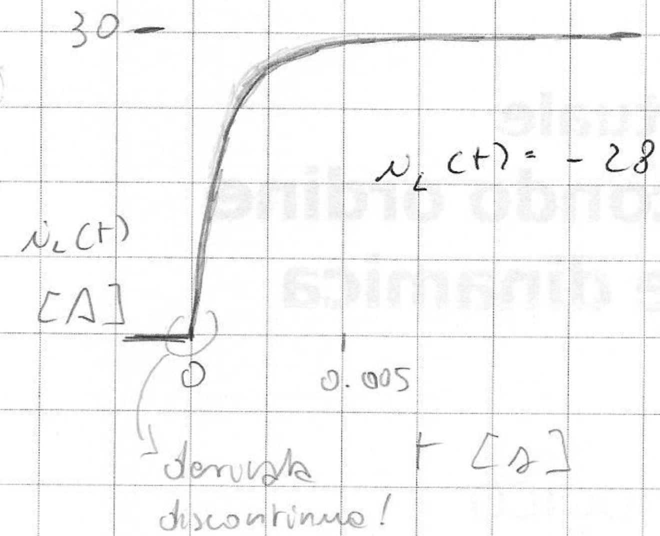
Da cui, avendo trovato le costanti di integrazione, abbiamo

$$i_L(t) = -28 e^{-1000t} - 2 e^{-4000t} + 30 \text{ A}$$

e questa è la soluzione del transitorio per $t \geq 0$.

Attenzione: NON IMPORRE MAI LE CONDIZIONI INIZIALI SULLA OMOGENEA

Il grafico di $i_L(t)$ è come segue:



Ricapitolando, fare attenzione ai seguenti punti:

1. I segni della omogenea associata devono essere sempre concordi.

2. Le variabili di stato devono essere sempre continue

3. Le derivate delle variabili di stato possono essere discontinue, quindi devono essere calcolate dalla rete dopo la commutazione ($t=0^+$)

- Domanda: calcolo della stima dello smorzamento

Risposta: per un transitorio del 2° ordine dipende dalla tipologia della soluzione:

1) autovalori complessi e coniugati $\Rightarrow$ durata smorzamento = parte reale dell'autovalore;

dall'omogenea

$\frac{1}{\text{parte reale autoval.}} = \tau$ = costante di tempo del transitorio, quindi 10 volte tale costante basta a dire che il transitorio è estinto.

2) autovalori reali e distinti $\Rightarrow$ prendere l'autovalore più grande, esso corrisponde alla costante di tempo, $\tau_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ e $\tau_2 = \frac{1}{\lambda_2}$

3) autovalori reali e coincidenti $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}$

- Transitorio del 1° ordine sarà del tipo

$e^{-\lambda t}$ ovvero $e^{\frac{t}{\tau}}$ con τ = costante di tempo, $\tau = \frac{1}{\lambda}$

11.21.11

Aula virtuale
Circuiti del secondo ordine in evoluzione dinamica

Schema logico

1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione (se necessario)
2. Determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione
3. Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento della variabile d'interesse dopo l'istante di commutazione
4. Risolvere l'omogenea associata
5. Determinare l'integrale particolare
6. Trovare la seconda condizione iniziale (dalla rete per $t > 0$)
7. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare per determinare la soluzione complessiva
8. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione complessiva per determinare le costanti d'integrazione

AV 21.12

Aula Virtuale 21.2

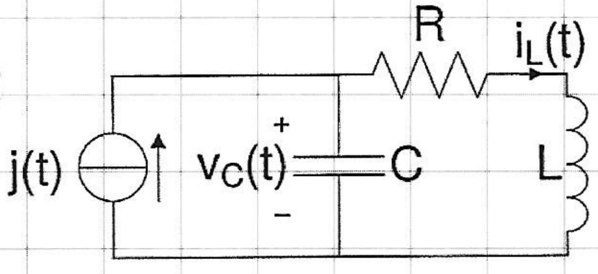
CIRCUITI DEL SECONDO ORDINE IN EVOLUZIONE DINAMICA - parte II

36'14"
Prof Dario Assante

ESERCIZIO 1 - prova del 18.07.2012

Determinare la tensione ai capi del condensatore in ogni istante.

- La rete è a regime per t<0.



$$j(t)=\begin{cases}-20\text{ A}, & t<0\\ 20\text{ A}, & t>0\end{cases}$$

$R = 15\ \Omega$

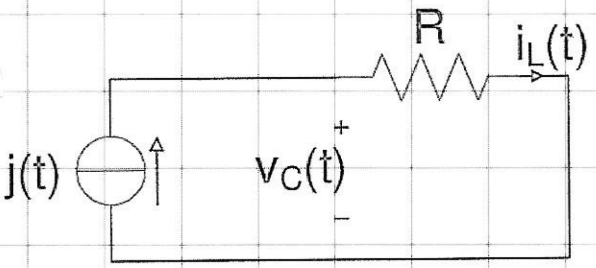
$L = 50$ mH

$C = 1$ mF

Il primo passo da fare è risolvere la rete per $t<0$, a questo punto saranno note le grandezze della rete. Quindi anche le variabili di stato, importanti perché continue nell'istante di commutazione e quindi valgono per 0^- e per 0^+

1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione

Per t<0 la rete è in regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito. (e il condensatore come un aperto)



$t<0 \Rightarrow$

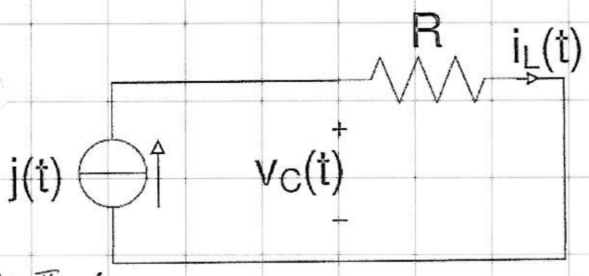
$i_L(t) = j(t) = -20$ A

$v_C(t) = R\,j(t) = -300$ V

i_L e v_C variabili di stato

2. Determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione

Visto che per t<0 la rete è in regime stazionario, le variabili di stato nell'istante di commutazione si determinano banalmente.



Istante 0^+

$i_L(0^-) = i_L(0^+) = -20$ A

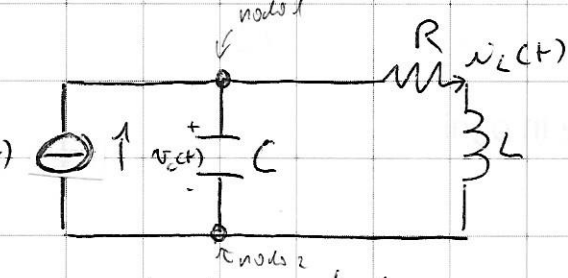
$v_C(0^-) = v_C(0^+) = -300$ V

le variabili di stato nell'istante di commutazione

Passiamo ~~allo~~ studio del circuito per $t \geq 0$.

3. Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento della variabile di interesse dopo l'istante di commutazione.

PER RETI MOLTO SEMPLICI BASTA SCRIVERE LE LEGGI DI KIRCHOFF.



La rete è composta da due maglie e due nodi

Le LKT da scrivere sono due, ma siccome alla prima maglia c'è un generatore di corrente quindi basta scrivere la LKT solo alla seconda maglia.

L'equazioni differenziali che regolano l'andamento della rete, che è in evoluzione dinamica

$$\begin{cases} C \dfrac{dv_C}{dt} + i_L = j & LKC \\ v_C = R i_L + L \dfrac{di_L}{dt} & LKT \end{cases}$$

sistema in due incognite, i_L e v_C.

Ricaviamo:

$$v_C = Rj - RC \frac{dv_C}{dt} - LC \frac{d^2 v_C}{dt^2}$$

da cui

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{R}{LC} j$$

eq. diff. del 2° ordine che regola il comportamento ~~del circuito~~ di v_C.

4. Risolvere l'omogenea associata, i cui segni devono essere concordi e tutti +

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

è 300, non 30!

$$\lambda^2 + 300\lambda + 20000 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 - 4 \cdot 20000}}{2} =$$

$$= \frac{-300 \pm 100}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -100 \\ \lambda_2 = -200 \end{cases}$$

Quindi

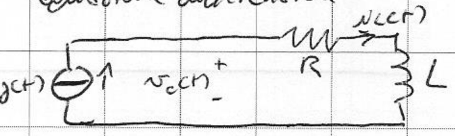
$$v_{C0}(t) = K_1 \cdot e^{-100t} + K_2 e^{-200t}$$

5. Determinare l'integrale particolare, con due possibilità

SOLUZIONE MATEMATICA
visto che il forzamento è una costante, si cerca l'integrale fra le costanti. Posto $v_{cp}(t) = A$, si sostituisce nell'equazione differenziale e si trova

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dA}{dt} + \frac{A}{LC} = \frac{R}{LC} j(t)$$

SOLUZIONE FISICA $t>0$
la soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della equazione differenziale



$$v_{cp}(t) = R\,j(t) = 300\ V$$

6. Trovare la seconda condizione iniziale

POICHÈ IL TRANSITORIO È DEL SECONDO ORDINE - la prima condizione è $v_C(0^+)$, la seconda è il valore della derivata di v_C in dt nell'istante 0^+, non ricavabile dal circuito per t<0. Per reti molto semplici basta scrivere le leggi di Kirchhoff

$$\begin{cases} C\dfrac{dv_C}{dt} + i_L = j \\[2ex] v_C = R i_L + L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases}$$

dalla prima eq si ricava che $\dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{j - i_L}{C}$, quindi otteniamo che

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{\overset{20A}{j(0^+)} - \overset{-20A}{i_L(0^+)}}{\underset{}{C}} = 40000\ A/s$$

la derivata di $v_C(t)$ è discontinua in $t=0$.

7. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare
8. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione complessiva (NON SULLA OMOGENEA!)

Cioè $v_C(t) = v_{cp}(t) + v_{co}(t) = 300 + k_1 e^{-100t} + k_2 e^{-200t}$

e quindi

$$\begin{cases} v_C(t) = 300 + k_1 e^{-100t} + k_2 e^{-200t} \\ v_C(0) = -300 \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0^+) = 40000 \end{cases}$$

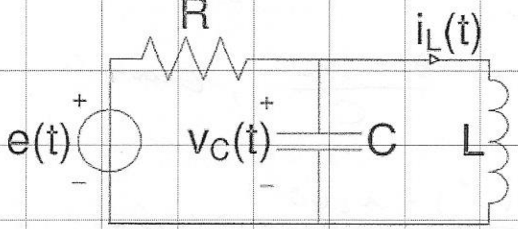
Da cui ricaviamo

$$v_C(t) = -800\, e^{-100t} + 200\, e^{-200t} + 300 \text{ V}$$

ESERCIZIO 2. Prova del 13.07.2012

Determinare la corrente che attraversa l'induttore in ogni istante.

- La rete è a regime per t<0.



$$e(t) = \begin{cases} -50 \text{ V}, & t<0 \\ 50 \text{ V}, & t>0 \end{cases}$$

$R = 2\ \Omega$

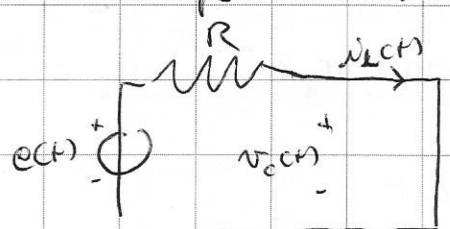
$L = 1$ mH

$C = 1$ mF

Il generatore di tensione cambia valore nell'istante 0.

1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione.

Per t<0 la rete è in regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito; v_C è zero, poiché condensatore si comporta come un circuito aperto



$$i_L(t) = \frac{e(t)}{R} = -25 \text{ A}$$

$$v_C = 0 \text{ V}$$

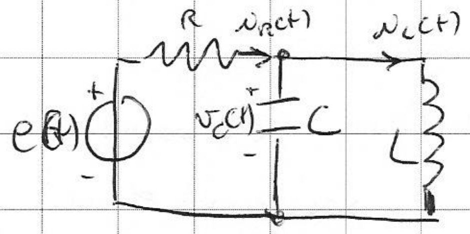
2. Determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione

$$\left.\begin{aligned} i_L(0^-) &= i_L(0^+) = -25 \text{ A} \\ v_C(0^-) &= v_C(0^+) = 0 \text{ V} \end{aligned}\right\}$$ per la proprietà di continuità

A questo punto studiamo la rete per $t \geq 0$

3. Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento della variabile di interesse dopo l'istante di commutazione

PER RETI MOLTO SEMPLICI SONO SUFFICIENTI LE LEGGI DI KIRCHHOFF.



Un circuito con due nodi e due maglie

$$\begin{cases} e(t) - R\, i_R = v_C = L \dfrac{d i_L}{dt} \\ i_R = i_L + \underbrace{C \dfrac{d v_C}{dt}}_{= i_C} \end{cases}$$

* LKT alla 1ª maglia

LKT alla 2ª maglia

LKC (equivalente al primo o al secondo nodo)

var non di stato

Abbiamo tre equazioni in tre incognite, i_R, i_L e v_C. Per prima cosa eliminiamo quella che non è variabile di stato, i_R: la prendiamo dalla seconda equazione e la sostituiamo nella prima; poi, usando $v_C = L \dfrac{d i_L}{dt}$ otteniamo una unica equazione in funzione di i_L:

$$e(t) - R\, i_L - RCL \frac{d^2 i_L}{dt^2} = L \frac{d i_L}{dt}$$ che, risistemata, è:

$$\frac{d^2 i_L}{dt} + \frac{1}{RC} \frac{d i_L}{dt} + \frac{1}{CL} i_L = \frac{e(t)}{RCL}$$ un eq. differenziale del 2° ordine, in funzione di i_L.

4. Risolvere l'omogenea associata

$$\lambda^2 + \overbrace{\frac{1}{RC}}^{500} \lambda + \overbrace{\frac{1}{LC}}^{10^6} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 500\lambda + 10^6 = 0$$

$$\lambda = \frac{-500 \pm \sqrt{500^2 - 4 \cdot 10^6}}{2} = \frac{-500 \pm \sqrt{-3750000}}{2} \simeq$$

$$\simeq \frac{-500 \pm j1936}{2} \simeq \lambda_{1,2} = -250 \pm 968j$$

$$\lambda_{1,2} = -250 \pm 968\,j \Rightarrow \text{(complessi coniugati)} \Rightarrow$$

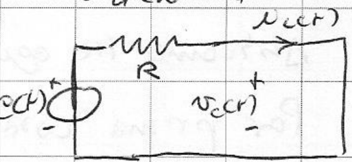
$$i_{L0}(t) = e^{-250t}\left[K_1 \,\text{sen}(968t) + K_2 \cos(968t)\right]$$

soluzione della omogenea; K_1 e K_2 costanti di integrazione da determinare

5. Determinare l'integrale particolare (2 possibilità)

SOLUZIONE MATEMATICA
visto che il forzamento è una costante, si cerca l'integrale fra le costanti. Posto $i_{LP}(t) = A$ si sostituisce nell'equazione differenziale e si trova

SOLUZIONE FISICA
la soluzione a regime sola della rete è una soluzione particolare della equaz. differenziale



$$\frac{d^2A}{dt} + \frac{1}{RC}\frac{dA}{dt} + \frac{A}{LC} = \frac{e(t)}{RLC}$$

$$i_{LP}(t) = \frac{e(t)}{R} = 25\,A$$

6. Trovare la seconda condizione iniziale
Per reti molto semplici basta scrivere le leggi di Kirchhoff.

$$\begin{cases} e(t) - R i_R = v_C = L \dfrac{di_L}{dt} \\ i_R = i_L + C \dfrac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_C}{L} \Rightarrow$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{L} = 0\ A/s$$

Quindi la derivata di $i_L(t)$ è continua in $t=0$.

7. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare

8. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione complessiva

$$v_L(t) = v_{Lp}(t) + v_{Lo}(t) = 25 + e^{-250t}\,[K_1 \operatorname{sen}(968t) + K_2 \cos(968t)]$$

e quindi

$$\begin{cases} v_L(t) = 25 + e^{-250t}\,[K_1 \operatorname{sen}(968t) + K_2 \cos(968t)] \\ v_L(0) = -25 \\ \dfrac{dv_L}{dt}(0^+) = 0 \end{cases}$$

ponendo $v_L(0) = -25 \Rightarrow K_2 = 50$

ponendo $\dfrac{dv_L}{dt}(0^+) = 0$, abbiamo, per passaggi:

$$\frac{dv_L}{dt} = 0 - 250\,e^{-250t}\,[K_1 \operatorname{sen}(968t) + K_2 \cos(968t)] + e^{-250t} \cdot [K_1 \cdot 968 \cdot \cos(968t) - K_2 \cdot 968 \cdot \operatorname{sen}(968t)]$$

e quindi per $t = 0^+$:

$$-250 \cdot [K_2] + K_1 \cdot 968 = 0 \Rightarrow$$

$$K_1 = \frac{50 \cdot 250}{968} \simeq 12{,}9 \quad \text{da cui}$$

$$v_L(t) = 25 + e^{-250t}\,[12.9 \operatorname{sen}(968t) + 50 \cos(968t)] \text{ A}$$

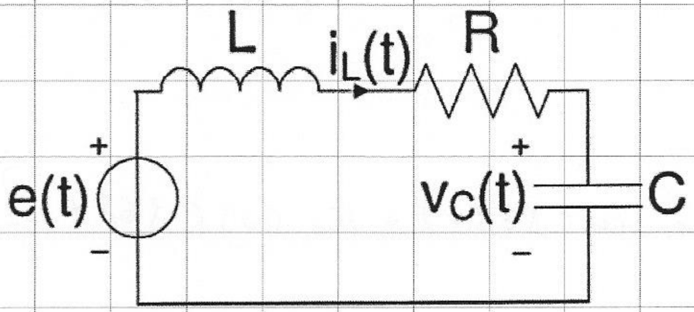
→ soluzione finale.

AV 21 - II. 7

Esercizio 3. Prova del 20.07.2012

Determinare la corrente che attraversa l'induttore in ogni istante.

- La rete è a regime per t<0.



$$e(t) = \begin{cases} 20\ \text{V}, & t<0 \\ 0\ \text{V}, & t>0 \end{cases}$$ (si spegne all'istante 0)

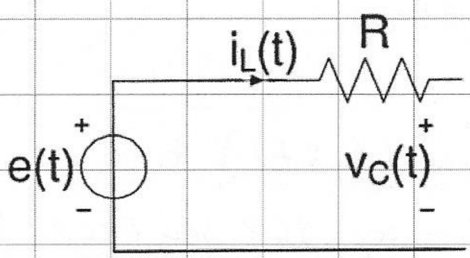
$R = 1\ \Omega$

$L = 1\ \text{mH}$

$C = 1\ \text{mF}$

1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione.

Per t<0 la rete è in regime stazionario (tensioni continue), quindi l'induttore si comporta come un corto circuito.
Il condensatore si comporta come un circuito aperto



$$\left.\begin{aligned} i_L(t) &= 0\ \text{A} \\ v_C(t) &= e(t) = 20\ \text{V} \end{aligned}\right\} \text{per } t<0$$

2. Determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione

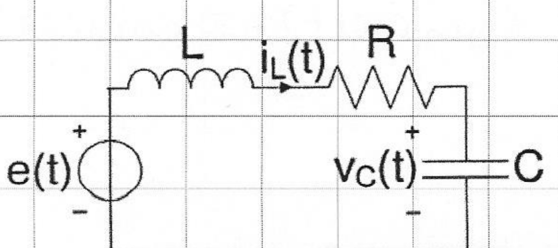
Poiché per t<0 la rete è in regime stazionario, le variabili di stato nell'istante di commutazione si determinano facilmente.

$i_L(0^-) = i_L(0) = 0$ A

$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 20$ V

3. Determinare l'equazione differenziale che regola ...

Per reti molto semplici basta scrivere le leggi di Kirchhoff. andando a studiare la rete per t>0



$$\begin{cases} e(t) - L\dfrac{di_L}{dt} - Ri_L - v_C = 0 & \text{LKT} \\ i_L = C\dfrac{dv_C}{dt} & \text{LKC} \end{cases}$$

↳ questa corrente, che attraversa l'induttore è anche uguale a quella che attraversa il condensatore e che vale $C\frac{dv_C}{dt}$

una unica

AV21-II.8

A questo punto siamo in grado di determinare l'equazione differenziale

$$i_L = C\frac{d\,e(t)}{dt} - LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} - RC\frac{d i_L}{dt}$$ che diventa

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d i_L}{dt} + \frac{1}{CL}i_L = \frac{1}{L}\frac{d\,e(t)}{dt}$$

4. Risolvere l'omogenea associata

$$\lambda^2 + \frac{\overset{=1\Omega}{R}}{\underset{1mH}{L}}\lambda + \frac{1}{\underset{1mF\ \ 1mH}{CL}} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1000\lambda + 10^6 = 0 \Rightarrow$$

attenzione ai segni, quindi, la parte reale di λ deve essere!

$$\lambda = \frac{-1000 \pm \sqrt{1000^2 - 4\cdot 10^6}}{2} = \frac{-1000 \pm \sqrt{-3\cdot 10^6}}{2} \approx \frac{-1000 \pm 1732j}{2}$$

quindi

$$\lambda_{1,2} = -500 \pm 866j \Rightarrow$$

$$i_{L0}(t) = e^{-500t}\left[k_1 \operatorname{sen}(866t) + k_2 \cos(866t)\right]$$

↳ soluzione dell'omogenea

5. Determinare l'integrale particolare (2 possibilità)

SOLUZIONE MATEMATICA

SOLUZIONE FISICA

$i_{LP}(t) = A$

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dA}{dt} + \frac{A}{LC} = \frac{1}{C}\frac{d\,\overset{\text{costante}}{(e(t))}}{dt} = 0$$

$$i_{LP}(t) = 0\ A$$

6. Trovare la seconda condizione iniziale

$$\begin{cases} e(t) - L \dfrac{di_L}{dt} - R i_L - v_C = 0 \\ i_L = C \dfrac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{e(0^+) - R i_L(0^+) - v_C(0^+)}{L} =$$

$$= -20000 \text{ A/s}$$

Quindi la derivata di $i_L(t)$ è discontinua in $t=0$

7. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare
8. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione complessiva.

In questo caso particolare la soluzione complessiva coincide con l'omogenea

$i_L(t) = i_{LP}(t) + i_{LO}(t) = e^{-500t}[k_1 \operatorname{sen}(866t) + k_2 \cos(866t)]$

e quindi

$$\begin{cases} i_L(t) = e^{-500t}[k_1 \operatorname{sen}(866t) + k_2 \cos(866t)] \\ i_L(0) = 0 \\ \dfrac{d i_L}{dt}(0^+) = -20000 \text{ A} \end{cases}$$

Quindi $\quad i_L(t) = \underset{k_1}{23{,}1}\, e^{-500t} \operatorname{sen}(866t)$ A

$k_2 = 0$

Aula Virtuale 22.1

ESERCIZI CON GENERATORI SINUSOIDALI

40'04''

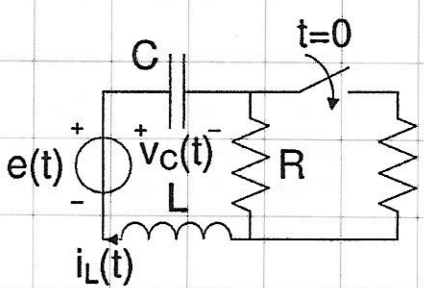
Prof. Dario Assante

Esercizio 1

Transitorio con forzamento sinusoidale

L'interruttore si chiude nell'istante t = 0.

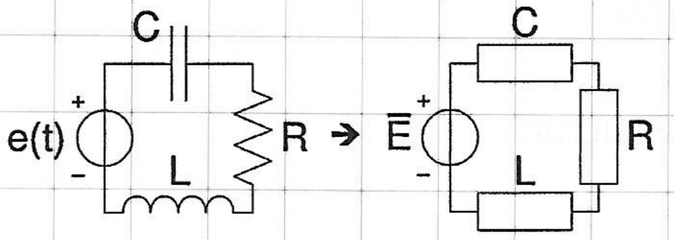
- Determinare in ogni istante di tempo l'intensità di corrente che attraversa l'induttore.



$e(t) = 160\cos(500t)$ V
$R = 8\ \Omega$
$C = 2$ mF
$L = 2$ mH

1. Transitorio prima dell'istante di commutazione

- t < 0, rete a regime (**sinusoidale**). → **FASORI!**



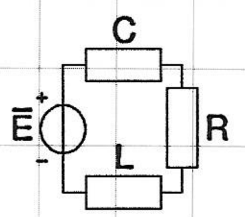
$\bar{E} = 160$
$Z_R = 8$
$Z_C = -j$
$Z_L = j$ } perché in serie

↓

RISONANZA!

2. Le variabili di stato nell'istante di commutazione

Prima si risolve con i fasori



$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}}{Z_R + Z_L + Z_C} = 20$$ → somma delle impedenze

$$\bar{V}_C = Z_C \bar{I}_L = -20j$$

Poi si ritorna nel tempo

$i_L(t) = 20\cos(500t)$ A
$v_C(t) = 20\mathrm{sen}(500t)$ V

t<0

Condizioni iniziali, t=0

$i_L(0) = 20$ A
$v_C(0) = 0$ V

i_L e v_C sono le variabili di stato.

Il transitorio è un fenomeno di commutazione all'interno di una rete, che può essere alimentata con generatori sinusoidali, come in questo caso. Il forzamento può essere costante stazionario, come in aule virtuali precedenti stessa procedura.

Per t<0 l'interruttore è aperto quindi occorre risolvere la rete, che è a regime, di tipo sinusoidale e si risolve con i fasori.

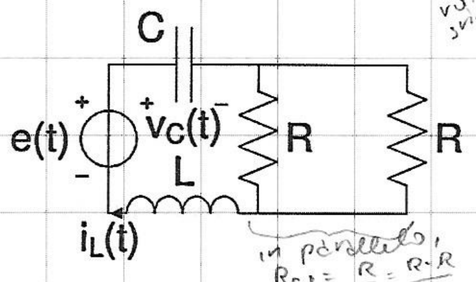
Z_L e Z_C sono in serie e, avendo una impedenza uguale e opposta sono in risonanza serie, che può essere usata per risolvere il circuito.

Il circuito ha una sola maglia.

Studio del transitorio

3. Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento del circuito.

- $t > 0$, evoluzione dinamica della rete.
  Le dinamiche sono del 2° ordine.



in parallelo, $R_{eq} = \frac{R}{2} = \frac{R \cdot R}{2R}$

vd. svolto

$$\begin{cases} v_C + \frac{R}{2} i_L + L\frac{di_L}{dt} = e(t) \\ i_L = C\frac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

Leggi di Kirchhoff, LK

combinazione delle LK

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{2L}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \boxed{\frac{1}{C}\frac{de(t)}{dt}}$$

Rappresentativo del forzamento

eq. diff del 2° ordine che regola il comportamento del circuito in funzione di i_L.

4. Risolvere l'omogenea associata

•Soluzione dell'omogenea associata.

$$\lambda^2 + \frac{R}{2L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -1000 \pm 500\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\; \lambda_1 \approx -134, \lambda_2 \approx -1866 \;\Rightarrow\; i_{L0}(t) = K_1 e^{-134t} + K_2 e^{-1866t}$$

L'omogenea associata non tiene conto del forzamento, che compare nel secondo membro della eq. diff, il termine noto.

•**ATTENZIONE** AI SEGNI DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA! SE NON SONO TUTTI CONCORDI, E' STATO CERTAMENTE FATTO UN ERRORE NEL CALCOLO DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE (GLI AUTOVALORI NON RISULTEREBBERO A PARTE REALE NEGATIVA).

Gli autovalori devono avere la parte reale negativa (vale per tutti i tipi di transitori).

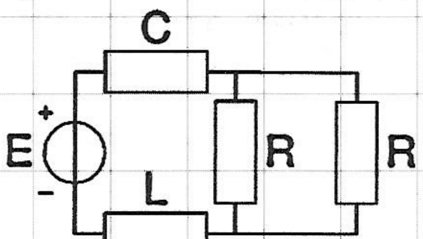
5. Determinare l'integrale particolare

Soluzione particolare: 2 POSSIBILITA'

1. **Soluzione fisica** → per $t>0$

La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della equazione differenziale. Si trova ancora con i FASORI

Si deve tener conto che il generatore è sinusoidale, quindi la rete a regime sarà in regime sinusoidale e dovrà essere risolta con i fasori.



$$\bar{I}_{Lp} = \frac{\bar{E}}{Z_R/2 + Z_L + Z_C} = 40$$

$$i_{Lp}(t) = 40\cos(500t)\ \text{A}$$

2. **Soluzione matematica**

Il forzamento è sinusoidale, si cerca l'integrale come COMBINAZIONE LINEARE di funzioni sinusoidali. Posto $i_{Lp}(t) = A\cos(500t) + B\,\text{sen}(500t)$, si sostituisce nell'equazione differenziale e poi

$$-(500)^2[A\cos(500t) + B\,\text{sen}(500t)] - (2000)(500)[A\,\text{sen}(500t) - B\cos(500t)] +$$
$$+ 250000[A\cos(500t) + B\,\text{sen}(500t)] = -(500)(500)160\,\text{sen}(500t)$$

dalla sostituzione nella equazione differenziale

$$\begin{cases} -(500)^2 A + 1000000B + 250000A = 0 \\ -(500)^2 B - 1000000A + 250000B = 4\cdot 10^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 40 \end{cases} \Rightarrow$$

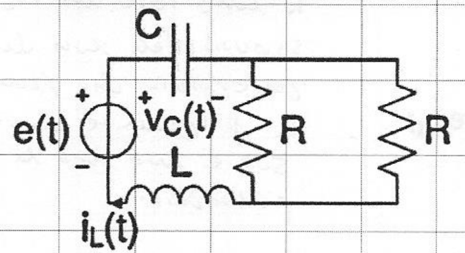
$$\Rightarrow\; i_{Lp}(t) = 40\cos(500t)$$

integrale particolare

Prima si considerano tutti i termini in coseno: la somma dei coefficienti davanti ai termini in coseno deve essere 0, perché nel termine noto non c'è termine in coseno. La somma dei coefficienti in seno deve valere il coefficiente in seno del termine noto.

6. Trovare la seconda condizione iniziale

- Seconda condizione iniziale: basta scrivere le LK.



$$\begin{cases} v_C + \frac{R}{2} i_L + L\frac{di_L}{dt} = e(t) \\ i_L = C\frac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

LKT alla maglie

$$\boxed{\frac{di_L}{dt}(0^+) = -\frac{1}{L}v_C(0) - \frac{R}{2L}i_L(0) + \frac{e(0)}{L} = 40000\ \mathrm{A/s}}$$

7. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare per ottenere la soluzione totale

8. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione totale

- Imponendo la condizione iniziale sulla soluzione totale

$$\begin{cases} i_L(t) = K_1 e^{-134t} + K_2 e^{-1866t} + 40\cos(500t) \\ i_L(0) = 20 \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = 40000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 \approx 1.55 \\ K_2 \approx -21.55 \end{cases}$$

(soluzione totale, $i_L(t) = i_{LO}(t) + i_{LP}(t)$)

(1ª condizione iniziale)

(2ª condizione iniziale)

- Quindi, in conclusione

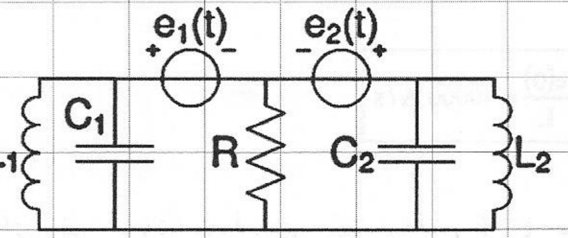
$$\boxed{i_L(t) = \begin{cases} 20\cos(500t)\ \mathrm{A}, & t<0 \\ 1.55e^{-134t} - 21.55e^{-1866t} + 40\cos(500t)\ \mathrm{A}, & t>0 \end{cases}}$$

AV 22 3

Generatori non isofrequenziali

È una rete in regime sinusoidale con due generatori che funzionano a frequenze diverse, 500 e 1000 sono le due pulsazioni.

Determinare:
- **la potenza media assorbita dal resistore R e dall'induttore L_1;**
- **la potenza istantanea erogata dal generatore $e_1(t)$.**



$e_1(t) = 80\cos(500t)$ V
$e_2(t) = 40\cos(1000t)$ V
~~**R = 2 Ω**~~ R = 2 Ω
C1 = 1 mF
C2 = 4 mF
L1 = 1 mH
L2 = 1 mH

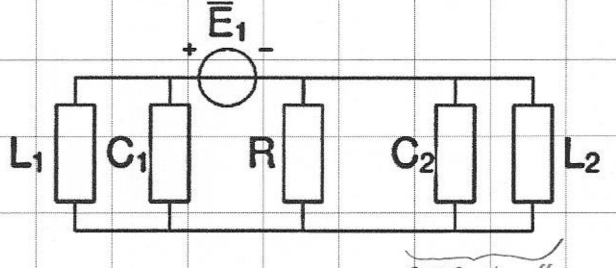
I GENERATORI NON SONO ISOFREQUENZIALI. SI DEVE UTILIZZARE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PRIMA DI INTRODURRE I FASORI perché i fasori si possono usare quando le grandezze sono isofrequenziali.

ATTENZIONE: LA FREQUENZA CAMBIA IN OGNI SOTTOCIRCUITO, QUINDI LE IMPEDENZE SI DEVONO RICALCOLARE IN OGNI SOTTOCIRCUITO, perché esse cambiano.

E i fasori non si possono sommare, si possono sommare solo le grandezze nel tempo.

Primo sottocircuito

Generatore $\bar{E}_1$ e impedenze calcolate in base alla pulsazione 500.

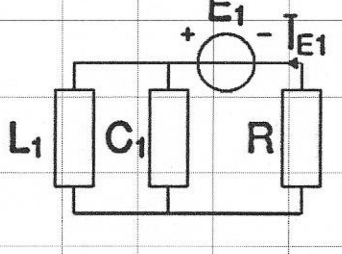


$\bar{E}_1 = 80$
$Z_R = 2$
$Z_{C1} = -2j$
$Z_{C2} = -0.5j$
$Z_{L1} = 0.5j$
$Z_{L2} = 0.5j$

RISONANZA PARALLELO! QUINDI SI COMPORTANO COME UN CIRCUITO APERTO.

sono in // ⇒ c'è una risonanza in //, equivalgono ad un circuito aperto per cui si può sfruttare la risonanza

Sfruttiamo la risonanza!



PARTITORE DI CORRENTE

$$\bar{I}'_{E1} = \bar{I}'_R = \frac{\bar{E}_1}{Z_R + Z_{L1} // Z_{C1}} = 36 + 12j$$

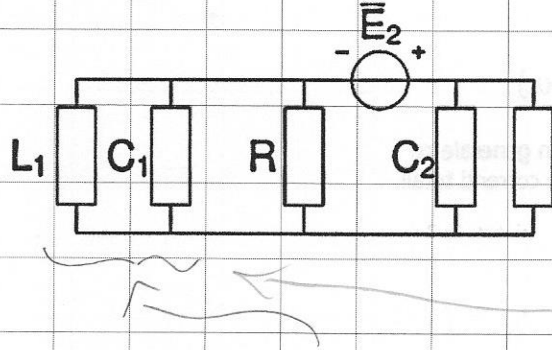
si forma nel tempo, calcolando modulo e fase del fasore

$$i'_{E1}(t) = i'_R(t) = 37.9\cos(500t + 0.32)$$

Invece $36 - 12j$!

AV22.4

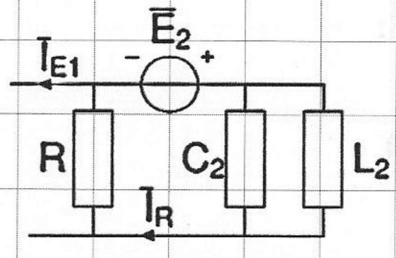
Secondo sottocircuito con il generatore $\overline{E}_2$, con le impedenze ricalcolate in base alla pulsazione 1000 e non 500



$E_2 = 40$
$Z_R = 2$
$Z_{C1} = -j$
$Z_{C2} = -0.25j$
$Z_{L1} = j$
$Z_{L2} = j$

Risonanza parallelo

C'è di nuovo una risonanza, ma non è la stessa di prima! Risonanza parallelo. comportamento come un circuito aperto



$\overline{I}''_{E1} = 0$

$$\overline{I}''_R = \frac{\overline{E}_2}{Z_R + Z_{L2} // Z_{C2}} = 19.5 - 3.3j$$

trasformando nel tempo.

$$i''_R(t) = 19.7\cos(1000t - 0.17)$$

$\sqrt{19.5^2+3.3^2}$ atan $\frac{-3,3}{19,5}$

Alla fine, tramite la sovrapposizione, calcolo le sovrapposizioni totali

$$i_{E1}(t) = i'_{E1}(t) + \underbrace{i''_{E1}(t)}_{0} = 37.9\cos(500t + 0.32)$$

$$i_R(t) = i'_R(t) + i''_R(t) = 37.9\cos(500t + 0.32) + 19.7\cos(1000t - 0.17)$$

Avendo le grandezze totali nel tempo, si possono calcolare le potenze

ATTENZIONE: MAI SOMMARE I FASORI DI GRANDEZZE NON ~~ISOFREQ~~UENZIALI!!!!
LA SOMMA SI DEVE FARE NEL TEMPO!!!

LA SOMMA DEI FASORI NON HA SIGNIFICATO PER GRANDEZZE NON ISOFREQUENZIALI

Potenza media assorbita dal resistore R

$$i_R(t) = 37.9\cos(500t + 0.32) + 19.7\cos(1000t - 0.17)$$

$$\boxed{P_R = \frac{1}{T}\int_0^T R i_R^2(t)dt = 1829\ \text{W} \qquad \text{con } T = \frac{2\pi}{500} = 2\ \text{ms}}$$

12,56 ms

$T = \frac{1}{\omega}$? $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Potenza attiva nel primo sottocircuito

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T R i_R^2(t)dt = 1.44\cdot 10^6 \int_0^T \cos^2(500t + 0.32)dt +$$

$$+ 2.99\cdot 10^6 \int_0^T \cos(500t + 0.32)\cos(1000t - 0.17)dt + 0.389\cdot 10^6 \int_0^T \cos^2(1000t - 0.17)dt$$

ZERO!!

perché prodotto di due coseni pulsazione diversa integrato nel periodo

Potenza attiva nel ~~secondo sottocircuito~~

Notare che in questo caso di non isofrequenza, la potenza media è data dalla somma delle potenza attiva nel primo e nel secondo circuito.

AV 22.5

Potenza istantanea erogata dal generatore $e_1(t)$

$$i_{E1}(t) = 37.9\cos(500t + 0.32)$$

$$p_{E1}(t) = e_1(t)i_{E1}(t) = 3032\cos(500t + 0.32)\cos(500t)$$

n.b. È un caso che compaia un solo termine, perché $i''_{E1}(t)=0$. In generale ce ne sono di più perché vanno considerate sempre le tensioni e le correnti totali.

Potenza media assorbita dal ~~resistore~~ induttore L_1

$P_L = 0$ sempre!

In generale, se ci sono generatori non isofrequenziali:

- non è definita la potenza complessa totale, la potenza attiva totale, la potenza reattiva totale
- non ha senso calcolare le potenze complesse o reattive nei singoli sottocircuiti e poi sommarle
- ha senso calcolare le potenze attive nei singoli sottocircuiti e poi sommarle solo perchè, essendo relative a circuiti non insofrequenziali, la somma coincide con la potenza media
- **la potenza istantanea e la potenza media sono sempre e comunque definite e calcolabili** } VALE SEMPRE

AV 22.6

Aula Virtuale 23

Circuiti in evoluzione dinamica

42'17"

Prof. Dario Assante

- Le variabili di stato

Determinano lo stato energetico della rete.

Sono l'intensità di corrente negli induttori

e la tensione ai capi dei condensatori

Sono funzioni continue nel tempo.

Le altre grandezze possono essere discontinue.

variabili di stato

i_L

v_C

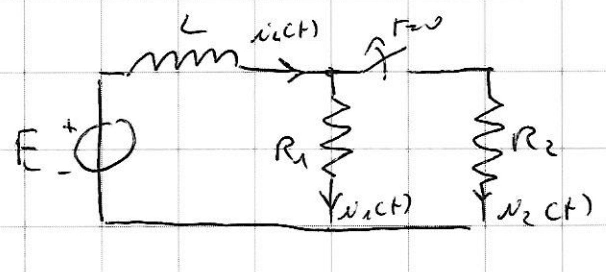
Gli esercizi in evoluzione dinamica possono essere risolti usando uno appropriato schema logico (vd).

Esempio. Determinare l'intensità di corrente $i_L(t)$ in ogni istante.

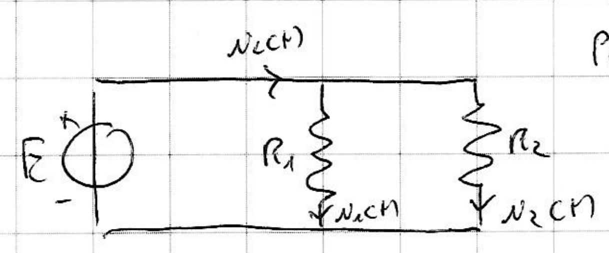
. La rete è a regime per $t<0$

. Il generatore di tensione è costante nel tempo

. All'istante $t=0$ l'interruttore si apre



1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione



Per $t<0$ la rete è in regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1 // R_2}$$

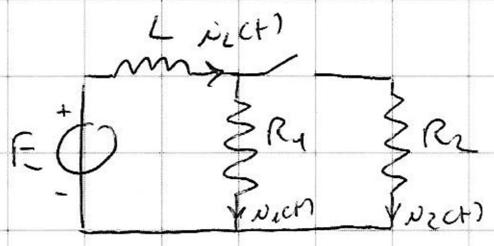
2. Determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione

visto che per $t<0$ la rete è in regime stazionario, le variabili di stato nell'istante di commutazione si determina semplicemente.

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{E}{R_1 // R_2}$$

3. Determinare l'equazione differenziale ...

Per reti molto semplici basta scrivere le leggi di Kirchhoff.



Quando l'interruttore si apre il resistore R_2 in pratica non c'è più perché è collegato su un ramo aperto, quindi rimane una unica maglia composta da L, E e R_1.

A questo punto la corrente i_L coincide con la corrente i_1 e, avendo una maglia, è sufficiente scrivere la LK a tale maglia, tenendo conto che $i_L = i_1$:

$$E - L\frac{di_L}{dt} - R_1 i_L = 0 \qquad \text{LKT}$$

da cui ricaviamo l'equazione differenziale del comportamento della corrente i_L:

$$\frac{di_L}{dt} + \overset{\frac{1}{\tau}}{\boxed{\frac{R_1}{L}}} i_L = \frac{E}{L} \qquad \text{del 1° ordine}$$

A questo punto il problema di elettrotecnica è, in sostanza, diventato un problema matematico, con una equazione differenziale del primo ordine non omogenea e una condizione iniziale.

4. Risolvere l'omogenea associata

Per un transitorio del primo ordine c'è una sola possibile soluzione.

$$\lambda + \frac{R_1}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R_1}{L} \Rightarrow i_{LO}(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{con } \tau = \frac{L}{R_1}$$

ATTENZIONE: L'OMOGENEA ASSOCIATA DEVE AVERE SEGNI CONCORDI, GLI AUTOVALORI DEVONO AVERE PARTE REALE NEGATIVA. "Tutto + o tutto −"
altrimenti avrei soluzioni divergenti, non fisicamente possibile.

In un circuito RL, $\tau = \frac{L}{R_{eq}}$

In un circuito RC, $\tau = R_{eq} \cdot C$

5. Determinare l'integrale particolare.

2 POSSIBILITÀ

SOLUZIONE MATEMATICA

Visto che il forzamento è una costante, si cerca l'integrale fra le costanti. Posto $i_{LP}(t) = A$ si sostituisce nella equazione differenziale e si trova

$$\frac{dA}{dt} + \frac{R_1}{L} A = \frac{E}{L}$$

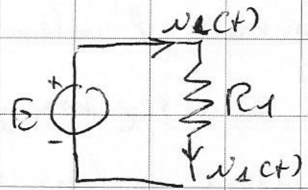
"0" perché A è costante!

$$i_{LP}(t) = \frac{E}{R_1}$$

Se il forzamento è una funzione lineare si cercano le soluzioni dell'integrale particolare tra le funzioni lineari; se è un seno e coseno, si cerca l'integrale particolare tra la combinazione lineare di funzioni trigonometriche, ecc....

SOLUZIONE FISICA (quando il transitorio si esaurisce (10τ o meno))

La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della equazione differenziale.



6. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare

7. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione complessiva

Prima:

$$i_L(t) = i_{LO}(t) + i_{LP}(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R_1}$$

e poi

$$\begin{cases} i_L(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R_1} \\ i_L(0) = \frac{E}{R_1 /\!/ R_2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{i_L(t) = \frac{E}{R_1} + \left(\frac{E}{R_1 /\!/ R_2} - \frac{E}{R_1} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Soluzione dell'esercizio, completa

MAI IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI SOLO SULL'OMOGENEA

AV 23.3

Si osservi che $i_L(t)$ è una variabile di stato e infatti è continua:

$$i_L(t) = i_{L0}(t) + i_{LP}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R_1}$$

Invece $i_1(t)$ non è una variabile di stato ed è, in questo caso, discontinua:

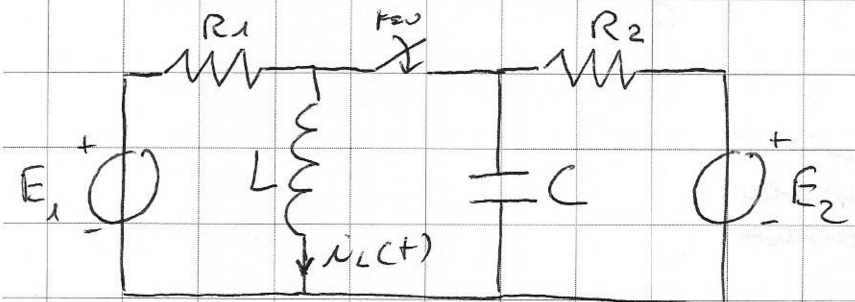
$$\begin{cases} i_1(t) = \dfrac{E}{R_1}, & \text{per } t<0 \\ i_1(t) = i_L(t), & \text{per } t>0 \end{cases} \Rightarrow i_1(0^-) = \frac{E}{R_1} \neq i_1(0^+) = \frac{E}{R_1 // R_2}$$

---

[23] Esempio (più complesso)

Determinare l'intensità di corrente $i_L(t)$ in ogni istante.

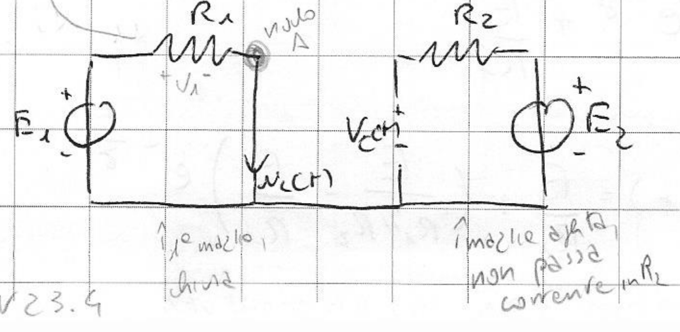
- La rete è a regime per $t<0$.
- I generatori di tensione sono costanti nel tempo
- All'istante $t=0$ l'interruttore si chiude



Avendo due componenti dinamici, il condensatore e l'induttore, ho due variabili di stato, v_C e i_L e mi aspetto di avere un transitorio del 2° ordine.

la corrente i_1? che verso ha? quella di i_{L1} è la stessa

1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione



Per $t<0$ la rete è in regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito e il condensatore come un circuito aperto, ai suoi terminali c'è la stessa ddp del generatore E_2!

$$i_L(t) = \frac{E_1}{R_1}$$ LKC al nodo A, verso di i_1 opposto a i_L!

$$v_C(t) = E_2$$ LKT alla 2ª maglia

AV23.4

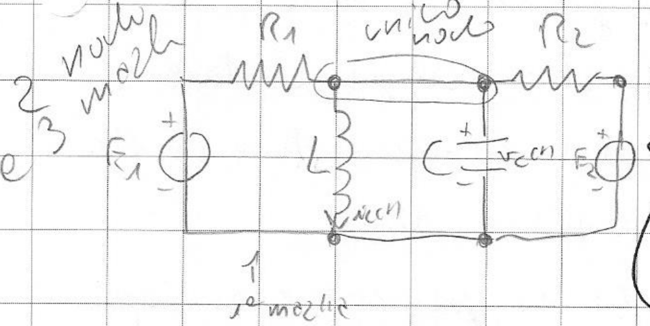
2. Determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione

visto che per $t<0$ la rete è in regime stazionario, le variabili di stato nell'istante di commutazione si determina banalmente.

$$i_L(0) = \frac{E_1}{R_1}$$
$$v_C(0) = E_2$$

3. Determinare l'equazione differenziale [26'47"]

Una possibilità è quella di scrivere le LK (improponibile), ma qui è scelta questa:



$$\begin{cases} E_1 - R_1 i_1 - L \dfrac{di_L}{dt} = 0 & \text{LKT alla 1ª maglia} \\ E_2 - R_2 i_2 - v_C = 0 & \text{LKT alla 3ª maglia} \\ L \dfrac{di_L}{dt} = v_C & \text{LKT alla 2ª maglia } v_L - v_C = 0 \\ i_1 + i_2 - i_L - C \dfrac{dv_C}{dt} = 0 & \text{LKC a cosa? all'"unico nodo"} \end{cases}$$

Usando le LK conviene eliminare, per sostituzione, per prime le grandezze che non sono variabili di stato

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{L}{R_1}\dfrac{di_L}{dt} \\ i_2 = \dfrac{E_2}{R_2} - \dfrac{v_C}{R_2} \\ L\dfrac{di_L}{dt} = v_C \\ \dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{L}{R_1}\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{E_2}{R_2} - \dfrac{v_C}{R_2} - i_L - C\dfrac{dv_C}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = v_C \\ \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) v_C + i_L + C\dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow$$

qui posso decidere se esprimermi in funzione di v_C o i_L; nel secondo caso, sostituendo v_C nella 2ª eq. ho:

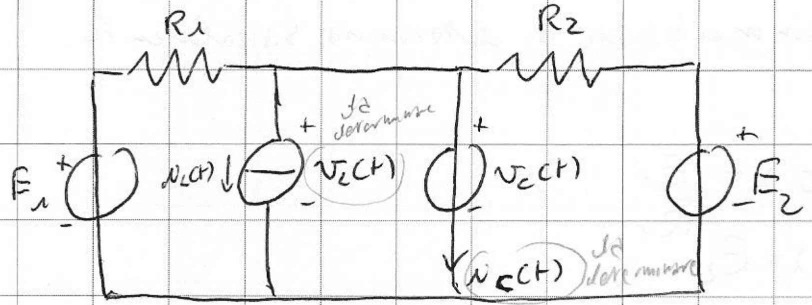
$$\Rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{C} = \frac{1}{LC}\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)$$

AV 23.5

(potevo ricavare i_L dalla 2ª, sostituire nella 1ª ed avere tutto in funzione di v_C)

In alternativa si può usare il metodo del circuito resistivo associato.

perché si tolgono i componenti dinamici e si sostituiscono con generatori



Il metodo del circuito resistivo associato consiste nel sostituire al posto di induttori e condensatori (i componenti dinamici) dei generatori. Si suppone cioè che le variabili di stato non siano delle variabili, ma siano delle grandezze note, per cui al posto dell'induttore metto un generatore di corrente di valore i_L; al posto del condensatore metto un generatore di tensione di valore v_C.

Poi si risolve il circuito individuando le grandezze ai capi dei due generatori.

Quindi, per il generatore di corrente, che sostituisce l'induttore, mi interesserà conoscere la tensione v_L ai suoi capi; per il generatore di tensione al posto del condensatore mi interesserà conoscere la corrente i_C.

Per determinare v_L e i_C posso utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti "lungo ma rapido" o un qualche altro metodo noto.

Quello di sovrapposizione degli effetti sarebbe abbastanza agevole.

Nel nostro caso, la tale applicazione abbiamo:

$$v_L = v_C$$

$$i_C = \frac{E_1}{R_1} - i_L - \frac{v_C}{R_1 /\!/ R_2} + \frac{E_2}{R_2}$$

A questo punto, quelli che ho considerato come generatori non sono più tali e quindi si sostituiscono le caratteristiche dei componenti dinamici, al posto di v_L metto $L\frac{di_L}{dt}$, al posto di i_C metto $C\frac{dv_C}{dt}$:

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = v_L = v_C \\ C\dfrac{dv_C}{dt} = i_C = \dfrac{E_1}{R_1} - i_L - \dfrac{v_C}{R_1 \parallel R_2} + \dfrac{E_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = v_C \\ C\dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{v_C}{R_1 \parallel R_2} + i_L = \dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow$$

a questo punto posso esprimere l'equazione differenziale che mi interessa, o in termini di i_L come in questo caso o di v_C.

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{1}{LC}\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)$$

4. Risolvere l'omogenea associata

Per un transitorio del secondo ordine ci sono tre possibili soluzioni, in base ai valori di R, L e C.

$$\lambda^2 + \lambda\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C} + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \begin{cases} i_{L0}(t) = k_1 e^{-\lambda_1 t} + k_2 e^{-\lambda_2 t} & (a) \\ i_{L0}(t) = e^{-\lambda_1 t}(k_1 + k_2 t) & (b) \\ i_{L0}(t) = e^{-\alpha t}(k_1 \sin(\beta t) + k_2 \cos(\beta t)) & (c) \end{cases}$$

(a) soluzioni λ_1 e λ_2 reali e distinte (parte reale di λ_1 e $\lambda_2 \leq 0$)

(b) soluzioni λ_1 e λ_2 reali e coincidenti

(c) soluzioni λ_1 e λ_2 complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta j$

I SEGNI DELLA EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA DEVONO ESSERE CONCORDI (tutti + o tutti −) IN QUANTO LA PARTE REALE DELL'AUTOVALORE DEVE ESSERE NEGATIVA O AL PIÙ NULLA

AV 23.7

5. Determinare l'integrale particolare

2 POSSIBILITÀ

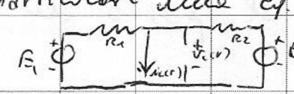
SOLUZIONE MATEMATICA

visto che il forzamento è una costante, si cerco l'integrale fra le costanti.
Posto $i_{Lp}(t) = A$ si sostituisce nella equazione differenziale e si trova

$$\underbrace{\frac{d^2A}{dt^2}}_{0} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{0} + \frac{A}{LC} = \frac{1}{LC}\left(\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}\right)$$

SOLUZIONE FISICA

La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della eq. diff.le



$$\rightarrow i_{Lp}(t) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

con E_1, E_2, R_1, R_2 noti dal testo esercizio

6. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare

7. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione complessiva

Prima

$$i_L(t) = i_{L0}(t) + i_{Lp}(t) = i_{L0}(t) + \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

e poi

$$\begin{cases} i_L(t) = i_{L0}(t) + \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \\ i_L(0) = \frac{E}{R} \\ \frac{di_L}{dt}(0) = \dots \end{cases}$$

condizione iniziale, una per i transitori del 1° ordine, 2 per i transitori del 2° ordine, con due costanti di integrazione, K_1 e K_2

seconda condizione, per il transitorio del 2° ordine

$\Downarrow$

soluzione complessiva finale $\quad i_L(t) = \dots$

MAI IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI SOLO SULL'OMOGENEA.

ATTENZIONE:

1. I segni dell'omogenea associata devono essere sempre concordi
2. Le variabili di stato devono essere sempre continue.

AV 23.8

la virtuale cp

RETI IN REGIME SINUSOIDALI CON GENERATORI NON ISOFREQUENZIALI

In un circuito sono contemporaneamente attivi più generatori aventi a frequenze diverse.

- Considerazioni generali sui fasori

Qualunque sia il circuito in regime sinusoidale da risolvere si può scegliere arbitrariamente scegliere un riferimento di fase, quando vengono introdotti i fasori.

$a(t) = 20 \text{ sen}(\omega t) \longleftrightarrow \bar{A} = 20$ Riferimento di fase

$b(t) = 30 \cos(\omega t) \longleftrightarrow \bar{B} = 30j$

(sfasamento $\frac{\pi}{2}$)

$c(t) = M \text{ sen}(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow \bar{C} = M e^{j\varphi}$

oppure

$a(t) = 40 \cos(\omega t) \longleftrightarrow \bar{A} = 40$ Riferimento di fase

$b(t) = 15 \text{ sen}(\omega t) \longleftrightarrow \bar{B} = -15j$

$c(t) = M \cos(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow \bar{C} = M e^{j\varphi}$

oppure

$a(t) = 50 \text{ sen}(\omega t + \frac{\pi}{4}) \longleftrightarrow \bar{A} = 50$ Riferimento di fase

$b(t) = 25 \cos(\omega t) \longleftrightarrow \bar{B} = 25 e^{j\frac{\pi}{4}}$ Riferimento traslato di 45° rispetto a quello di fase.

$c(t) = M \text{ sen}(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow \bar{C} = M e^{j(\varphi - \frac{\pi}{4})}$

Il riferimento di fase può dunque essere scelto in modo arbitrario, l'importante è mantenere la coerenza.

$$\cos \alpha = \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

AV 26.1

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Nell'applicare la sovrapposizione degli effetti ho più sottocircuiti.

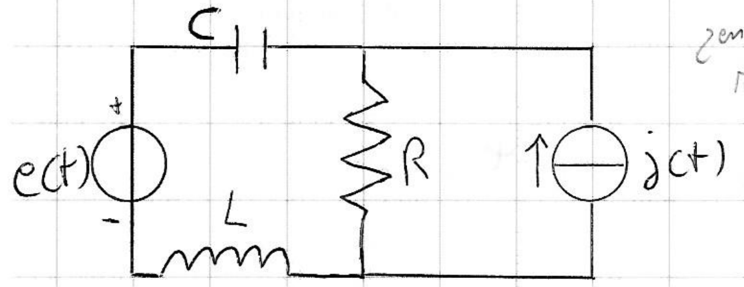
> Se si intende sommare i fasori (se possibile), è necessario usare lo stesso riferimento di fase in ogni sottocircuito.

> Se non si intende (o non si possono) sommare i fasori, è possibile utilizzare riferimenti di fase diversi nei sottocircuiti.

Nell'utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti un circuito viene diviso in sottocircuiti. Nel considerare due sottocircuiti prendere lo stesso riferimento di fase dipende se si vuole sommare i fasori, altrimenti se non si vuole sommare i fasori, o non si può sommare i fasori, allora nel sommare nel tempo la fase di entrambi i sottocircuiti è ininfluente.

ESERCIZIO. Prova del 9.05.2013

Determinare la potenza istantanea assorbita dal resistore R e quella erogata dal generatore di corrente j(t)



generatori NON isofrequenziali

$e(t) = 80\cos(\underline{500}t)$ V (pulsazione)

$j(t) = 8\ \text{sen}(\underline{1000}t)$ A

$R = 2\ \Omega$

$L = 4$ mH

$C = 1$ mF

DEVE ESSERE USATO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PERCHÉ NON È POSSIBILE INTRODURRE I FASORI IN UN CIRCUITO CON UN GENERATORE NON ISOFREQUENZIALI, NON FOSSE ALTRO PERCHÉ NON SAPREMMO SE IL FASORE È RIFERITO A UNA PULSAZIONE 1000 O A UNA PULSAZIONE 500. QUINDI, DI PER SÉ I FASORI NON SI POSSONO INTRODURRE.

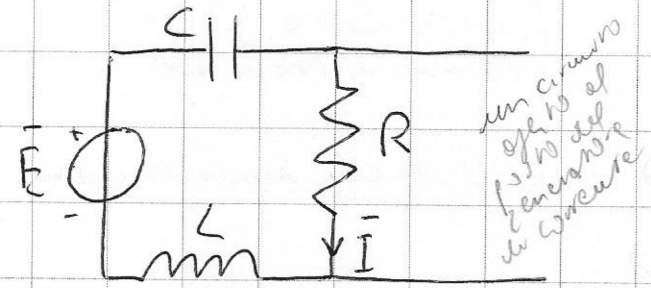
PER INTRODURRE I FASORI OCCORRE INTRODURRE IL PRINCIPIO DI

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI DOVE ACCENDIAMO ALTERNATIVAMENTE ~~GLI ACCENDATORI~~ I GENERATORI E POSSIAMO USARE I FASORI.
I FASORI PERÒ NON POSSONO ESSERE SOMMATI PERCHÉ RELATIVI A GRANDEZZE NON ISOFREQUENZIALI MA DOBBIAMO SOMMARE LE GRANDEZZE NEL TEMPO.

- I GENERATORI NON SONO ISOFREQUENZIALI. SI DEVE USARE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PRIMA DI INTRODURRE I FASORI.
- ATTENZIONE: LA FREQUENZA CAMBIA IN OGNI SOTTOCIRCUITO, QUINDI LE IMPEDENZE SI DEVONO RICALCOLARE IN OGNI SOTTOCIRCUITO.
- ATTENZIONE: I FASORI CALCOLATI NEI DIVERSI SOTTOCIRCUITI SONO RELATIVI A FREQUENZE DIVERSE, QUINDI NON SI POSSONO SOMMARE

Primo sottocircuito

Grandezze fasoriali



$\bar{E} = 80$ => Riferimento per il coseno

$Z_R = 2$

$Z_C = -2j$

$Z_L = 2j$

Le impedenze sono relative alla frequenza del sottocircuito, $\omega = 500$, quindi $f = \frac{\omega}{2\pi} = 79{,}6$ Hz

RISONANZA DI SERIE => IL CONDENSATORE E L'INDUTTORE SI COMPORTANO COME UN CORTO CIRCUITO.

R, L e C sono in serie e, visto che l'impedenza della condensatore e dell'induttore, cioè Z_C e Z_L, sono uguali ed opposte c'è evidentemente una risonanza serie, che ci aiuta notevolmente nella risoluzione del circuito: nel calcolare la corrente come la tensione diviso la somma delle impedenze, Z_C e Z_L si elidono.
Poiché c'è una risonanza serie, induttore e condensatore si comportano come se ci fosse un cortocircuito, quindi la corrente $\bar{I}'$ vale semplicemente

$$\bar{I}' = \frac{\bar{E}}{Z_R} = 40$$

AU 26.3

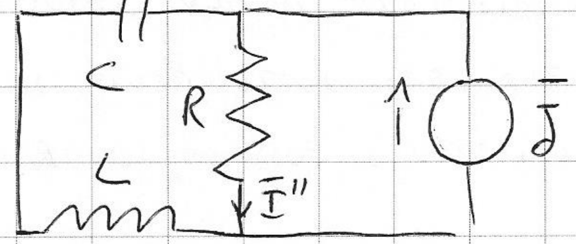
A questo punto calcoliamo le grandezze nel tempo, poiché $\bar{I}' = 40$, allora la grandezza associata nel tempo è:

$$i'(t) = 40\cos(500t), \quad \varphi = 0$$

ed abbiamo quindi risolto il primo sottocircuito. riferimento di fase il COSENO

Il secondo sottocircuito

Si spenge il generatore di tensione, che si comporta come un cortocircuito e accendiamo il generatore di corrente $\bar{J}$.



Si sceglie di prendere come riferimento di fase il seno, al contrario di prima, perché non devo sommare i fasori. Questo influenza il fasore $\bar{J}$, ma non le impedenze.

Per calcolare $\bar{I}''$ basta un semplice partitore di corrente perché L e C sono in serie e la loro serie è in parallelo con R

$\bar{J} = 8$ fasore associato a $j(t)$ con riferimento di fase il seno.

$Z_R = 2$

$\left.\begin{array}{l} Z_C = -j \\ Z_L = 4j \end{array}\right\}$ Ricalcolo alla nuova frequenza.

quindi otteniamo:

$$\bar{I}'' = \bar{J}\,\frac{Z_L + Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} \simeq 5{,}54 + 3{,}69\,j$$

Da cui la grandezza nel tempo $i''(t)$: $\arctan\left(\frac{3{,}69}{5{,}54}\right)$ in rad.

$$i''(t) = \underbrace{6{,}66}_{\text{modulo di } \bar{I}'' = \sqrt{5{,}54^2 + 3{,}69^2}} \,\text{sen}\,(1000t + 0{,}59)$$

riferimento di fase

fase di $\bar{I}''$, calcolata come $\arctan\left(\frac{3{,}69}{5{,}54}\right)$

AV 26.4

Alla fine, tramite la sovrapposizione

$i(t) = i'(t) + i''(t) = 40 \cos(500t) + 6{,}66 \operatorname{sen}(1000t + 0{,}58)$

↳ corrente totale

da cui posso calcolare la tensione ai capi del resistore

$v_R(t) = v_j(t) = R\, i(t) = 80 \cos(500t) + 12{,}32 \operatorname{sen}(1000t + 0{,}58)$

Attenzione: MAI SOMMARE I FASORI DI GRANDEZZE NON ISOFREQUENZIALI!

LA SOMMA SI DEVE FARE NEL TEMPO!

Potenza istantanea assorbita dal resistore R:

$p_R(t) = R\, i^2(t) = \ldots$

Potenza istantanea erogata dal generatore $j(t)$:

$p_j(t) = v_j(t) \cdot j(t) = \ldots$

Potenza media assorbita dal resistore R:

ha senso chiedere questo, mentre non ha senso chiedere potenza complessa, potenza attiva o potenza reattiva poiché i generatori sono non isofrequenziali.

La potenza media è sempre definita perché basta prendere la potenza istantanea e farne il valor medio.

Alla richiesta della potenza media assorbita dal resistore R, si deve partire dalla potenza istantanea assorbita dal resistore R e di questa grandezza si deve fare il valor medio.

$$P_{istantanea}(t) = R \cdot i^2(t) = \ldots$$

potenza istantanea assorbita dal resistore R

$$P_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T P_{istantanea}\, dt$$

vd. slide 12

con $T = \frac{2\pi}{5\omega} \approx 12.6\ ms$

prima, si mette, fra i due, quello più grande, che includa quello più piccolo

Periodo più grande della frequenza più piccola, proporzionale alla pulsazione secondo 2π

$$P_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T R\, i_R^2\, dt$$

L'integrale della grandezza sen^2 e $\cos^2$ in un periodo T, fa sempre $\frac{T}{2}$.

L'integrale del doppio prodotto fa zero perché è l'integrale in un periodo di una grandezza sinusoidale

Il calcolo diventerà, conoscendo quanto sopra:

$$P_{medio} = \frac{3200}{2} + \frac{88.72}{2}$$

Osservazione! LA POTENZA MEDIA IN UN CIRCUITO COINCIDE CON LA POTENZA ATTIVA.
IL PRIMO INTEGRALE RAPPRESENTA LA POTENZA ATTIVA NEL PRIMO CIRCUITO;
L'ULTIMO INTEGRALE RAPPRESENTA LA POTENZA ATTIVA NEL SECONDO CIRCUITO.
QUESTO È L'UNICO CASO IN CUI SOMMARE LE POTENZE attive DEI SOTTOCIRCUITI HA SENSO, E TALE SOMMA È LA POTENZA MEDIA.

1v 26.6

Esercizio 2

$$\bar{E}_1 \cdot \frac{Z_R \parallel Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_R \parallel Z_{C2}}$$ è la tensione

ai capi del parallelo R e C2,

pari a $24 + 8j$,

$$40 \cdot \frac{\frac{-4j}{2-2j}}{-j - \frac{4j}{2-2j}} = 40 \cdot \frac{\frac{-4j}{\cancel{2-2j}}}{\frac{-2j-2-4j}{\cancel{2-2j}}} =$$

$$= 40 \cdot \frac{-2j}{-2-6j} = \frac{40 \cdot (-2j(-2+6j))}{4+36} =$$

$$4j + 12$$

$12 + 4j$

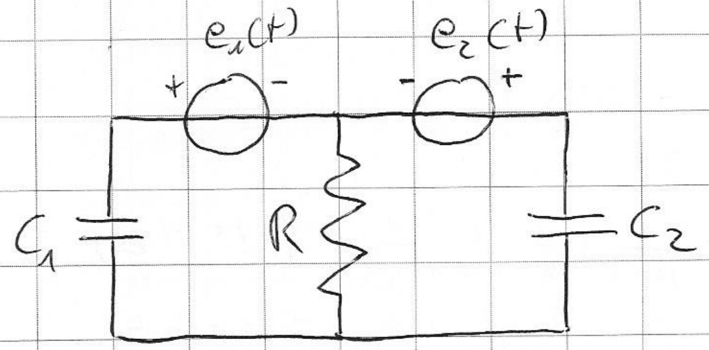
modulo $= \sqrt{12^2 + 4^2} = 12,6$

$\beta = \arctan \frac{4}{12} = \arctan \frac{1}{3} = 18°,43 = 0,32 \text{ rad}$

polllo 15

ESERCIZIO. Prova del 10 Maggio 2013

Determinare la potenza istantanea assorbita dal resistore R e quella erogata dal generatore di tensione $e_1(t)$.



$e_1(t) = 40 \cos(500t)$ V

$e_2(t) = 80 \operatorname{sen}(250t)$ V

$R = 2\ \Omega$

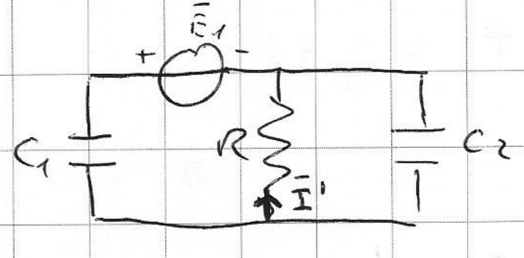
$C_1 = 2$ mF

$C_2 = 1$ mF

Un circuito con due generatori non isofrequenziali

Dobbiamo necessariamente procedere col principio di sovrapposizione degli effetti perché avendo due generatori non isofrequenziali non abbiamo scelta.

Primo sottocircuito (e_2 spento, sostituito con un corto circuito)



Riferimento di fase il coseno:

$\bar{E}_1 = 40$

$Z_R = 2$

$Z_{C_1} = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{500} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{10^3}} = \frac{1}{j} = -j$

Il circuito si risolve notando che R e C_2 sono in parallelo e che questo è in serie a C_1,

$Z_{C2} = \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{500} \cdot \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{10^3}} = \frac{1}{j} \cdot 2 = -2j$

quindi per calcolare $\bar{I}'$ occorre fare un partitore di tensione, e dividere per R; abbiamo:

$$\bar{I}' = \frac{1}{R} \cdot \boxed{\bar{E}_1 \cdot \frac{Z_R // Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_R // Z_{C2}}} = 12 + 4j \checkmark$$

che verifica

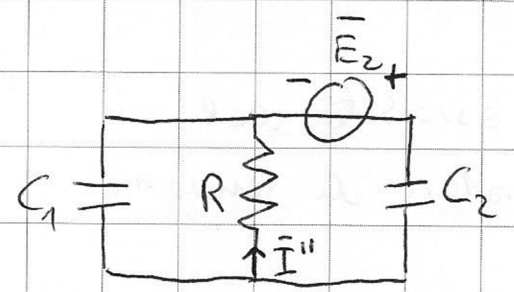
Preso per suono $\bar{I}'$, ok

Abbiamo dunque passando alla grandezza nel tempo del fasore $\bar{I}'$:

$$i'(t) = \underbrace{12{,}6}_{\text{modulo } = \sqrt{12^2+4^2}} \cdot \underbrace{\cos}_{\text{rif. fase}} (500t + \underbrace{0{,}32}_{\arctan\frac{4}{12} \text{ radianti}})\ \text{fase}$$

AV 26.7

Secondo sottocircuito: e_1 spento, e_2 acceso.



n.b.: Si usa lo stesso riferimento di fase del primo sottocircuito, cioè il coseno, per scelta, quindi il fasore $\bar{E}_2$ sarà associato a $-80j$. Abbiamo dunque

$$\bar{E}_2 = -80j$$

$$Z_R = 2$$

$$Z_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{250} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{10^3}} = \frac{1}{j} \cdot 2 = -2j$$

$$Z_{C2} = \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{250} \cdot \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{10^3}} = \frac{1}{j} \cdot 4 = -4j$$

Si applica ancora un partitore di tensione e poi si divide per R:

$\rightarrow 12.3 - 18.4615j$ = Tensione ai capi di R

$$\bar{I}'' = \frac{\bar{E}_2}{R} \cdot \frac{Z_R \, // \, Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_R \, // \, Z_{C1}} \simeq 6.15 - 9.23j \quad \text{OK}$$

da cui, passando alle grandezze nel tempo:

$$i''(t) = \underbrace{11.1}_{\text{modulo} = \sqrt{6.15^2+9.23^2}} \underbrace{\cos}_{\text{rif. tot. di fase}} (\underbrace{250}_{\omega \text{ pulsazione } \omega = 2\pi f} t \underbrace{- 0{,}98}_{\text{fase, pari a } \arctan\left(\frac{-9.23}{6.15}\right) \text{ rad.}})$$

Una volta trovate le grandezze nel tempo si sommano per la sovrapposizione:

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = 12.6 \cos(500t + 0.32) + 11.1 \cos(250t - 0.98)$$

E la potenza istantanea assorbita dal resistore R è:

$$P_R(t) = R\, i^2(t) = \dots$$

Potenza istantanea

ATTENZIONE: MAI SOMMARE I FASORI DI GRANDEZZE NON ISOFREQUENZIALI!!!

LA SOMMA SI DEVE FARE NEL TEMPO.

AV. 268

Calcolo della potenza istantanea erogata dal generatore $e_1(t)$:

$P_{e_1} = e_1(t) \cdot i(t) = 40\cos(5\omega t) \cdot (\quad \dots \quad)$

~~Calcolo della potenza istantanea erogata dal generatore $j(t)$~~;

POTENZE CON GENERATORI NON ISOFREQUENZIALI

In generale, se ci sono generatori non isofrequenziali:

- non è definita la potenza complessa totale, la potenza attiva totale, la potenza reattiva totale.

- non ha senso calcolare le potenze complesse o reattive nei singoli circuiti e poi sommarle

- ha senso calcolare le potenze attive nei singoli sottocircuiti e poi sommarle solo perché, essendo relative a circuiti non isofrequenziali, la somma coincide con la potenza media

- la potenza istantanea e la potenza media sono sempre e comunque definite e calcolabili.

AV. 26. 3

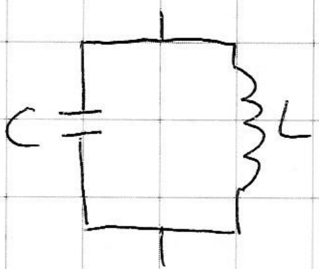
Av26 10

Aula virtuale 27

LA RISONANZA NELLE RETI IN REGIME SINUSOIDALI

RISONANZA PARALLELO

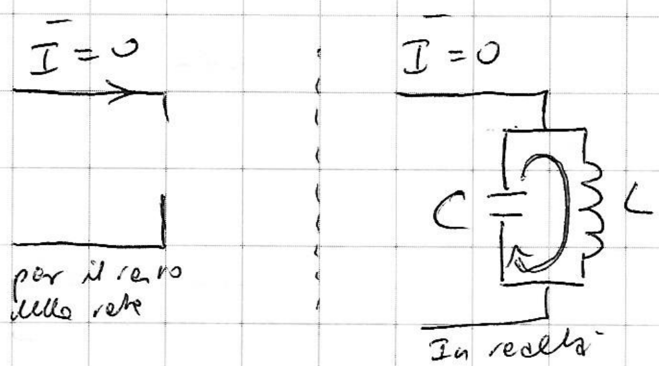
LA RISONANZA È MANIFESTATA A REGIME NELLE RETI IN REGIME SINUSOIDALE SECONDO OPPORTUNE CONDIZIONI, È CONNESSA ALLA PULSAZIONE



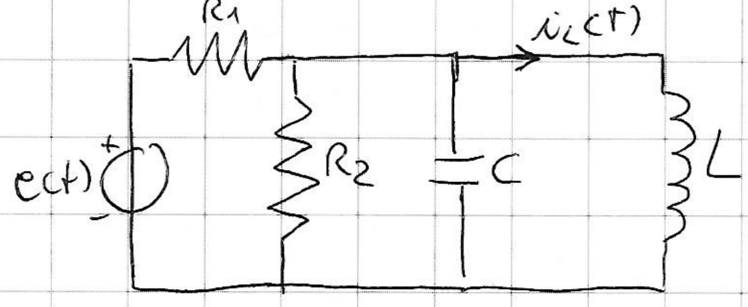
Se $LC\omega^2 = 1$, ovvero $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
allora

$$\dot{Z}_L = -\dot{Z}_C$$

Le impedenze sono uguali, il parallelo equivale a un circuito aperto: nel circuito, in risonanza, non passa corrente, questo non vuol dire che le correnti sono nulle.



Esempio di risonanza parallelo:
Determinare la corrente che circola nell'induttore.



$e(t) = 60 \cos(1000t)$

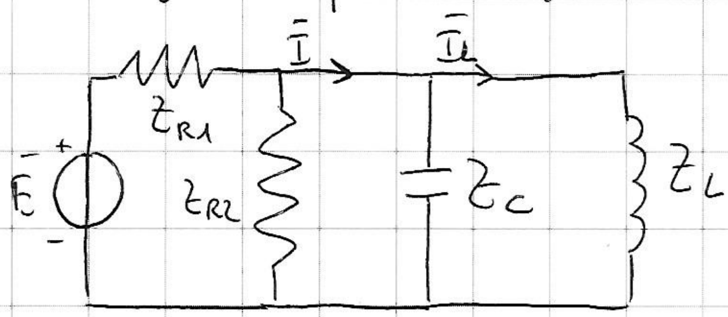
$R_1 = 5\ \Omega$

$R_2 = 15\ \Omega$

$L = 1\ mH$

$C = 1\ mF$

Per prima cosa, nel regime sinusoidale, è da introdurre i fasori, dunque si passa ai fasori e alle impedenze. Riferimento di fase: il coseno



$\bar{E} = 60$

$\dot{Z}_{R1} = 5\ \Omega$

$\dot{Z}_{R2} = 15\ \Omega$

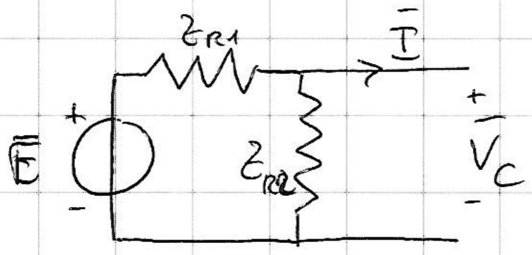
$\dot{Z}_L = j\omega L = j \cdot 1000 \frac{1}{10^3} = j$

$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{10^3}} = \frac{1}{j} = -j$

$\dot{Z}_L$ e $\dot{Z}_C$ sono uguali ed opposte.

Per poter dire che sono in risonanza esse devono essere in serie o in parallelo e questo deve essere verificato dall'analisi del circuito.

I due componenti sono effettivamente in parallelo, quindi sono in risonanza, quindi $\bar{I}$ è nulla. L e C è un aperto.



$\dot{Z}_L = -\dot{Z}_C \Rightarrow$ Risonanza

$\bar{I}$ è nulla

e

$$\bar{V}_C = \bar{E} \cdot \frac{\dot{Z}_{R2}}{\dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_{R2}} = 45$$

$\bar{V}_C = \bar{V}_{R2}$

Il parallelo di L e C è assumibile a un circuito aperto. Il circuito si riduce a una sola maglia ed è quindi calcolabile la tensione ai capi di $\dot{Z}_{R2}$ che è la tensione ai capi del condensatore e dell'induttore poiché R2, L e C sono tra di loro in parallelo.

$\bar{V}_C$ è data da un partitore di tensione $\bar{E}$ tra R_1 e R_2.

Poiché la traccia chiede $\bar{I}_L$, poiché $\bar{V}_C = \bar{V}_L$, nota la tensione ai capi dell'induttore allora

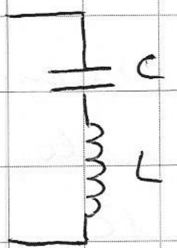
$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}_C}{\dot{Z}_L} = \frac{45}{j} = -45j$$

Tornando alle grandezze nel tempo abbiamo che

$i_L(t) = 45 \text{ sen}(1000t)$ A (arctan 0 = 0)

Risonanza Serie

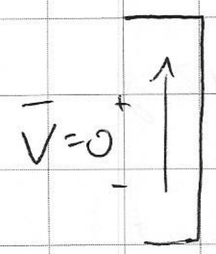
Se induttore e condensatore sono in serie, si possono verificare comportamenti analoghi



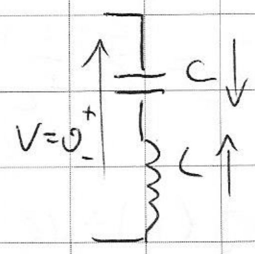
se $LC\omega^2 = 1$ ovvero $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

allora $\dot{Z}_L = -\dot{Z}_C$

- Le impedenze sono uguali e opposte, la serie equivale ad un cortocircuito.



Per il resto della rete

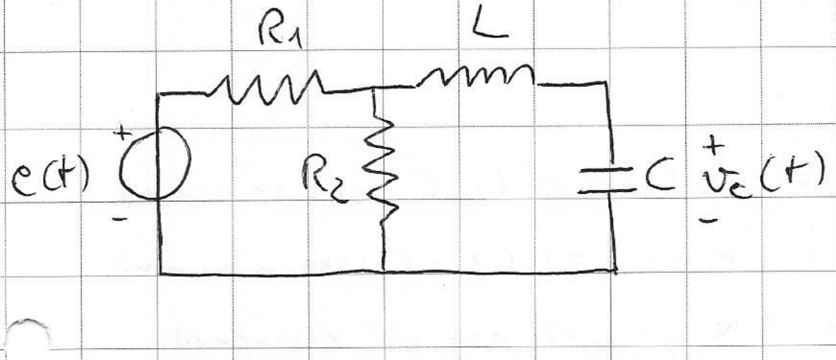


In realtà

In risonanza la tensione ai capi dell'induttore e del condensatore ~~di~~ serie è nulla, ma questo non vuol dire che le tensioni siano nulle singolarmente!

Esempio risonanza in serie.

Determinare tensione ai capi del condensatore



$e(t) = 60 \cos(1000t)$

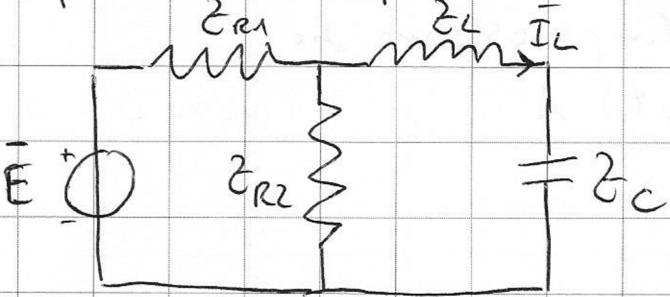
$R_1 = 5\ \Omega$

$R_2 = 15\ \Omega$

$L = 1$ mH

$C = 1$ mF

Per prima cosa si passa ai fasori e alle impedenze.



$\bar{E} = 60$

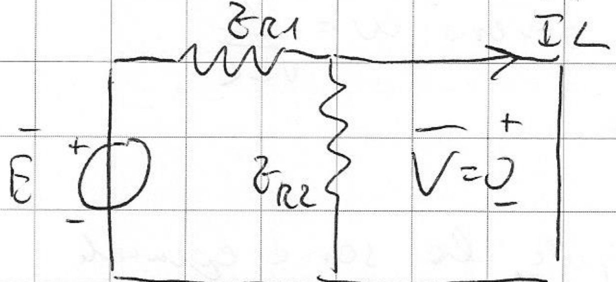
$\dot{Z}_{R1} = 5\ \Omega$

$\dot{Z}_{R2} = 15\ \Omega$

$\dot{Z}_L = j$

$\dot{Z}_C = -j$

Se $\dot{Z}_L = -\dot{Z}_C$ e L e C sono o in serie o in parallelo allora c'è una risonanza: poiché L e C sono in serie allora c'è risonanza:



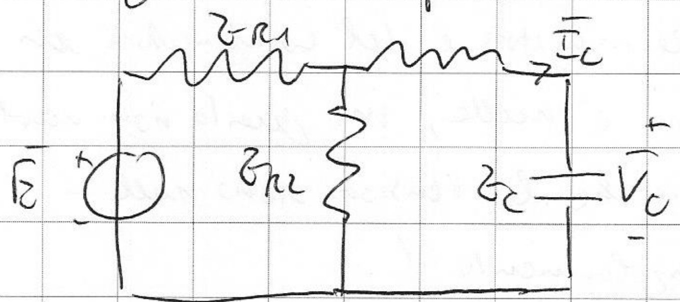
$\dot{Z}_L = -\dot{Z}_C \Rightarrow$ risonanza

dunque $\bar{V}$ è nulla,

ma $\bar{I}_L = \dfrac{\bar{E}}{\dot{Z}_{R1}} = 12$

La corrente percorre la maglia esterna!

E quindi semplicemente

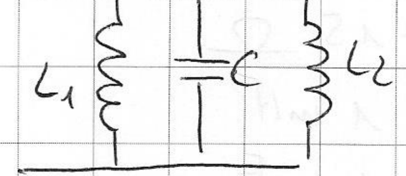


$\bar{V}_C = \dot{Z}_C \bar{I}_L = -12j$

$v_C(t) = 12 \sin(100t)$ V

21'

Attenzione alle frequenze: non basta che un condensatore e un induttore siano in parallelo per dire che c'è risonanza. Dipende dalla frequenza.



$L_1 = 1$ mH

$L_2 = 0.25$ mH

$C = 1$ mF

$\omega = 1$ k rad/s $\Rightarrow$ L_1 e C sono in risonanza

$\omega = 2$ k rad/s $\Rightarrow$ L_2 e C sono in risonanza

$\omega = 3$ k rad/s $\Rightarrow$ non c'è risonanza.

$\omega \neq 1$ e $\omega \neq 2$

PULSAZIONE E RISONANZA SONO CONNESSI

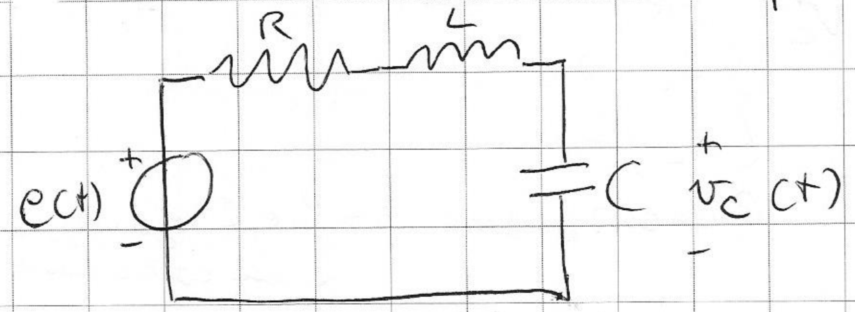
22'48"

1V27.4

Pomo TIP AS

Esempio (più complesso)

Determinare la tensione ai capi del condensatore.



somma di due sinusoidi

$$e(t) = 72 \cos(1000t) + 60 \operatorname{sen}(200t)$$

$R = 3.6\ \Omega$

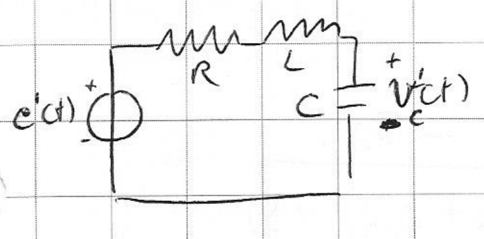
$L = 1\ mH$

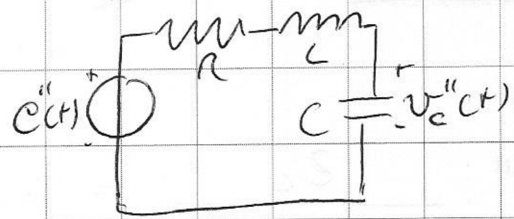
$C = 1\ mF$

Se il forzamento è la somma di più sinusoidi, si deve applicare la sovrapposizione degli effetti.

Tutte le grandezze, tensioni e correnti, sono esprimibili come somma di due sinusoidi, una a pulsazione 1000 e una a pulsazione 200, simile a quello del generatore e(t).

Applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti

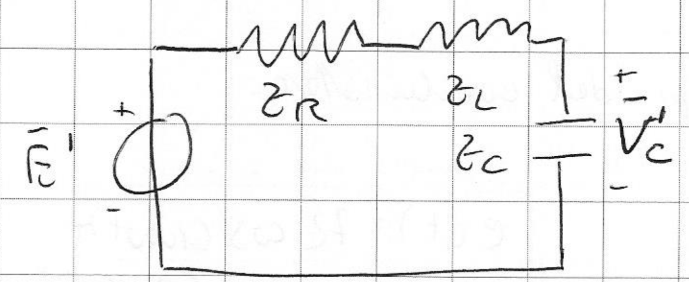




$e'(t) = 72 \cos(1000t)$	$e''(t) = 60 \operatorname{sen}(200t)$
$R = 3.6\ \Omega$	$R = 3.6\ \Omega$
$L = 1\ mH$	$L = 1\ mH$
$C = 1\ mF$	$C = 1\ mF$

Primo sottocircuito e secondo sottocircuito, con calcolo dei fasori e delle impedenze.

Primo sottocircuito



$\bar{E}' = 72$ (Parte di riferimento: coseno)

$\dot{Z}_R = 3.6\ \Omega$

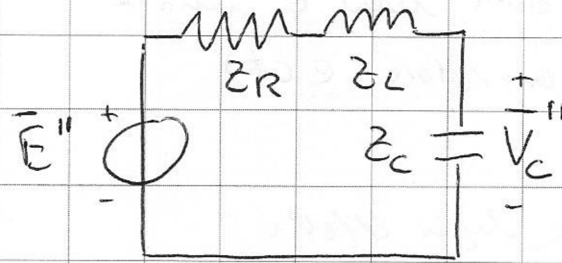
$\begin{cases} \dot{Z}_L = j \\ \dot{Z}_C = -j \end{cases}$

Risonanza serie => L e C equivalgono a un cortocircuito.

Per la risonanza:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_R} = 20 \Rightarrow \bar{V}_C' = \dot{Z}_C \bar{I}_L = -20j$$

Secondo sottocircuito, per cui occorre ricalcolare le impedenze, (perché il generatore ha una frequenza diversa)



$\bar{E}'' = 60$ (Parte di riferimento: seno)

$\dot{Z}_R = 3,6\ \Omega$

$\dot{Z}_L = 0,2j$

$\dot{Z}_C = -5j$

nel 2° sottocircuito non c'è risonanza, si ricorre a un partitore di tensione

$$\bar{V}_C'' = \bar{E}'' \cdot \frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C} = 60 \cdot \frac{-5j}{3,6 + 0,2j - 5j} =$$

$$= 60 \cdot \frac{-50j}{36 - 48j} = 60 \cdot \frac{-50j(36 + 48j)}{36^2 + 48^2} = 60 \cdot \frac{2400 - 1800j}{3600} =$$

$$= 60 \cdot \frac{4 - 3j}{6} = 40 - 30j$$

A questo punto occorre sommare i due contributi, ma **mai sommare fasori associati a grandezze non isofrequenziali**, come in questo caso, quindi:

$\bar{V}_C' = -20j \Rightarrow v_C'(t) = 20 \text{ sen}(1000t)$

$\bar{V}_C'' = 40 - 30j \Rightarrow v_C''(t) = 50 \text{ sen}(200t - 0.64)$ e quindi

$v_C(t) = v_C'(t) + v_C''(t) = 20 \text{ sen}(1000t) + 50 \text{ sen}(200t - 0.64)$

FINE

AV 22.6

Aula virtuale 28

POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE

(con buona approssimazione vale il Teorema di Tellegen, per cui se le tensioni soddisfano le LKT e le correnti le LKC vale: $\sum_k v_k(t)\, i_k(t) = 0$)

$p(t) = v(t) \cdot i(t)$ Potenza istantanea per un qualunque bipolo (qualunque espressione di v(t) e i(t))

In particolare, se siamo in regime sinusoidale

$v(t) = V_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_V)$ fase della tensione V_M = Tensione massima

$i(t) = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_I)$ fase della corrente I_M = Corrente massima

possiamo definire: coniugato della corrente

$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\overline{V}\overline{I}^*\} = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_V - \varphi_I)$ Potenza attiva (valor medio della potenza istantanea)

per l'uso dei valori massimi (non serve nell'uso dei valori efficaci, $V_M = V_{eff} \cdot \sqrt{2}$)

$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\{\overline{V}\overline{I}^*\} = \frac{1}{2} V_M I_M \operatorname{sen}(\varphi_V - \varphi_I)$ Potenza reattiva

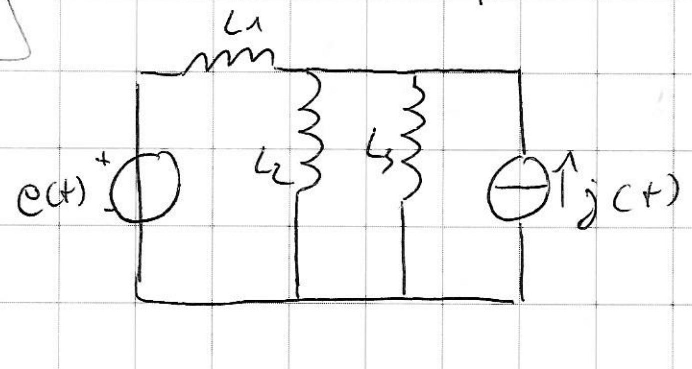
$\dot{P} = \frac{1}{2} \overline{V}\overline{I}^* = P + jQ$ Potenza complessa (per applicazione del T. di Tellegen al sistema delle tensioni in forma fasoriale e al sistema dei coniugati delle correnti, $\overline{V}$ e $\overline{I}^*$.)

$A = |\dot{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ Potenza apparente

Esercizio 1. Prova del 18 Luglio 2012

poli A5

· Determinare la potenza attiva erogata dal generatore di tensione.



$e(t) = 81 \cos(1000t)$ V

$j(t) = 18 \operatorname{sen}(1000t)$ A

stessa pulsazione => stessa frequenza

$L_1 = 3$ mH

$L_2 = 4$ mH

$L_3 = 6$ mH

N.B.: anche se gli induttori chiaramente non assorbono potenza attiva, un generatore può erogare potenza attiva che viene assorbita completamente dall'altro generatore. Pertanto non è detto che il risultato finale sia zero.

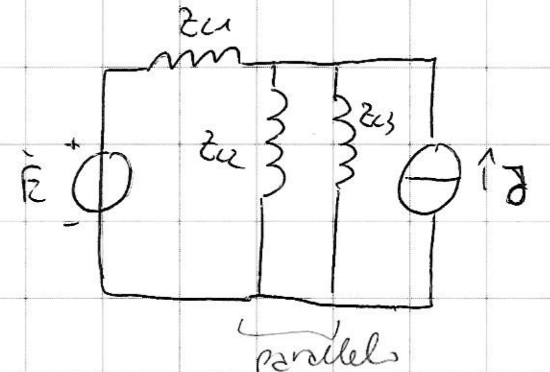
Risolviamo il circuito.

Ci serve la corrente che attraversa il generatore di tensione per determinare la potenza attiva erogata.

Dobbiamo fare il prodotto tensione per corrente.

Questa rete può essere risolta con uno dei metodi proposti nel corso.

Essendo in regime sinusoidale si passa ai fasori e alle impedenze e poi si risolve la rete usando le LK.



N.B.: è inutile scrivere la LKT del parallelo tra L2, L3 e J

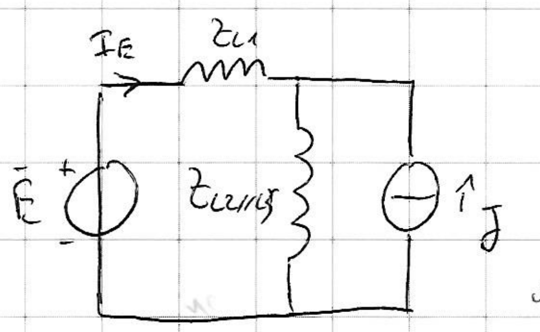
$\bar{E} = 81j$

$\bar{J} = 18$ (Riferimento ai fasori il seno e i valori massimi)

$\dot{Z}_{L1} = 3j$ $(j\omega L_x)$

$\dot{Z}_{L2} = 4j$

$\dot{Z}_{L3} = 6j$



$$\begin{cases} \bar{E} - \dot{Z}_{L1}\bar{I}_E - \dot{Z}_{L2//L3}\bar{I} = 0 & \text{LKT alla maglia a sx} \\ \bar{I}_E - \bar{I} + \bar{J} = 0 & \text{LKC} \end{cases}$$

corrente che attraversa il parallelo

da ricavare

corrente che attraversa il parallelo

$$\dot{Z}_{L2//L3} = \frac{\dot{Z}_{L2}\dot{Z}_{L3}}{\dot{Z}_{L2} + \dot{Z}_{L3}} = 2.4j$$

otteniamo

$$\bar{I}_E = \frac{\bar{E} - \dot{Z}_{L2//L3}\bar{J}}{\dot{Z}_{L1} + \dot{Z}_{L2//L3}} = 7$$ per cui abbiamo che

la potenza attiva è: $P_E = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \bar{V}\bar{I}^* \right\}$ (coniugato di $\bar{I}$)

$$\dot{P}_E = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\bar{E}\,\bar{I}_E^*\right\} = \frac{1}{2}\cdot 81j \cdot 7 = 283.5j$$

convenzione del generatore

perché puramente immaginario, abbiamo solo potenza reattiva

La potenza attiva erogata dal generatore risulta nulla.

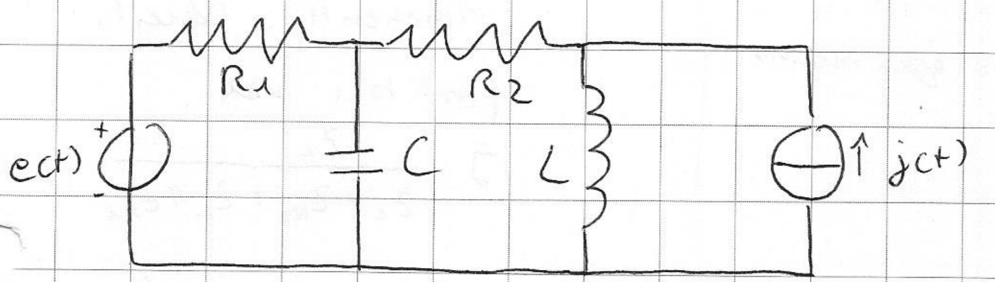
Ciò è dovuto sia all'assenza di resistori nella rete, sia ai particolari valori di $e(t)$ e $j(t)$.

(Provare a risolvere lo stesso esercizio con $j(t) = 18\cos(100t)$ A, verrà una potenza attiva non nulla.)

La potenza attiva erogata dal generatore risulta nulla perché puramente immaginaria, abbiamo solo potenza reattiva assorbita in parte dai tre induttori e in parte anche dal generatore di corrente.
Da questo risultato possiamo dire due cose:
1. La potenza attiva è certamente nulla
2. Possiamo dire che anche il generatore di corrente non eroga potenza attiva perché se non la eroga il generatore di tensione non la assorbono i tre induttori e anche il generatore di corrente non potrà erogare potenza attiva.

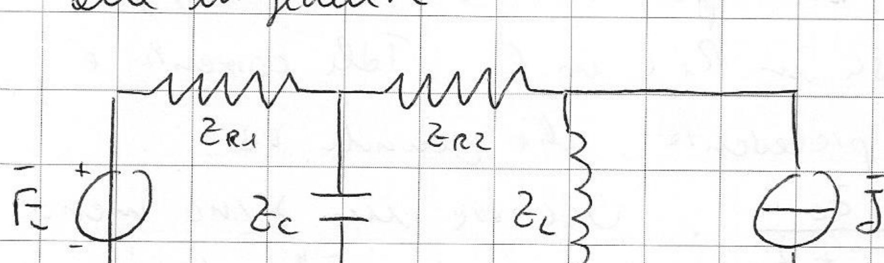
Pollo 15

Esercizio 2. Prova del 13 Luglio 2012
· Determinare la potenza attiva erogata dal generatore di tensione.



$e(t) = 50\cos(5\omega t)$ V
$j(t) = 10\,\text{sen}(5\omega t)$ A
$R_1 = 4\ \Omega$
$R_2 = 4\ \Omega$
$L = 8$ mH
$C = 0.5$ mF

Per prima cosa si passa ai fasori e alle impedenze



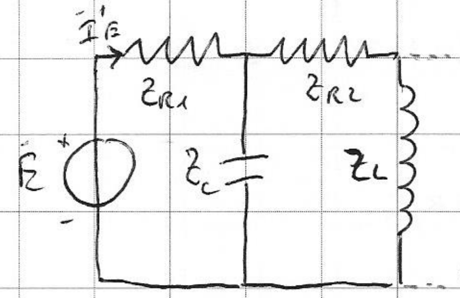
$\bar{E} = 50j$
$\bar{J} = 10$ (Rif. to fasori seno)
$Z_{R1} = 4$
$Z_{R2} = 4$

non c'è risonanza $\begin{cases} Z_L = j\omega L = 4j \\ Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -4j \end{cases}$

L e C non sono né in serie né in parallelo, quindi non c'è risonanza anche se le impedenze sono uguali e contrarie.

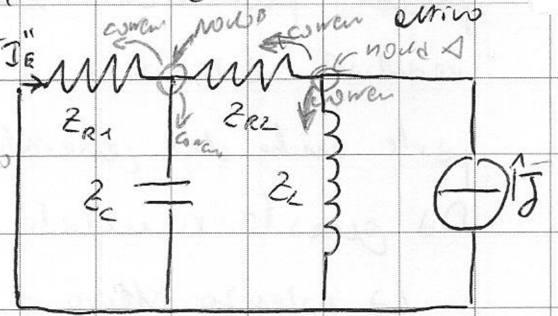
AV 28.3

Dobbiamo, a questo punto, risolvere la rete con uno dei metodi che conosciamo. In questo caso decidiamo per il metodo di sovrapposizione degli effetti: un generatore alla volta



J è spento ed è sostituito con un circuito aperto

E è spento ed è sostituito da un corto circuito



Primo sottocircuito:

Z_{R2} e Z_L sono in serie, questa serie è in parallelo con Z_C, tutto è in serie con Z_{R1}, quindi: $V = Ri \Rightarrow i = \frac{V}{R} = \frac{E}{R}$ = resistenza delle impedenze

$$\bar{I}'_E = \frac{\bar{E}}{Z_{R1} + \dot{Z}_C // (\dot{Z}_L + Z_{R2})} = -2.5 + 5j$$

ok da calcolatrice

Impedenza equivalente!

Secondo sottocircuito:

la corrente J si ripartisce tra Z_L e Z_{R2} le altre impedenze: prima di tutto si fa un partitore di corrente al nodo A, per la corrente che fluisce in L c la corrente che fluisce in R_2 e parte rimanente. Questo partitore vale

$$\bar{J} \cdot \frac{Z_L}{Z_L + Z_{R2} + Z_C // Z_{R1}}$$

, ed è la corrente che si ripartisce nel nodo A.

Poi occorre fare un altro partitore, al nodo B, per la corrente che si ripartisce in R_1 e in C. Tale corrente è quella del partitore precedente, che quindi va moltiplicata per $\frac{\dot{Z}_C}{Z_{R1} + \dot{Z}_C}$. Occorre un segno meno dovuto al verso opposto di quello di $\bar{I}''_E$. La corrente $\bar{I}_E$ ha verso "a senso orario". Quindi

$$\bar{I}''_E = -\bar{J} \cdot \frac{\dot{Z}_L}{Z_L + Z_{R2} + Z_C // Z_{R1}} \cdot \frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_C} = -4 - 2j$$

AV 28.4

Quindi i due fasori $\bar{I}'_E$ e $\bar{I}''_E$ possono essere sommati perché i due generatori sono isofrequenziali e per cui lo sono anche le due grandezze $\bar{I}'_E$ e $\bar{I}''_E$:

$$\bar{I}_E = \bar{I}'_E + \bar{I}''_E = -6.5 + 3j$$, per cui

coniugato della corrente

$$\dot{P}_E = \frac{1}{2}\bar{E}\bar{I}_E^* = \left[\frac{1}{2}\cdot 50j\cdot \underbrace{(-6.5-3j)}_{\bar{I}^*}\right] = 75 - 162,5j$$

potenza complessa

$z = x + jy$, il coniugato di z, rappresentato come $\bar{z}$ o z^* è:
$z^* = x - yj$

Quindi la potenza attiva P_E è:

$P_E = +75\,W$, la potenza ~~assorbita~~ attiva è positiva, quindi il generatore eroga potenza attiva.

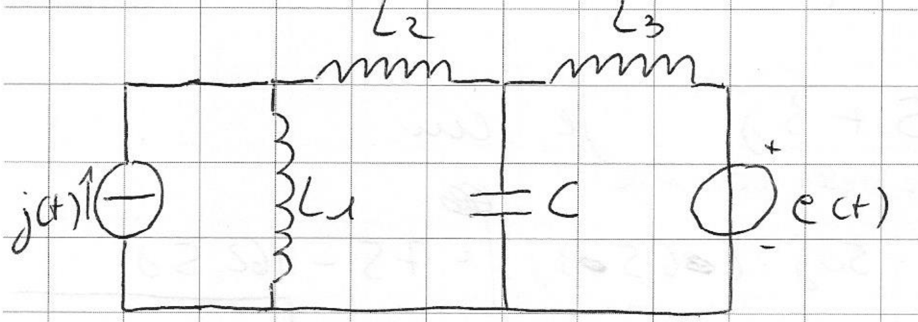
Se $P_E < 0$, la potenza ~~assorbita~~ attiva è negativa, quindi il generatore assorbe potenza attiva.

ATTENZIONE: utilizzando la sovrapposizione degli effetti si devono trovare prima le correnti e le tensioni totali e poi si possono calcolare le potenze; non ha senso calcolare le potenze complesse nei singoli sottocircuiti.
In pratica NON VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DELLE POTENZE
Occorre prima calcolare correnti e tensioni totali e poi le potenze.
Se i generatori sono isofrequenziali si possono sommare i fasori; se i generatori non sono isofrequenziali si possono sommare soltanto le grandezze nel tempo, in quest'ultimo caso il metodo di risoluzione del circuito è obbligatoriamente quello di sovrapposizione degli effetti.

AV28.5

Esempio 3. Prova del 20 Luglio 2012

· Determinare la potenza attiva erogata dal generatore di tensione.



$e(t) = 40 \cos(1000t)$ V

$j(t) = 10 \sin(1000t)$ A

$L_1 = 1$ mH

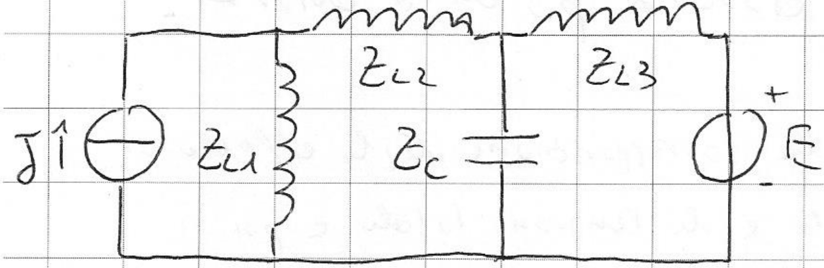
$L_2 = 1$ mH

$L_3 = 1$ mH

$C = 1$ mF

Come già detto, anche se gli induttori e il condensatore non assorbono potenza attiva, un generatore può erogare potenza attiva che viene assorbita completamente dall'altro generatore. Pertanto non è detto che il risultato finale sia 0.

Per prima cosa si passa ai fasori e alle impedenze.



$\bar{E} = 40j$

$\bar{J} = 10$ (Riferimento di fase: seno)

$\dot{Z}_{L1} = j$

$\dot{Z}_{L2} = j$

$\dot{Z}_{L3} = j$

$\dot{Z}_C = -j$

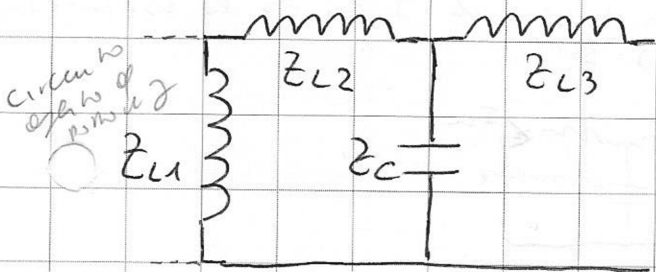
Il condensatore non è in serie o in parallelo con gli induttori, quindi in linea di principio non c'è risonanza, ma le cose possono cambiare a seconda del metodo utilizzato.

Con il metodo delle leggi di Kirchhoff, non c'è. Se si risolve con Norton c'è, idem con il metodo di sovrapposizione degli effetti.

AV 28.6

Risoluzione con il teorema di Norton, per cui dobbiamo determinare la impedenza equivalente e la corrente di corto circuito.

Per determinare l'impedenza equivalente la rete deve essere resa passiva ed essa deve essere trovata ai capi del generatore di tensione perché la corrente che ci interessa è I_E



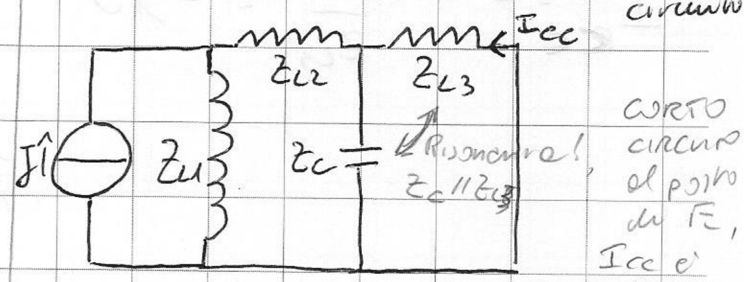
~~Resistenza~~ Z_C.

Partendo da sinistra verso destra:

Z_{L1} e Z_{L2} sono in serie; questa serie è in // con Z_C; tutto questo è in serie con Z_{L3}:

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_{L3} + \dot{Z}_C // (\dot{Z}_{L1} + \dot{Z}_{L2}) = -j$$

calcolo della corrente di corto circuito



In questo sottocircuito, derivato dal metodo di risoluzione scelto (Norton), Z_C e Z_{L3} sono in parallelo e quindi c'è risonanza (che non c'è nel circuito dato).

C'è una risonanza parallelo quindi Z_{L3} e Z_C si comportano come un circuito aperto.

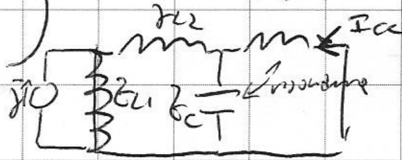
$Z_C // Z_{L3}$ è un circuito aperto, nel parallelo non passa corrente e quindi anche all'interno di Z_{L2} non passa corrente. Quindi tutta la corrente J passa per Z_{L1}, quindi la tensione ai capi di Z_{L1} vale $\dot{J} \cdot \dot{Z}_{L1}$ e quindi, visto che per Z_{L2} non passa corrente, la caduta di tensione su Z_{L2} è nulla, quindi la caduta di tensione ai capi di Z_{L1}

AV. 28.7

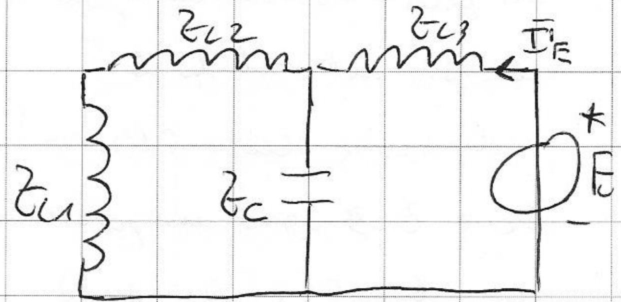
coincide con quella ai capi di Z_C che coincide con la caduta di tensione ai capi di Z_{L3}.
Per cui se la tensione ai capi di L_1 vale $\dot{J} \cdot Z_{L1}$ allora la corrente che attraversa Z_{L3} sarà $\dot{J} \cdot \frac{\dot{Z}_{L1}}{Z_{L3}}$, col segno meno perché di verso opposto.
Quindi

$$\bar{I}''_{CC} = -\dot{J} \cdot \frac{Z_{L1}}{Z_{L3}} = -10$$

Z_C e Z_{L3} in risonanza parallelo => circuito aperto => L_2 non passa corrente => tutta la corrente fluisce in L_1 => tensione ai capi di L_1 = tensione ai capi di C = tensione ai capi di L_3 vale $\bar{J} \cdot Z_{L1}$ => la corrente I_{cc} vale $\bar{J} \cdot \frac{Z_{L1}}{Z_{L3}}$.



Proviamo con il metodo di sovrapposizione degli effetti: due sottocircuiti



Primo sottocircuito: J sostituito da un circuito aperto.
Dobbiamo trovare l'impedenza equivalente ai capi del generatore E.

$$\bar{I}'_E = \frac{\bar{E}}{(Z_{L1}+Z_{L2})//Z_C + Z_{L3}} = -40$$

Secondo sottocircuito: E è sostituito da un cortocircuito.
Questo è uguale, casualmente, al circuito per il calcolo della corrente di corto circuito $\bar{I}_{cc}$ visto prima quindi

$$\bar{I}''_E = -\bar{J} \cdot \frac{\dot{Z}_{L1}}{Z_{L3}} = -10$$

$\bar{I}_{cc}$, osservazioni

$Z_C \,//\, Z_{L3} \Rightarrow$ Risonanza //, comportamento come un circuito aperto $\Rightarrow$ Z_{L2} non circola corrente.

Tutta la corrente circola in Z_{L1}, quindi la tensione ai capi di $\bar{J}$, di Z_{L1}, ma anche di Z_C e Z_{L3}, è $\bar{J}\, Z_{L1}$.

Non c'è caduta di tensione in Z_{L2} perché non circola corrente.

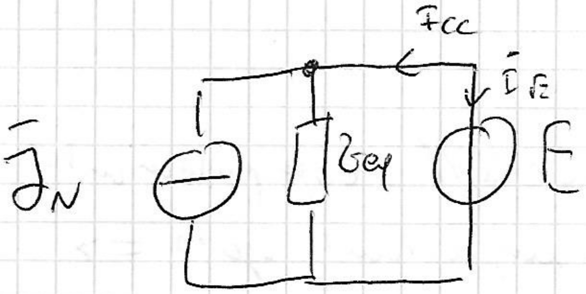
Quindi $\bar{V}_{ZL1} = \bar{J}\, Z_{L1}$, ma $\bar{V}_{ZL1} = \bar{V}_{ZC} = \bar{V}_{ZL3}$ e

$V_{ZL3} = \bar{I}_{cc} \cdot Z_{L3}$, quindi essendo $\bar{V}_{ZL1} = \bar{V}_{ZL3}$

essiamo $\bar{J}\, Z_{L1} = \bar{I}_{cc} \cdot Z_{L3} \Rightarrow$

$$\bar{I}_{cc} = \bar{J} \cdot \frac{Z_{L1}}{Z_{L3}} \;!!!$$

$\circ\circ/\circ\circ$



$$\bar I_E = \frac{\bar E}{Z_{eq}} - \bar I_{cc}$$

sottocircuito I, $\bar E$ zero

$$\bar I'_E = -\bar I_{cc}$$

sottocircuito II J_N zero

$$\bar I''_E = \frac{\bar E}{Z_{eq}}$$

$$\bar I_E = \bar I'_E + \bar I''_E$$

$$Z_{L1} + Z_{L2} = 2j$$

$$(Z_{L1} + Z_{L2}) // Z_c = \frac{(Z_{L1} + Z_{L2}) \cdot Z_C}{Z_{L1} + Z_{L2} + Z_C} =$$

$$= \frac{2j \cdot -j}{j} = -2j$$

$$(Z_{L1} + Z_{L2}) // Z_C + Z_{L3} = -j$$

$$\bar{E} = 40j$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{I}'_R = \frac{40j}{-j} = -40$$

AV.28.d

Abbiamo dunque:

Sovrapposizione $\bar{I}_E = \bar{I}'_E + \bar{I}''_E = -50$

e

Norton (disegnando il circuito) $\bar{I}_E = \dfrac{\bar{E}}{\dot{Z}_{eq}} - \bar{I}_{cc} = -50$

↳ corrente che attraversa il generatore di tensione

Per cui, calcolando la potenza complessa $\dot{P} = \frac{1}{2} \bar{V}\bar{I}^*$ abbiamo

coniugato di $\bar{I}_E$

$$\dot{P}_E = \frac{1}{2} \underset{=40j}{\bar{E}} \, \underset{=-50}{\bar{I}_E^*} = -1000j$$

Per cui la potenza attiva, che è la parte reale di $\dot{P}_E$, è nulla

La potenza attiva erogata dal generatore risulta nulla. Ciò è dovuto sia all'assenza di resistori nella rete, sia ai particolari valori di $e(t)$ e $j(t)$.
(Provare con $j(t) = 10 \cos(1000t)$ A)

Consigli nel calcolo delle potenze complesse

- Ricordarsi sempre del "coniugato" nell'espressione della potenza complessa

- Ricordarsi di "$\frac{1}{2}$" nelle formule delle potenze, quando si usano i valori massimi.

- Se si usa la sovrapposizione degli effetti, si devono prima sommare le tensioni e le correnti e poi calcolare le potenze.

- I resistori assorbono solo potenze attive, gli induttori e i condensatori assorbono solo potenza reattiva (rispettivamente >0 e <0).

- Mai passare la potenza complessa nel tempo! Non ha senso ed è un grave errore!

AV 28.10

Aula Virtuale 34

TRANSITORI CON FORZAMENTO SINUSOIDALE

38'04"
Prof Dario Assante

Nelle reti in evoluzione dinamica il forzamento non è necessariamente costante. Ad es. può anche essere di tipo sinusoidale.

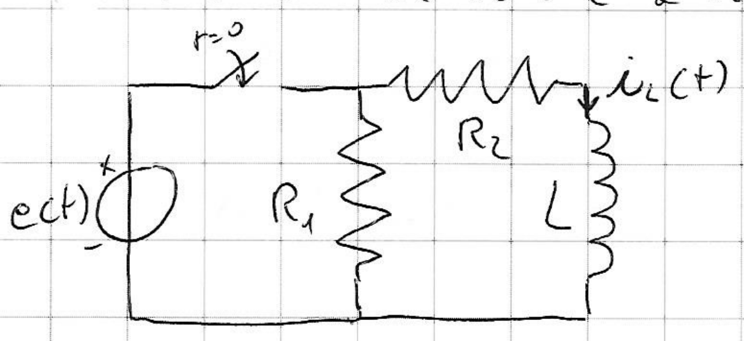
Bisogna ricordare che il forzamento influisce solo sulla soluzione a regime della rete. (integrale particolare)

Quindi l'omogenea associata si trova sempre allo stesso modo, che il forzamento sia costante o sinusoidale.

Avremo dunque un transitorio in presenza di un forzamento sinusoidale.

Esercizio 1.

Determinare la corrente che attraversa l'induttore in ogni istante. La rete è a regime per $t<0$



Valore massimo

$e(t) = 10 \cos(200t)$ V

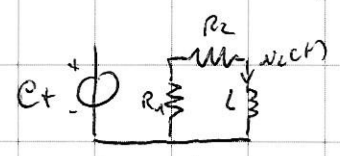
$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$L = 5$ mH

1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione.

Prima dell'istante di commutazione, della chiusura dell'interruttore, la rete è a regime e naturalmente a riposo.



$t<0$

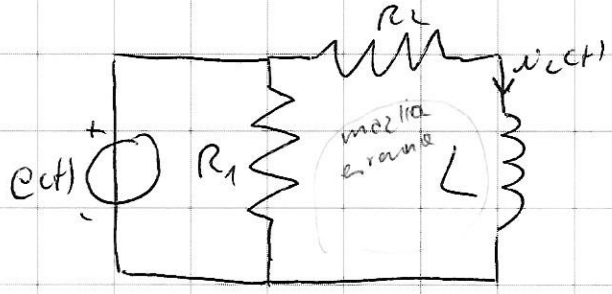
$i_L(t) = 0$ A $\Rightarrow$ 2. Variabili di stato nell'istante di commutazione:

$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$ A

Quindi la condizione iniziale è $i_L(0) = 0$ A.
Questa è la sola condizione iniziale poiché il componente dinamico, l'induttore, è unico.
Abbiamo un transitorio del 1° ordine.

3. Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento della variabile di interesse dopo l'istante di commutazione, in questo caso $t>0$.

PER RETI MOLTO SEMPLICI BASTA SCRIVERE LE LK.



questa LKT è l'eq. diff. che serve

$$L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_L = e(t)$$

LKT alla maglia esterna

n.b.: ovviamente il tipo di forzamento non influenza le Lk.
Il Resistore R_1, in parallelo a $e(t)$, non influisce l'andamento della corrente i_L.

4. Risolvere l'omogenea associata.
Un transitorio del 1° ordine ammette una unica soluzione.

parte reale degli autovalori deve essere negativa

$$\underbrace{\lambda + \frac{R}{L} = 0}_{\text{segni concordi!}} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{R}{L} = -2\omega \Rightarrow i_{L0}(t) = k e^{-2\omega t}$$

λ_1 → unico autovalore

n.b. il tipo di forzamento non influenza neanche il calcolo dell'omogenea, ovviamente.

5. Determinare l'integrale particolare

a. Primo metodo: soluzione matematica => metodo di somiglianza

visto che il forzamento è una sinusoidale, si cerca l'integrale come combinazione lineare di sinusoidi

stessa pulsazione del forzamento

Posto $i_{LP}(t) = A\,sen(200t) + B\cos(200t)$,

si sostituisce nella equazione differenziale e si trova:

$A\cos(200t) - B\,sen(200t) + 10A\,sen(200t) + 10B\cos(200t) = 10\cos(200t)$

$\Downarrow$

termini in seno
termini in coseno
$\begin{cases} -B + 10A = 0 \\ A + 10B = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,099 \\ B = 0,99 \end{cases}$

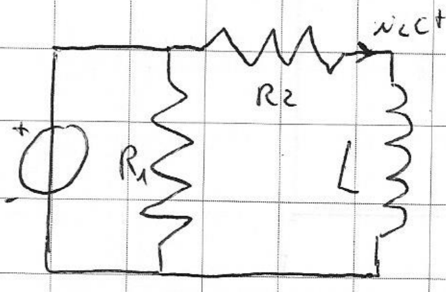
$\Downarrow$

$i_{LP}(t) = 0,099\,sen(200t) + 0,99\cos(200t)$

b. Secondo metodo: soluzione fisica.

La soluzione a regime del circuito coincide con l'integrale particolare. Quindi risolvere la rete a regime equivale a determinare l'integrale particolare.

La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della equazione differenziale.



Siamo in regime sinusoidale, servono i fasori

$\bar{E} = 10 \quad \dot{Z}_{R2} = 10 \quad \dot{Z}_L = j$

è necessario passare nel tempo

$i_{LP} = \dfrac{\bar{E}}{\underbrace{\dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_L}} = 0,99 - 0,099j \Rightarrow i_{LP}(t) = 0,099\,sen(200t) + 0,99\cos(200t) = 0,99\cos(200t + 1,47)$

ai capi della serie R_2 e L c'è la tensione E.

modulo $\sqrt{0,99^2 + 0,099^2}$

fase $\arctan -\frac{0,099}{0,99}$ rad.?

AV34.3

6. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare per determinare la soluzione complessiva.

Prima

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) + i_{Lo}(t) = 0,099\,\text{sen}(2\omega_0 t) + 0,99\cos(2\omega_0 t) + ke^{-2\omega_0 t}$$

e poi

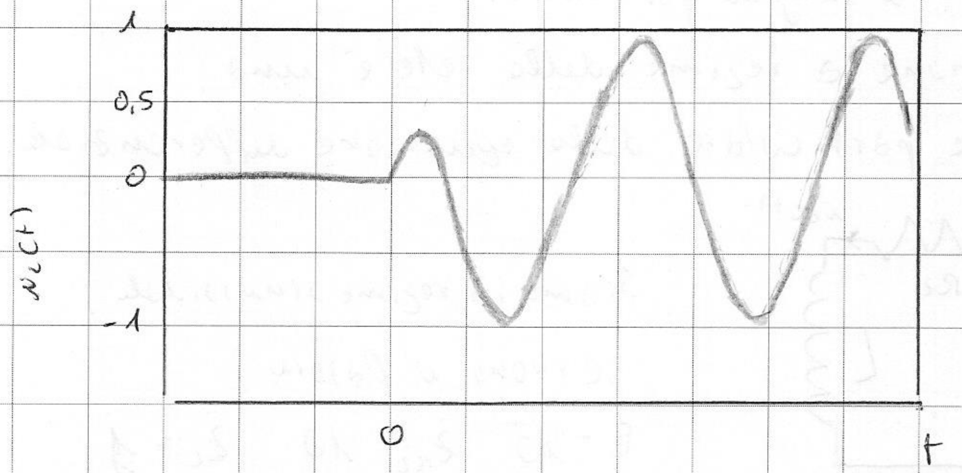
$$\begin{cases} i_L(t) = 0,099\,\text{sen}(2\omega_0 t) + 0,99\cos(2\omega_0 t) + ke^{-2\omega_0 t} \\ i_L(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$k = -0,99$ ja un assiemo

(a_Regime) $i_L(t) = 0,099\,\text{sen}(2\omega_0 t) + 0,99\cos(2\omega_0 t) - 0,99\,e^{-2\omega_0 t}$ A

Attenzione: MAI IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI ~~sulla~~ SULLA SOLUZIONE GENERALE.

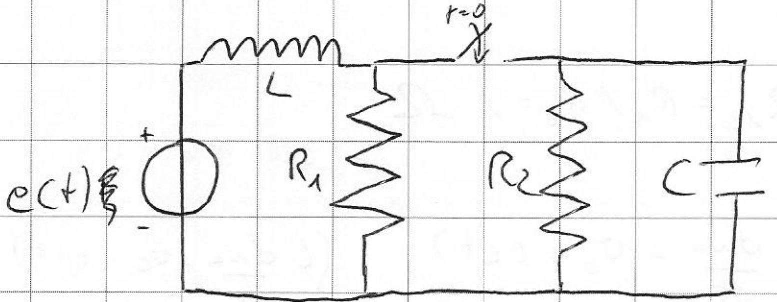


$$i_L(t) = \begin{cases} 0\ \text{A} & t \le 0 \\ \text{a\_Regime A} & t \ge 0 \end{cases}$$

AV 34.4

Esercizio 2

Determinare la tensione ai capi del condensatore (= v_C) in ogni istante. La rete è a regime per $t < 0$.



$e(t) = 60 \operatorname{sen}(5\omega t)\ V$

$R_1 = 2\ \Omega$

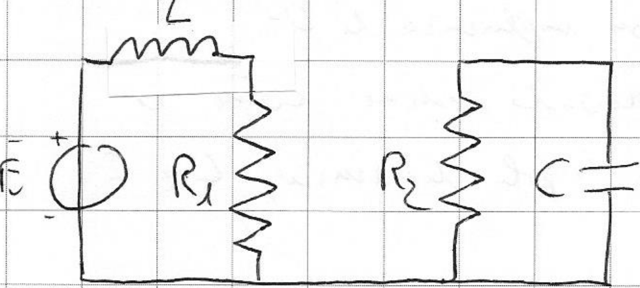
$R_2 = 2\ \Omega$

$L = 4\ mH$

$C = 2\ mF$

1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione

Prima della chiusura dell'interruttore, la rete è a regime sinusoidale, si risolve facilmente con i fasori.



$\bar{E} = 60$

$\dot{Z}_{R1} = 2 \qquad \dot{Z}_{R2} = 2$

$\dot{Z}_L = 2j$

$\dot{Z}_C = -j$

corrente nella maglia di sinistra

$$\bar{i}_L = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_L} = 15(1-j) \qquad \bar{V}_C = 0$$

in questa maglia non passa corrente perché è isolata dal generatore.

$$i_L(t) = 15\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(5\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \qquad v_C(t) = 0$$

arctan(-1) in radianti!

2. Determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione.

$t < 0$

$i_L(t) = 15\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(5\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

$v_C(t) = 0$

$\Downarrow$ Per la continuità delle variabili di stato

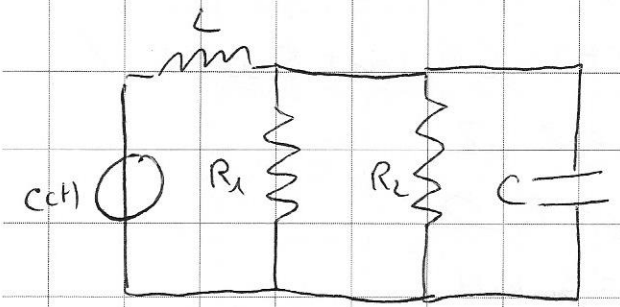
$i_L(0^-) = i_L(0^+) = -15\ A$

$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0\ V$

AV 34.5

3. Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento della variabile di interesse dopo l'istante di commutazione.

È sufficiente analizzare le ckt.



$R_{12} = R_1 // R_2 = 1\ \Omega$

LKT alla maglia SX

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} + v_C = e(t) \\ v_C = R_{12}\, i_{R12} \quad \text{LKT alla maglia dx} \\ i_L = i_{R12} + C\dfrac{dv_C}{dt} \quad \text{LKC al nodo del parallelo } R_1 // R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} + v_C = e(t) \\ i_L = \dfrac{v_C}{R_{12}} + C\dfrac{dv_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{1}{R_{12}C}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{e(t)}{LC}$$

n.b.: ovviamente il tipo di forzamento non influenza le ckt.

L'equazione differenziale è del secondo ordine come il transitorio in quanto ci sono due bipoli dinamici, L e C.

4. Risolvere l'omogenea associata

$$\underbrace{\lambda^2 + \frac{1}{R_{12}C}\lambda + \frac{1}{LC}}_{\text{segno concorde}} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -500 \pm 250\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$v_{C0}(t) = k_1 e^{-426t} + k_2 e^{-73t}$$, k_1 e k_2 da determinare

n.b.: il tipo di forzamento non influenza neanche il calcolo dell'omogenea, ovviamente.

5. Determinare l'integrale particolare

Soluzione matematica - metodo di somiglianza

visto che il forzamento è una sinusoidale, si cerca l'integrale come combinazione lineare di sinusoidi. Posto $v_{Cp}(t) = A\sin(500t) + B\cos(500t)$, si sostituisce nella equazione differenziale e si trova:

$-2A\,\text{sen}(500t) - 2B\cos(500t) + 2A\cos(500t) - 2B\,\text{sen}(500t) +$

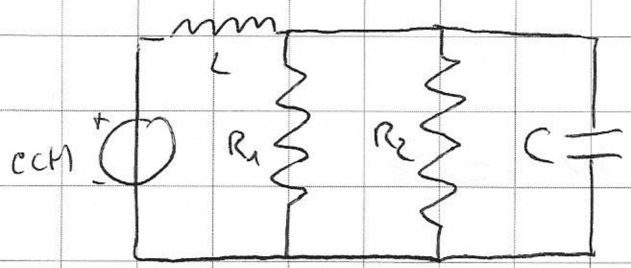
$+A\,\text{sen}(500t) = 60\,\text{sen}(500t)$

$$\begin{array}{l} \text{termini in seno} \\ \text{termini in coseno} \end{array} \begin{cases} -2A - 2B + A = 60 \\ -2B + 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -12 \\ B = -24 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad v_{cp}(t) = -12\,\text{sen}(500t) - 24\cos(500t)$ integrale particolare

Soluzione fisica - risoluzione del circuito a regime

La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della equazione differenziale. In questo caso usiamo i fasori.



$\bar{E} = 60 \qquad \dot{Z}_{R1} = \dot{Z}_{R2} = 2$

$\dot{Z}_L = 2j$

$\dot{Z}_C = -j$

Partitore di tensione !!!

$$\bar{V}_{cp} = \bar{E} \cdot \frac{\dot{Z}_{R12} \,//\, \dot{Z}_C}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_{R12} \,//\, \dot{Z}_C} = -12 - 24j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{cp}(t) = -12\,\text{sen}(500t) - 24\cos(500t) =$$

$$= 12\sqrt{5}\,\text{sen}(500t + 2{,}68)$$

$(\pi \quad \arctan\frac{-24}{-12} = 1{,}11)$

6. Determinare la seconda condizione iniziale

Per reti molto semplici bastano le LK, in questo caso già scritte.

$$\begin{cases} L\frac{di_L}{dt} + v_c = e(t) \\ i_L = \frac{v_c}{R_{12}} + C\frac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

si ricava $\frac{dv_c}{dt}$, che può non essere continua

$$\Rightarrow \frac{dv_c}{dt}(0^+) = \frac{i_L(0^+)}{C} - \frac{v_c(0^+)}{R_{12}} = -7500 \text{ V/s}$$

7. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare per determinare la soluzione complessiva

8. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione complessiva per determinare le costanti di integrazione.

Prima

$$v_c(t) = v_{cp}(t) + v_{co}(t) = -12 \,\text{sen}(500t) - 24 \cos(500t) + k_1 e^{-426t} + k_2 e^{-73t}$$

e poi

$$\begin{cases} v_c(t) = -12 \,\text{sen}(500t) - 24 \cos(500t) + k_1 e^{-426t} + k_2 e^{-73t} \\ v_c(0) = 0 \\ \dfrac{d v_c}{dt}(0^+) = -7500 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

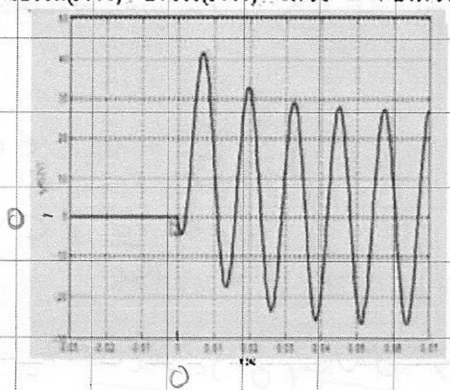
$$k_1 = -0{,}71 \quad e \quad k_2 = 24{,}71 \implies$$

$$\implies v_c(t) = -12 \,\text{sen}(500t) - 24 \cos(500t) - 0{,}71 e^{-426t} + 24{,}71 e^{-73t} \text{ V}$$

NON IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI SULL'OMOGENEA

Soluzione finale

$$v_c(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ -12 \,\text{sen}(500t) - 24 \cos(500t) - 0.71 e^{-426t} + 24.71 e^{-73t} \text{ V} & t \ge 0 \end{cases}$$



a regime ci arriviamo attraverso un transitorio.

AV 34.8

Se l'interruttore è in apertura:
per $t<0$ l'interruttore è chiuso e andando a risolvere la rete per $t<0$ sia l'induttore sia il condensatore sono alimentati e il valore di i_L sarebbe di tipo sinusoidale, così come quello di v_C e diversi da zero.
Nell'istante di commutazione sia $i_L(0)$ che $v_C(0)$ avrebbero avuto un valore non nullo.
Poi si studiava il transitorio allo stesso modo, con la scrittura delle equazioni differenziali tenendo conto che l'interruttore si apriva invece di chiudersi.
Probabilmente sarebbe stato un transitorio del 1° ordine sia per quanto riguarda l'induttore che per il condensatore.

AV.34.9

AV 34.10

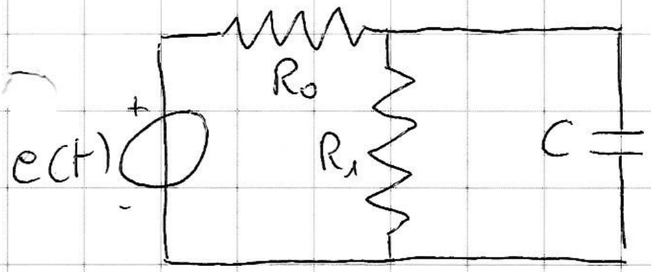
Aula Virtuale 41.1 Inizio 10:25

Soluzione della prova del 30 Novembre 2011
40'10"

(Punti 15)

Rete in evoluzione dinamica (primo esercizio)

- Determinare la tensione ai capi del condensatore in ogni istante.
- Facoltativo: determinare l'energia dissipata dal resistore R_0 dall'istante $t=0$ s all'istante $t=1$ s.



$$e(t) = \begin{cases} -10\,V & t<0 \\ 10\,V & t>0 \end{cases}$$

$R_0 = 12\ \Omega$

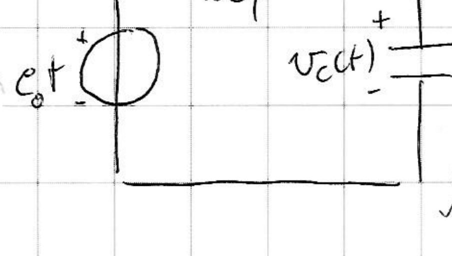
$R_1 = 6\ \Omega$

$C = 250\ \mu F$

La rete può essere risolta in molti modi: le LK, applicare Thevenin; visto che la rete è del 1° ordine (un solo componente dinamico, il condensatore), normalmente applicare Thevenin o Norton è abbastanza comodo.

La rete è del primo ordine e tempo-invariante; la topologia della rete è sempre la stessa, quindi è applicabile Thevenin* ai capi del condensatore C e la rete ricavata sarà il circuito per $t<0$ e per $t>0$, applicando Thevenin ai capi del condensatore abbiamo:

↳ la variabile di stato v_C è uguale alla tensione a vuoto!



applicazione del partitore

$$e_0(t) = e(t)\frac{R_1}{R_0+R_1} = \begin{cases} -3{,}3\,V & t<0 \\ 3{,}3\,V & t>0 \end{cases}$$

questa è la tensione vista ai morsetti di C

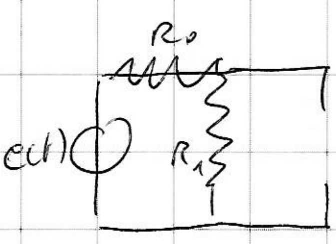
$$R_{eq} = \frac{R_0 R_1}{R_0+R_1} = 4\ \Omega$$

$R_0 // R_1$, perché è spento il generatore!

AV 41-T.1 * Norton se c'era un induttore I_{cc} = corrente che attraversa

Con $e_0(t)$ il generatore di tensione equivalente e R_{eq} una resistenza equivalente.

Il generatore $e_0(t)$ è calcolato come tensione a vuoto, quando cioè tolgo il condensatore e misuro la tensione ai suoi capi.



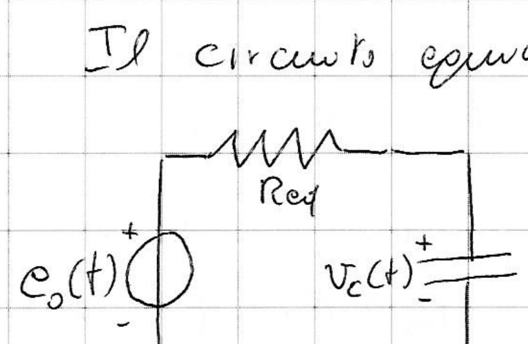
Con un partitore di tensione si calcola $e_0(t)$ perché la tensione ai capi del condensatore quando siamo a vuoto è uguale alla tensione ai capi di R_1, per cui abbiamo

$$e_0(t) = e(t) \cdot \frac{R_1}{R_0+R_1} = \begin{cases} -3{,}3\,V & t<0 \\ 3{,}3\,V & t>0 \end{cases}$$

La resistenza equivalente ai capi del condensatore, R_{eq} è calcolata come la resistenza ai capi del condensatore quando la rete è resa passiva, con il generatore di tensione $e(t)$ sostituito con un corto circuito:
in questo caso R_0 e R_1 sono in parallelo e quindi la resistenza equivalente di Thevenin è $R_{eq} = R_0 // R_1 = 4\Omega$

$$R_{eq} = \frac{R_0 \cdot R_1}{R_0+R_1} = 4\,\Omega$$

Il circuito equivalente di Thevenin è:



$$e_0(t) = e(t) \cdot \frac{R_1}{R_0+R_1} = \begin{cases} -3{,}3\,V & t<0 \\ 3{,}3\,V & t>0 \end{cases}$$

$$R_{eq} = \frac{R_0 \cdot R_1}{R_0+R_1} = 4\,\Omega$$

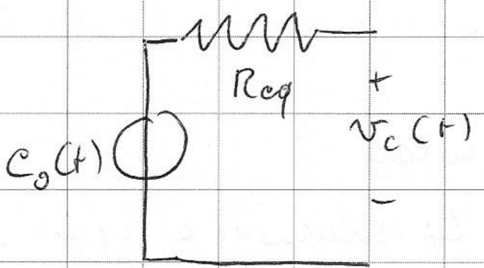
1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione.

. $t<0$, rete a regime (stazionario), supponendo il generatore di tensione attivo "da sempre" e se anche c'è stato un transitorio di attivazione, si è estinto.

Il regime è stazionario che il generatore di tensione è costante.

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto.

Quindi la rete è:



per $t<0$

$v_c(t) = e_0(t) = -3{,}3$ V

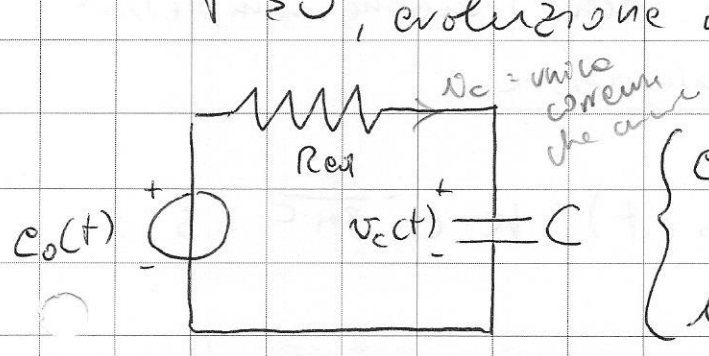
quindi (2. determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione):

$v_c(0) = -3{,}3$ V

che è la condizione iniziale del transitorio.

3. Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento della variabile di interesse dopo l'istante di commutazione.

$t \geq 0$, evoluzione dinamica della rete.



corrente che circola in senso orario

$$\begin{cases} e_0 - R_{eq}\, i - v_c = 0 & \text{LKT alla unica maglia} \\ i = C \dfrac{dv_c}{dt} & \text{caratteristica del condensatore} \end{cases}$$

da cui ricaviamo l'equazione

differenziale del primo ordine seguente:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_{eq}C} = \frac{e_0}{R_{eq}C}$$ Eq. diff.le in v_C che regola l'andamento della tensione.

4. Risolvere l'omogenea associata

$$\lambda + \frac{1}{R_{eq}C} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{R_{eq}C}$$

$k\Omega$ = $250 \cdot 10^{-6}$ F

"costante di tempo" $= \tau = R_{eq} \cdot C$

$$\Rightarrow v_{C0}(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = k \cdot e^{-\frac{t}{R_{eq} \cdot C}}$$

5. Determinare l'integrale particolare

sol. matematica:

Forzamento è una costante, quindi posto $v_{CP}(t) = A$ abbiamo

$$0 + \frac{A^{=v_{CP}}}{R_{eq}C} = \frac{e_0}{R_{eq}C} \Rightarrow A = e_0$$

$$v_{CP}(t) = e_0$$

sol. fisica:

La soluzione a regime del circuito coincide con l'integrale particolare

$$v_{CP}(t) = e_0$$

$\rightarrow$ 3,3 V $\leftarrow$

6. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare per determinare la soluzione complessiva
7. Imporre la condizione iniziale nella soluzione complessiva per determinare le costanti di integrazione.

Prima

$$v_C(t) = v_{C0}(t) + v_{CP}(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{R_{eq} \cdot C}} + 3,3$$

e poi

$$\begin{cases} v_C(t) = k e^{-\frac{t}{R_{eq}C}} + 3.3 \\ v_C(0) = -3,3 \end{cases} \Rightarrow k = -6,6$$

AV41-II.4

Quindi la soluzione finale sarà:

$$v_c(t) = \begin{cases} -3.3\text{ V} & t<0 \\ 3.3\left(1-2e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}\right) & t>0 \end{cases}$$

Fine Esercizio 1

Aula → 15'   12:00 = 1h35

15' : 95'

Risposta facoltativa Esercizio 1:
energia dissipata da Ro nell'intervallo [0, 1]

Nel circuito iniziale $t<0$ la tensione ai capi di Ro, applicando la LK alla maglia esterna, si può scrivere come la tensione "e" meno la tensione v_c:

$$v_{R0}(t) = e(t) - v_c(t) = \underbrace{6,7 + 6.6 \cdot e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}}_{\text{Tensione ai capi del resistore } R_0}$$

$$v_{R0}(0) = e(0) - v_c(0)$$

La potenza istantanea dissipata dal resistore Ro vale:

$$p_{R0}(t) = \frac{v_{R0}^2(t)}{R_0} = 3,74 + 7.37\, e^{-\frac{t}{R_{eq}C}} + 3.63\, e^{-\frac{2t}{R_{eq}C}}$$

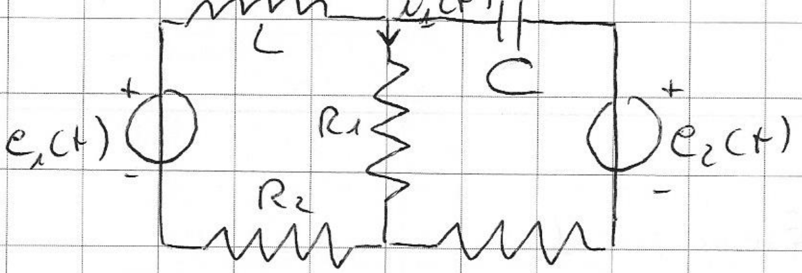
L'energia dissipata dal resistore Ro nell'intervallo [0, 1] sarà:

$$W_{[0,1]} = \int_0^1 p_{R0}(t)\,dt = \ldots$$

$$\simeq 3,75\text{ W}$$

ESERCIZIO 2. Rete in regime sinusoidale.

· Determinare la corrente $i_1(t)$ che attraversa il resistore R_1.



stessa pulsazione di e_1 e e_2

$e_1(t) = 20 \, \text{sen}(500t)$ V

$e_2(t) = 30 \cos(500t)$ V

$C = 1$ mF

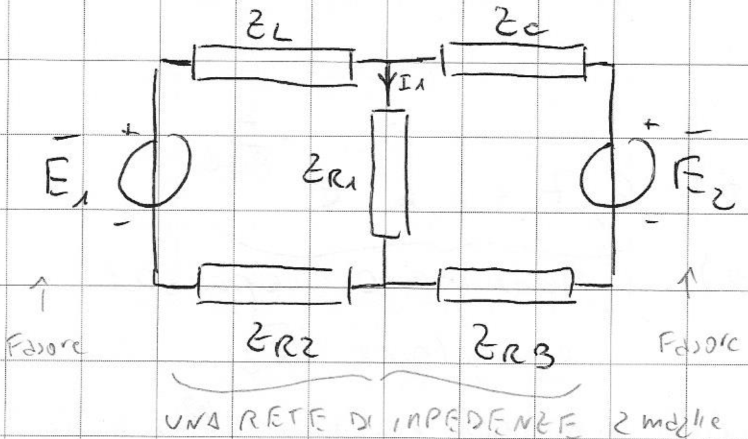
$L = 12$ mH

$R_1 = 2 \ \Omega$

$R_2 = 4 \ \Omega$

$R_3 = 4 \ \Omega$

Prima di tutto si introducono i fasori, perché la rete è in regime sinusoidale



$\bar{E}_1 = 20$ (Fasore di rif.: seno, E_1 sull'asse reale)

$\bar{E}_2 = 30j$ ($e_2(t)$ è sfasato di 90° rispetto $e_1(t)$)

$\dot{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C} = -2j$

$\dot{Z}_L = j\omega L = 6j$

$\dot{Z}_{R1} = 2$

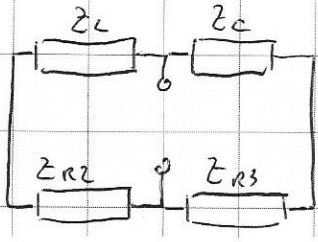
$\dot{Z}_{R2} = 4$

$\dot{Z}_{R3} = 4$

Ora possiamo risolvere questa rete, con uno dei metodi conosciuti: le LK, il metodo dei potenziali nodali (verrà fuori una eq. differenziale con una incognita), il metodo delle correnti di maglia, la sovrapposizione degli effetti, Thevenin (→ generatori tensione) (che può portare al calcolo della corrente richiesta, visto che calcola una sola grandezza per volta).

Dunque si sceglie di risolvere la rete applicando Thevenin, al resistore R_1.

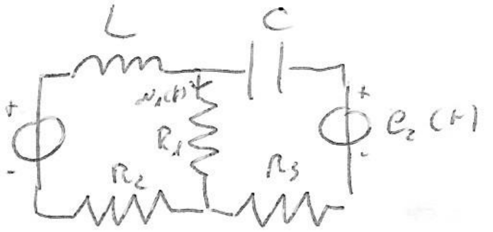
1°: si determina la Impedenza equivalente (si rende passiva la rete e si deve calcolare l'impedenza vista dai due morsetti)



$\underbrace{(Z_L + Z_{R2})}_{\text{serie}} \,//\, \underbrace{(Z_C + Z_{R3})}_{\text{serie}}$

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{(\dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_L)(\dot{Z}_{R3} + \dot{Z}_C)}{\dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_{R3} + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C} = \frac{18}{5} + \frac{1}{5}j$$

PROVA 30/11/2011 Esercizio 2



$e_1(t) = 20 \operatorname{sen}(500t)$ V

$e_2(t) = 30 \cos(500t)$ V

$C = 1$ mF $= 10^{-3}$ F

$L = 12$ mH $= 12 \cdot 10^{-3}$ H

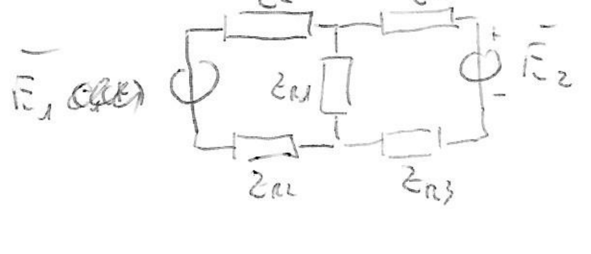
$R_1 = 2\ \Omega$

$R_2 = 4\ \Omega$

$R_3 = 4\ \Omega$

Determinare $v_1(t)$ che attraversa R_1

. Regime sinusoidale => FASORI



$\bar{E}_1 = 20$ seno come fase riferimento

$\bar{E}_2 = 30j$

$\dot{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{1}{j \cdot 500 \cdot \frac{1}{10^3}} = -2j$

$\dot{Z}_L = j\omega L = j\,500 \cdot \dfrac{12}{1000} = 6j$

$\dot{Z}_{R1} = R_1 = 2$

$Z_{R2} = R_2 = 4$

$Z_{R3} = R_3 = 4$

Per il calcolo di $\bar{I}_1$ si applica il metodo di sovrapposizione degli effetti, calcolando $\bar{I}_1'$ quando è spento $\bar{E}_2$ e calcolando $\bar{I}_1''$ quando è spento $\bar{E}_1$; $\bar{I}_1 = I_1' + I_1''$.
Spegnendo uno dei due generatori a turno si ottiene un sottocircuito.
La somma fasoriale è possibile in quanto i due generatori sono isofrequenziali, stessa pulsazione ω di 50 rad/s, vale la relazione $\omega = 2\pi f$.

Sottocircuito 1: è spento $\bar{E}_2$ => sostituito con un cortocircuito.
La corrente di $\bar{E}_1$ subisce una ripartizione nel ~~parallelo~~ serie tra $\dot{Z}_C$ e Z_{R3} che è in parallelo con Z_{R1} ~~nella serie $Z_{R1} + Z_{R2}$~~

L'impedenza equivalente al circuito è $\dot{Z}'_{eq} = ((Z_C + Z_{R3}) // Z_{R1}) + \dot{Z}_L + Z_{R2}$

$$\bar{I}'_R = \frac{\bar{E}_1^*}{Z'_{eq}}$$

$$\bar{I}'_1 = \frac{\dot{Z}_C + \dot{Z}_{R3}}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_{R3} + \dot{Z}_{R1}} \cdot \bar{I}'_E = \ldots$$

corrente in $\dot{Z}_{R1}$

Sottocircuito 2: è spento $\bar{E}_1$

La corrente di $\bar{E}_2$ $= \bar{I}''_E$ si ripartisce nella serie $\underset{\text{induttore}}{\dot{Z}_L} + \dot{Z}_{R2}$ e in $\dot{Z}_{R1}$.

L'impedenza complessiva è $\dot{Z}''_{eq} = ((\underset{\text{induttore}}{\dot{Z}_L} + \dot{Z}_{R2}) // \dot{Z}_{R1}) + \underset{\text{cond.}}{\dot{Z}_C} + \dot{Z}_{R3}$

$$\bar{I}''_E = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}''_{eq}}$$

$$\bar{I}''_1 = \frac{\dot{Z}_L + \dot{Z}_{R2}}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_{R1}} = \ldots$$

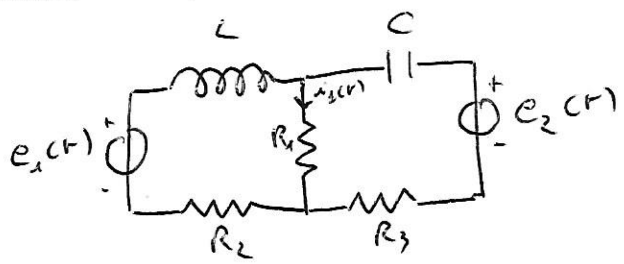
A conti fatti, in conclusione

$\bar{I}_1 = \bar{I}'_1 + \bar{I}''_1$, fasori → si deve passare al dominio nel tempo

Aula Virtuale n.1. Prova del 30 11 2011

Regime sinusoidale

Esercizio 2.



$e_1(t) = 20 \sin(500t)$ V

$e_2(t) = 30 \cos(500t)$ V

$C = 1$ mF

$L = 12$ mH

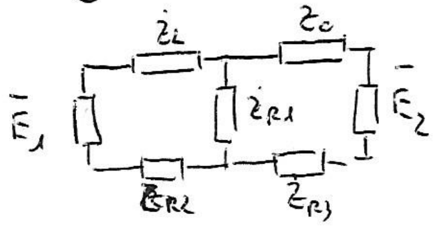
$R_1 = 2\ \Omega$

$R_2 = 4\ \Omega$

$R_3 = 4\ \Omega$

$i_1(t)$ in R_1 da determinare

Regime sinusoidale => si passa ai fasori



$\bar{E}_1 = 20$

$\bar{E}_2 = 30j$

seno come rif. dei fasori

$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 500 \cdot \frac{1}{1000}} \cdot \frac{1}{2} = -2j$

$\dot{Z}_L = j\omega L = j \cdot 500 \cdot 12 \cdot \frac{1}{1000} = 6j$

$\dot{Z}_{R1} = 2$

$\dot{Z}_{R2} = 4$

$\dot{Z}_{R3} = 4$

$\bar{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1$ con

$\underline{I}'_1$ e $\underline{I}''_1$ fasori della corrente calcolata col metodo di sovrapposizione degli effetti.

I'_1 quando è spento il generatore e_2 rappresentato dal fasore $\bar{E}_2$;

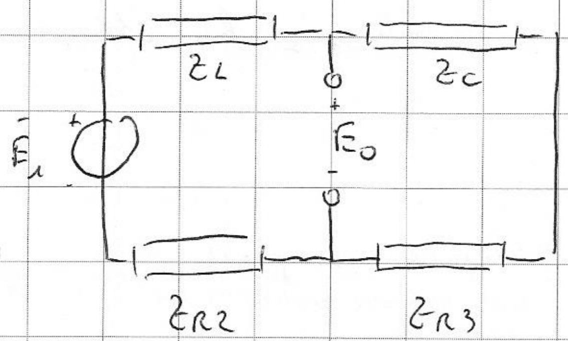
I''_1 quando è spento e_1, rappresentato da $\bar{E}_1$.

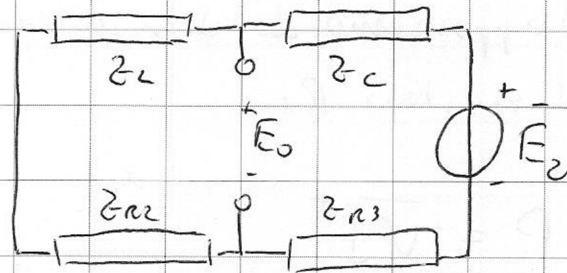
Si calcola l'impedenza equivalente

Determinazione della tensione a vuoto.

La tensione a vuoto è la tensione ai capi del resistore R_1, ovvero dell'impedenza $\dot{Z}_{R1}$, quando ho tolto il resistore, ovvero l'impedenza, dalla rete.

Si deve applicare un metodo, con quello della sovrapposizione degli effetti occorre applicare due partitori, cioè:

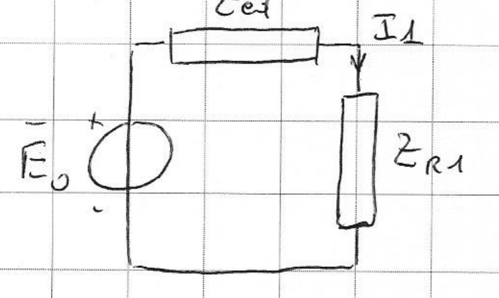




$$\bar{E}_0 = \bar{E}_1 \cdot \frac{\dot{Z}_{R3} + \dot{Z}_C}{\dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_{R3} + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C} + \bar{E}_2 \cdot \frac{\dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_L}{\dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_{R3} + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C} =$$

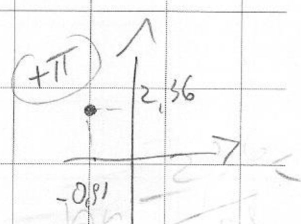
$$= -6 + 13j$$

In conclusione ottengo il circuito equivalente di Thevenin



$\bar{E}_0 = -6 + 13j$

$\dot{Z}_{eq} = \frac{18}{5} + \frac{1}{5}j$



$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_0}{\dot{Z}_{eq} + \dot{Z}_{R1}} = -0,99 + 2,36j$$

CORRENTE CHE CIRCOLA NELL'UNICA MAGLIA.

e passando al tempo $i_1(t) = 2,56 \operatorname{sen}(5\omega t + 1,97)$

$\sqrt{-0,99^2 + 2,36^2}$ modulo

$\arctan \frac{b}{a} + \pi$

AV41-II.7

CALCOLO DELLA POTENZA COMPLESSA

dal resistore R_1 dell'esercizio precedente.

Per il calcolo della potenza complessa devo determinare o una tensione o una corrente.

Supponiamo di aver determinato la corrente i_1 che attraversa il resistore R_1.

non è un numero complesso

$$P = \overline{V}\,\overline{I}^{*}$$ → coniugato di $\overline{I}$

potenze complesse (convenzione utilizzata ai valori efficaci)

con i fasori

$$P = \frac{1}{2}\overline{V}\,\overline{I}^{*}$$ → ai valori massimi

è un numero reale

Nel caso particolare della resistenza, poiché $V = Ri$, abbiamo

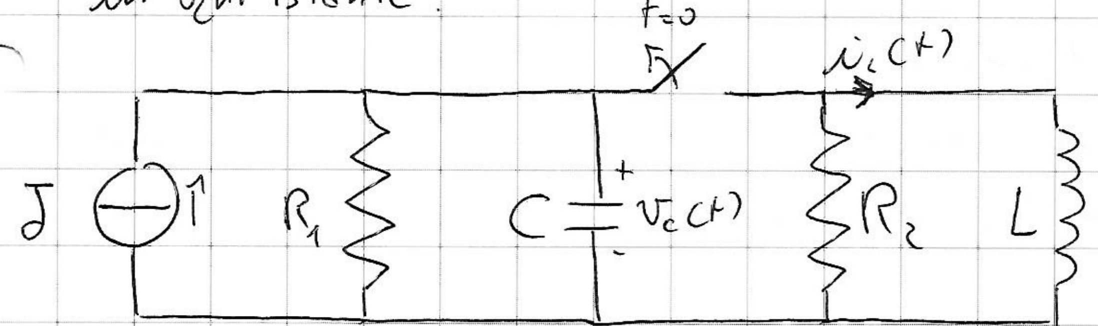
$$P = R\overline{I}^{2}$$ modulo del fasore di $\overline{I}$

Aula Virtuale 41.2

Soluzione della prova del 14 Dicembre 2011

(FONDAMENTI) Esercizio 1. Rete in evoluzione dinamica.

- L'interruttore si apre nell'istante $t=0$.
- Determinare la tensione ai capi del condensatore in ogni istante di tempo.
- Facoltativo: determinare la corrente che circola nell'induttore in ogni istante.

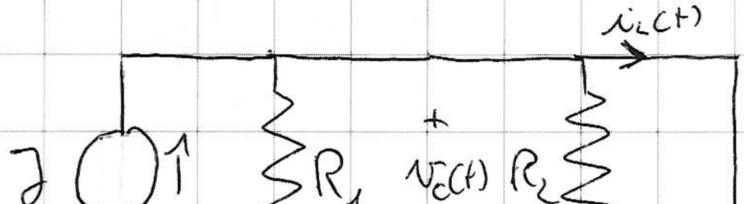


$J = 10\,A$
$R_1 = 8\,\Omega$
$R_2 = 10\,\Omega$
$L = 2\,mH$
$C = 500\,\mu F$

La presenza di due componenti dinamici (C e L) non vuol dire obbligatoriamente che ci sia una dinamica del 2° ordine.

1. Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione
   - $t<0$, rete a regime (stazionario, corrente costante)

a regime stazionario il condensatore è equivalente a un circuito aperto e l'induttore a un corto circuito; R_1 e R_2 sono in parallelo



la corrente J passa nel corto circuito e circola tutta nella maglia esterna. In R_1 e R_2 non passa corrente e la tensione ai loro capi è zero. Quindi

$v_C(t) = 0\,V$

$i_L(t) = J = 10\,A$

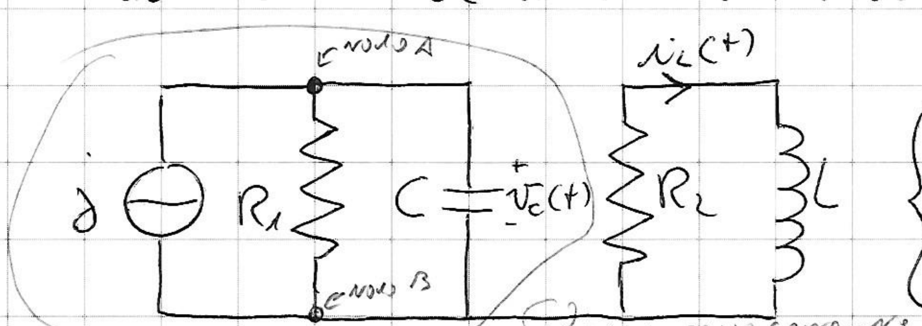
2. Determinare le variabili di stato nell'istante di commutazione
Le variabili di stato sono continue, quindi

1° condizione iniziale
$$\begin{cases} v_C(0) = 0\,V \\ i_L(0) = 10\,A \end{cases}$$

3. Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento della variabile di interesse dopo l'istante di commutazione, in questo caso $t>0$.
Pur essendo il generatore di corrente continuo, all'istante di commutazione si genera una dinamica nel circuito, perché è cambiata la topologia della rete.

- $t>0$ evoluzione dinamica della rete.

Quando si apre l'interruttore, R_2 e L sono staccati dal resto del circuito! Le dinamiche sono del 1° ordine!



corrente che attraversa R_1
corrente che attraversa C

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{v_C}{R_1}} + \boxed{i_C} = J & \text{LKC} \\ i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} & \text{caratteristica del condensatore} \end{cases}$$

Nel circuito non c'è nessuna maglia chiusa che lega il circuito da una parte ad un'altra.
È come se ci fossero due parti completamente indipendenti nel circuito.

da cui l'eq. diff. del 1° ordine:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_1 C} = \frac{J}{C}$$

4. Risolvere l'omogenea associata

$$\lambda + \frac{1}{R_1 C} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{R_1 C} \qquad \tau = R_1 C$$

$$v_{C0}(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} = K e^{-\frac{t}{R_1 C}}$$

5. Determinare l'integrale particolare

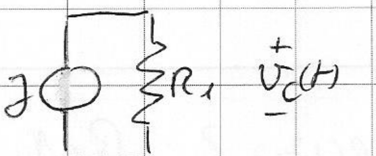
Soluzione matematica.

Forzamento costante $\Rightarrow v_{CP}(t) = A$,

per cui

$$0 + \frac{A}{R_1 C} = \frac{J}{C} \Rightarrow v_{CP}(t) = R_1 J = 80\ V$$

Soluzione fisica



comportamento a regime del circuito, il condensatore si comporta come un circuito aperto. La tensione ai capi del condensatore sarà uguale alla tensione ai capi di R_1. La corrente attraverso R_1 è J e la tensione ai capi di R_1 è $R_1 J$.

6. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare per determinare la soluzione complessiva.

7. Imporre la condizione iniziale nella soluzione complessiva per determinare la costante di integrazione.

Prima

$$v_C(t) = v_{C0}(t) + v_{CP}(t) = K e^{-\frac{t}{R_1 C}} + 80$$

Poi

$$\begin{cases} v_C(t) = K e^{-\frac{t}{R_1 C}} + 80 \\ v_C(0) = 0\ V \end{cases} \Rightarrow K = -80$$

Da cui

$$v_C(t) = \begin{cases} 0\ V & t < 0 \\ 80\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right) & t > 0 \end{cases}$$

Facoltativo: corrente che circola nell'induttore

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = 0$$

non c'è forzamento nelle eq. (?) — LKC alla maglia

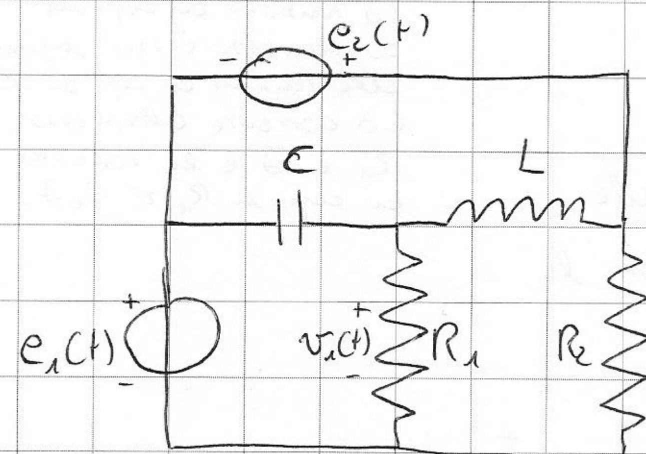
$$\begin{cases} i_L(t) = k e^{-tR_2/L} \\ i_L(0) = 10 \end{cases} \Rightarrow k = 10$$

$$i_L(t) = \begin{cases} 10\ A & t<0 \\ 10\, e^{-tR_2/L}\ A & t>0 \end{cases}$$

↳ dinamica di scarica dell'interruttore

ESERCIZIO 2: Rete in regime sinusoidale

- Determinare la tensione $v_1(t)$ ai capi del resistore R_1.



$e_1(t) = 10 \cos(200t)\ V$

$e_2(t) = 20 \operatorname{sen}(200t)\ V$

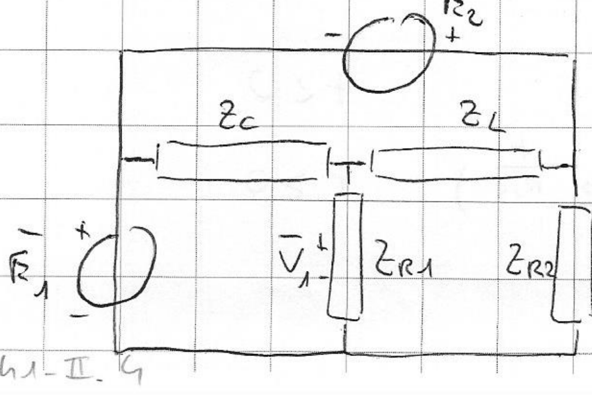
$C = 1\ mF$

$L = 50\ mH$

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 15\ \Omega$

Siamo in regime sinusoidale: si introducono i fasori, con il seno come riferimento di fase e usando i valori massimi.



$\bar{E}_1 = 10j$

$\bar{E}_2 = 20$

$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -5j$

$\dot{Z}_L = 10j$

$\dot{Z}_{R1} = 10$

$\dot{Z}_{R2} = 15$

Si deve ora risolvere la rete con uno dei metodi conosciuti.

- LK : Pessimo
- Sovrapposizione: ok
- Potenziali nodali: ok
- Correnti di Maglia: Male
- Thevenin : ok, è questo (solo V_A).

Ultima osservazione:

Z_{R2} non serve!
La tensione ai suoi capi è bloccata. Poi no C_1, R_2
vd. slide 11

- Sovrapposizione degli effetti

Si considerano accesi i generatori uno alla volta

• Potenziali nodali

Abbiamo due nodi, uno si pone a potenziale 0, quindi rimane un unico potenziale incognito; occorre scrivere tutte le correnti attraverso $\dot{Z}_C$, $\dot{Z}_L$ e $\dot{Z}_{R1}$ in funzione di V_{n1}, imporre Kirchhoff a questo nodo ottenendo l'equazione, che è la LKC applicata al nodo V_{n1};
da essa si ricava V_{n1}, poi abbiamo che $\bar{V}_1 = \bar{V}_{n1} + \bar{E}_1$ e si ricava il risultato.

• Thevenin 30' 34"

Comunque sia stata risolta la rete: $\bar{V}_1 = -15 - 5j$

Nel tempo: $v_1(t) = \underbrace{5\sqrt{10}}_{?} \text{ sen } (200t - \underbrace{2,82}_{?})$

$15\sqrt{2}$ $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

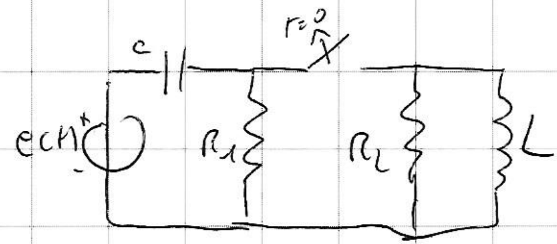
AV41-II.6

Aula Virtuale 41. 3
34'45"
Prof. Dario Assante

TRANSITORI CON PIÙ COMMUTAZIONI

IMPOSTAZIONE DEI TRANSITORI

- Molto spesso negli esercizi si assume che l'evento che innesca il transitorio è in $t=0$. Esempio:



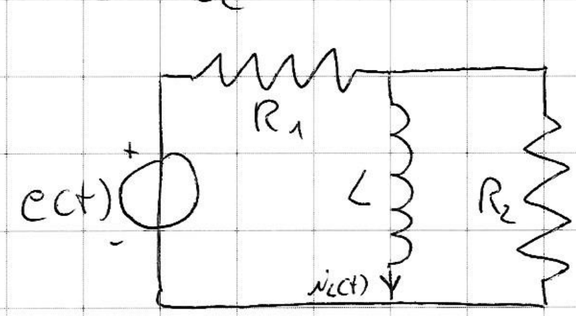
- Questa è solo una scelta di comodo, si può considerare la commutazione in un qualunque istante.
- Questo è particolarmente evidente quando ci sono più commutazioni.

Esercizio 1 Prova del 3 Ottobre 2013

- Il generatore di tensione è spento per $t<0$, si accende nell'istante 0 e si rispegne nell'istante T.

Determinare la corrente che attraversa l'induttore in ogni istante.

$$e(t) = \begin{cases} 0\,V, & t<0 \\ 8\,V, & 0<t<T \\ 0\,V, & t>T \end{cases}$$



$R_1 = 2\,\Omega$

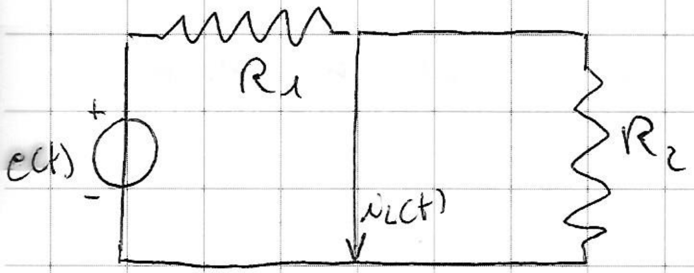
$R_2 = 2\,\Omega$

$L = 1\,mH$

$T = 20\,ms$

La particolarità è la tensione del generatore

Analisi della rete prima dell'istante del transitorio, $t<0$
Per $t<0$ la rete è in regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito.

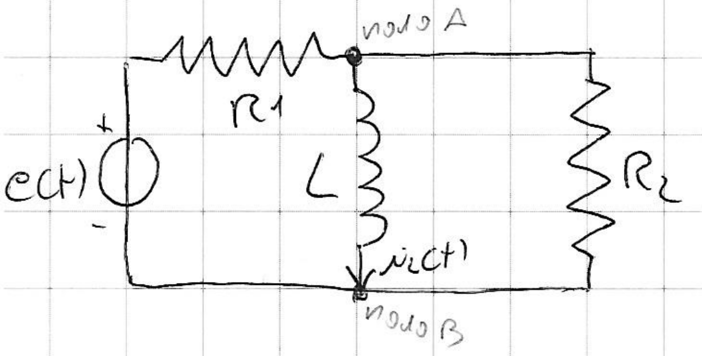


$$i_L(t) = \frac{e(t)}{R_1} = 0\ A \qquad t<0$$

$i_L(0^-) = 0\ A$ e, per la continuità delle variabili di stato:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0\ A$$

Nell'istante 0 avviene la commutazione => si studia il transitorio.
La rete per $0<t<T$: per prima cosa si determina l'equazione differenziale che regola il comportamento di $i_L(t)$.



Si scrivono due LKT alle maglie e una LKC a uno dei due nodi

$$e(t) - L\frac{di_L}{dt} - R_1 i_1 = 0$$

$$L\frac{di_L}{dt} = R_2 i_2$$

$$i_1 = i_L + i_2$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)L} i_L = \frac{R_2}{(R_1+R_2)L} \cdot e(t)$$

n.b. se la rete è tempoinvariante, l'equazione differenziale è sempre valida

L'equazione differenziale ricavata vale sempre finché la topologia del circuito non cambia.

(4) Risolvere l'omogenea associata

Per un transitorio del primo ordine c'è una sola possibile soluzione

$$\lambda + \frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)L} = -1000 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}$$

costante di tempo

$$i_{L0}(t) = K e^{-1000t} \qquad K \cdot e^{\lambda t}$$

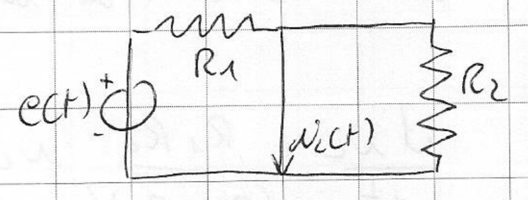
Questa soluzione non dipende dal forzamento, ovviamente

(5) Determinare l'integrale particolare (2 possibilità)

Soluzione matematica.
Il forzamento è una costante.
Posto $i_{Lp}(t) = A$ abbiamo:

$$\underbrace{0}_{\frac{dA}{dt}} + \frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)\cancel{L}} A = \frac{R_1}{(R_1+R_2)\cancel{L}} \cdot e(t)$$

Soluzione fisica
La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della eq. diff.le



$$i_{Lp}(t) = \frac{e(t)}{R_2} = 4A$$

(6) Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare per determinare la soluzione complessiva

(7) Imporre la condizione iniziale nella soluzione complessiva per determinare la costante di integrazione

Prima $i_L(t) = i_{Lp}(t) + i_{L0}(t) = 4 + Ke^{-1000t}$

e poi $\begin{cases} i_L(t) = 4 + Ke^{-1000t} \\ i_L(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow i_L(t) = 4 - 4e^{-1000t}\ A$ $\quad k=-4$

per $0 < t < T$

MAI IMPORRE LA CONDIZIONE INIZIALE SOLO SULL'OMOGENEA

Ora dobbiamo studiare un altro transitorio, partendo dalla situazione attuale.

Analisi della rete per $t > T$

- Per prima cosa si deve determinare la condizione iniziale, che non è $i_L(0) = 0$.
- Visto che abbiamo trovato che, per $0 < t < T$

$$i_L(t) = 4 - 4e^{-1000t} \text{ A} \quad \leftarrow \text{prima di } T, \; T = 20 \text{ ms}$$

allora

$$i_L(T^-) = 4 - 4e^{-1000T} \simeq 4\text{A} \quad (\text{Posto } T = 20 \text{ ms})$$

e per la continuità delle variabili di stato

$$i_L(T^-) = i_L(T^+) \simeq 4\text{A} \longleftarrow \text{nuova condizione iniziale}$$

PER TROVARE LA CONDIZIONE INIZIALE NEL SECONDO TRANSITORIO, HO PRESO LA SOLUZIONE TROVATA PER L'INTERVALLO DA 0 a T, L'HO VALUTATA NELL'ISTANTE T E SARÀ QUESTA LA CONDIZIONE INIZIALE PER IL TRANSITORIO CHE VA DA T IN POI.

(3) L'equazione differenziale che regola il comportamento della variabile di interesse $i_L(t)$ è sempre la stessa

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}\, i_L = \frac{R_1}{(R_1+R_2)L} \cdot e(t)$$

(4) La soluzione dell'omogenea è la stessa.

$$i_{L0}(t) = Ke^{-1000t}$$

(5) L'integrale particolare, in cui influisce il forzamento, è da calcolare, scegliendo uno dei due tipi di soluzione, matematica o fisica.

soluzione matematica

Il forzamento è una costante, posto $v_{Cp}(t)=A$, abbiamo

$$\frac{dA}{dt}+\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)C}A=\frac{R_2}{(R_1+R_2)C}e(t)$$

$$\hookrightarrow \quad v_{Cp}(t)=0$$

soluzione fisica

La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della equazione differenziale

(idem)

(6) Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare = soluz. complessiva

(7) Imporre le condizioni iniziali (una in questo caso) nella soluzione complessiva per determinare le costanti di integrazione (una, K).

Prima

$$v_C(t)=v_{Co}(t)+v_{Cp}(t)=0+Ke^{-1000t}$$

Poi

$$\begin{cases} v_C(t)=\cancel{A+}Ke^{-1000t} \\ v_C(T)=4 \end{cases} \Rightarrow K=\frac{4}{e^{-1000T}} \Rightarrow v_C(t)=4e^{-1000(t-T)}\ A$$

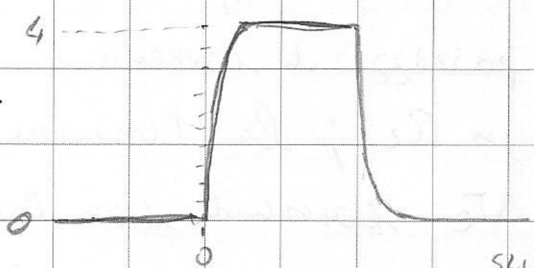
$$\hookrightarrow K \simeq 1.84\cdot 10^{10}$$

In genere conviene scrivere

$$v_{C\cancel{p}}(t)=Ke^{-1000(t-T)} \Rightarrow K=4$$

In definitiva

$$v_C(t)=\begin{cases} 0 & t\le 0 \\ 4-4e^{-1000t} & 0\le t\le T \\ 4e^{-1000(t-T)} & t\ge T \end{cases}$$

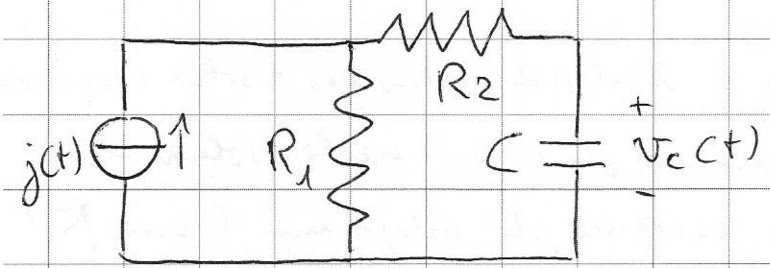


SLIDE 13
17'28''

Esercizio 2.

Il generatore di corrente cambia valore negli istanti 0 e T.

Determinare la tensione ai capi del condensatore in ogni istante.



$$j(t) = \begin{cases} 4A & t<0 \\ 8A & 0<t<T \\ 6A & t>T \end{cases}$$

$R_1 = 2\ \Omega$

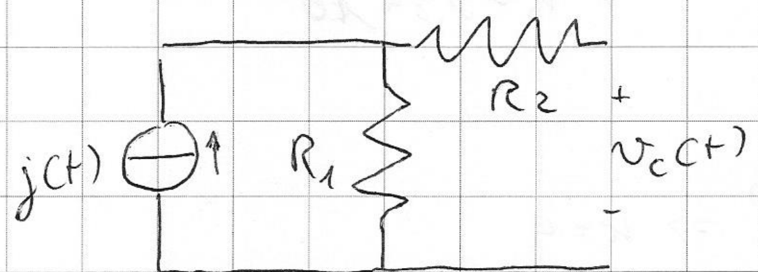
$R_2 = 3\ \Omega$

$C = 2\ mF$

$T = 15\ ms$

Analisi rete per $t<0$

Per $t<0$ la rete è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto.



$v_C(t) = j(t) R_1 = 8V \quad t<0$

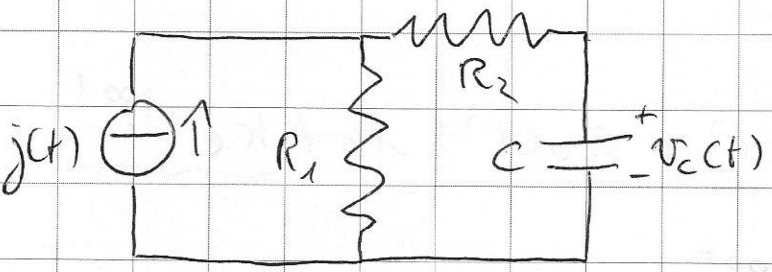
$v_C(0^-) = 8V$

Tutta la corrente circola in R_1, non c'è passaggio di corrente in R_2; la tensione v_C coincide con la tensione ai capi di R_1 e vale $j(t) \cdot R_1 = 8V$.

Per la continuità delle variabili di stato

$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 8\ V$ condizione iniziale

(3) Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento di $v_C(t)$



$R_2 i_2 - R_2 C \frac{dv_C}{dt} - v_C = 0$ LKT maglia di dx

$j(t) = i_1 + C\frac{dv_C}{dt}$ LKC al nodo

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{(R_1+R_2)C} v_C = \frac{R_1}{(R_1+R_2)C} j(t)$$

SLIDE 16 24'55"

n.b. se la rete è tempoinvariante, la equazione differenziale è sempre valida

(4) Risolvere l'omogenea associata per $0<t<T$

$$\lambda + \frac{1}{(R_1+R_2)C} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{(R_1+R_2)C} = -100 \Rightarrow$$

segni concordi!!!

$$v_C(t) = Ke^{-100t}$$

anche questa soluzione non dipende dal forzamento, ovviamente.

(5) Determinare l'integrale particolare per $0<t<T$

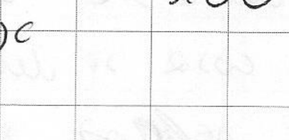
Soluzione matematica

Forzamento è una costante. Così $v_{CP}(t) = A$ assiamo

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{(R_1+R_2)C} A = \frac{R_1}{(R_1+R_2)C} j(t)$$

Soluzione fisica

La soluzione a regime della rete è una soluzione particolare della eq. diffle.



$$\hookrightarrow v_{CP}(t) = R_1 j(t) = 16\,V$$

(7) Si somma la soluzione omogenea e l'integrale particolare => soluz. complessiva
(8) Si impongono le condizioni iniziali (una) alla soluzione complessiva => determinazione costante di integrazione

Prima

$$v_C(t) = v_{Cp}(t) + v_{Co}(t) = \underbrace{16}_{v_{Cp}(t)} + \underbrace{ke^{-100t}}_{v_{Co}(t)}$$

e poi

$$\begin{cases} v_C(t) = ke^{-100t} + 16 \\ v_C(0) = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = 16 - 8e^{-100t} \ V \quad \text{per } 0<t<T$$

MAI IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI SOLO SULL'OMOGENEA.

Ora si analizza la rete per $t > T$ — in $t=T$ si innesca un nuovo transitorio.
Per prima cosa si deve determinare la condizione iniziale, che non è $v_C(0)=8$.
Visto che abbiamo trovato che, per $0<t<T$

$$v_C(t) = 16 - 8e^{-100t} \ V$$

allora

$$v_C(T^-) = 16 - 8e^{-100T} \simeq 14{,}2 V$$

e per la continuità delle variabili di stato

$$v_C(T^-) = v_C(T^+) \simeq 14{,}2 V \quad \text{condizione iniziale}$$

(3) L'equazione differenziale è sempre la stessa:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{(R_1+R_2)C} v_C = \frac{R_1}{(R_1+R_2)C} j(t)$$

(4) Anche la soluzione dell'omogenea è la stessa:

$$v_{Co}(t) = ke^{-100t}$$

AVLL-III.8

(5) Determinare l'integrale particolare

(6) Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare per ottenere la soluzione complessiva

(7) Imporre la condizione iniziale alla soluzione complessiva per determinare la costante di integrazione k.

Integrale particolare per $0<t<T$

Soluzione matematica

Soluzione fisica ...

pongo $v_{cp}(t)=A$, ecc.

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{(R_1+R_2)C}A = \frac{R_1}{(R_1+R_2)C}\, j(t)$$

$$v_{cp}(t) = R_1\, j(t) = 12\ V$$

Prima $v_c(t) = v_{cp}(t) + v_{co}(t) = 12 + ke^{-100t}$

e poi

cond. iniziale nell'istante T →

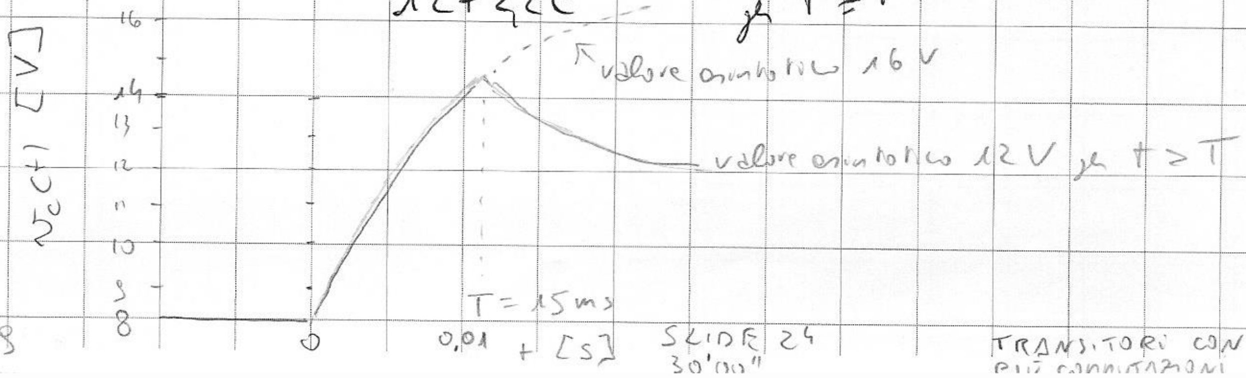
$$\begin{cases} v_c(t) = 12 + ke^{-100t} \\ v_c(T) = 14{,}2 \end{cases} \Rightarrow k = 2{,}2$$

per cui abbiamo

$$v_c(t) = 12 + 2{,}2\, e^{-100t} \quad (t-T)?$$

In definitiva

$$v_c(t) = \begin{cases} 8, & t \le 0 \\ 16 - 8e^{-100t} & 0 \le t \le T \\ 12 + 2{,}2e^{-100t} & \text{per } t \ge T \end{cases} \quad (t-T)$$



SLIDE 24 30'00''

TRANSITORI CON PIÙ COMMUTAZIONI

Nelle prove di esame di Ottobre 2013,
scrivono esercizi, ci sono prove di questo tipo